数理解析研究所講究録
第2062巻 2018年 27-32



# taut な理想三角形分割における veering の判定方法

広島大学・日本学術振興会特別研究員PD　阪田　直樹
Naoki Sakata
Hiroshima University,
JSPS Research Fellow (PD)

## 1. 導入

このノートでは、著者が研究集会「離散群と双曲空間のトポロジーと解析」において行なった講演の中で用いた、taut な理想三角形分割における veering の判定方法を与える。

$F$ を曲面、$\varphi : F \to F$ を擬アノソフ写像とする。このとき、それぞれ安定葉層 (stable foliation)、不安定葉層 (unstable foliation) と呼ばれる、$\varphi$ で不変な測度付き特異葉層が丁度2つ存在する。曲面 $F$ から安定葉層、不安定葉層の特異点を除いて得られる穴あき曲面を $F^\circ$ で表わし、また $\varphi$ の $F^\circ$ への制限を $\varphi^\circ$ で表わす。Agol [1] は写像トーラス $M = F^\circ \times \mathbb{R}/(x,t) \sim (\varphi^\circ(x), t+1)$ には veering と呼ばれる性質を持った標準的な理想三角形分割が存在することを示した。一方モノドロミーが擬アノソフであることから、Thurston の双曲化定理によって $M$ は完備双曲構造を持つ。そのことから Agol は、veering である理想三角形分割は幾何的か、つまり、veering である理想三角形分割はその完備双曲構造によって実現出来るか、という問題を提起した。この問題は Hodgson-Issa-Segerman [6] が veering な理想三角形分割で、かつ幾何的ではない分割を発見したために否定的に解決された。著者は、幾何的であるような veering な理想三角形分割はどのように特徴付けされるか、という問題に関して考察し、その途中報告を当研究集会において行なった。

有限体積を持つカスプ付き完備双曲多様体には、標準的分割と呼ばれる幾何的である理想多面体分割が存在する ([3]、[11] 参照)。標準的分割の組合せ構造が具体的に与えられている多様体の無限族としては、円周上の一点穴あきトーラス束 ([8]、[4]、[2]) や、双曲的二橋絡み目補空間 ([5]、[2]) などが知られている。ここで標準的分割は、円周上の一点穴あきトーラス束においては、その曲面束の veering である理想三角形分割と一致することが示されている。そこで著者は双曲的二橋絡み目で、かつファイバーである絡み目の補空間について、その標準的分割と veering である理想三角形分割が一致するかどうかを考察し、次の結果を得た。

**定理 1.1** ([10, Theorem 1.1]). 傾き $r$ の双曲的ファイバー二橋絡み目 $K(r)$ の補空間 $S^3 \setminus K(r)$ の標準的分割がそのファイバー構造に関して veering であるための必要十分条件は、傾き $r$ が連分数展開 $\pm[2,2,\ldots,2]$ を持つことである。

この定理を証明するために、今回の報告の元になった論文 [10] では "layered" でかつ特定の条件を満たす理想三角形分割が veering であるかどうかを判定する条件を与えている。しかしながら実際にはその仮定は強く、一般的な状況では使いづらいものであった。したがってこのノートでは [10] に沿いつつ、より一般的な仮定である taut な理想三角形分割が veering であるかどうかを判定する方法 (定理 2.9) を解説する。

本研究は科研費 (課題番号:15J06192) の助成を受けたものである。

## 2. Veering の判定条件

この節では taut な理想三角形分割が veering であるかどうかを判定する方法(定理 2.9)を解説する。

まずは taut な理想三角形分割を定義する。

**定義 2.1** ([9]、[7] 参照). $M$ を、境界を持つコンパクトな3次元多様体で、かつ境界 $\partial M$ の各連結成分が全てトーラスであるとする。$\mathcal{D}$ を多様体 $M \setminus \partial M$ の理想三角形分割とする。$\mathcal{D}$ の理想四面体(理想3単体)が **taut** であるとは、その理想四面体の各理想三角形(理想2単体)に次の条件を満たす様な横断的な方向 (transverse orientation) が指定されていることである(図 1)。

- 理想四面体が面として持つ4つの理想三角形のうち、丁度2つは指定されている横断的な方向がその理想四面体の内側へ向いており、かつ残りの2つは指定されている横断的な方向がその理想四面体の外側へ向いている。

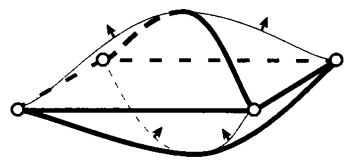


図 1: taut な理想四面体

taut な理想四面体の各理想辺(理想1単体)には次の様に角度0、もしくは角度 $\pi$ を定める事が出来る。

(1) 角度 $\pi$ が定まっている理想辺を共有している2つの理想三角形は、それぞれに指定されている横断的な方向が共に同じ方向である。

(2) 角度0が定まっている理想辺を共有している2つの理想三角形は、それぞれに指定されている横断的な方向が、一方は四面体から出る方向であり、もう一方は四面体へ入る方向である。

以下 taut な理想四面体の各理想辺にはここで定めた角度が定まっているとする。

**定義 2.2** ([9]、[7] 参照). 理想三角形分割 $\mathcal{D}$ の各理想三角形に対して次の二つの条件を満たす様な横断的な方向が指定されているとき、$\mathcal{D}$ を **taut** という。

(1) $\mathcal{D}$ の各理想四面体に対して、その理想四面体は taut である。

(2) $\mathcal{D}$ の各理想辺(理想1単体)に対して、その理想辺を含む理想四面体において定まっている角度の合計は $2\pi$ である。

特に定義より、taut な理想三角形分割は "generalized angle structure" を持つ。

veering の定義は以下の通りである。

**定義 2.3** ([7] 参照). taut な理想三角形分割 $\mathcal{D}$ が **veering** であるとは、以下の条件を満たす $\mathcal{D}$ の各理想辺への(赤と青による)二彩色が存在することである。

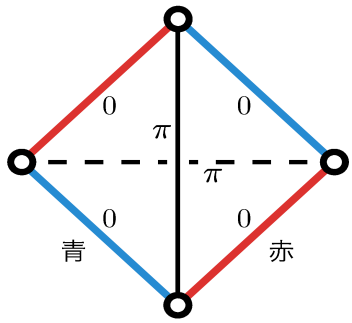



図 2: 二彩色された理想四面体。ここで角度$\pi$が定まっている理想辺はどちらの色でも良い。これらの理想辺の色は他の理想四面体によって定まる。

- $\mathcal{D}$の各理想四面体は、向きを保つ同相写像によって図 2 で示される taut な理想四面体へ写される。

**注意 2.4.** 定義 2.3 での veering の定義は Agol [1] が与えた元々の veering の定義とは異なる。Hodgson らの論文 [7] では taut な理想三角形分割の generalized angle structure にのみ注目して、各理想三角形に横断的な方向を指定しない、より一般的な場合での "veering" を定義した。定義 2.2 における taut の定義では、定義 2.3 は Agol が定義した元々の veering の定義と同値な条件となっていることが示されている ([7, Proposition 1.4])。

$M$をコンパクトな境界つきの3次元多様体とする。ただし境界$\partial M$の各成分はトーラスであるとする。$\mathcal{D}$を$M \setminus \partial M$の taut な理想三角形分割とする。このとき$\mathcal{D}$の理想四面体を全て trancated することによって$M$を得る。よって$\mathcal{D}$の理想頂点のリンクと境界$\partial M$は同一視する事が出来て、$\partial M$には(角度付き)三角形分割$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{D})$が定まる。

ここで更に$\mathcal{D}$を veering とする。よって$\mathcal{D}$の各理想辺には赤と青による二彩色が与えられている。$\mathcal{D}$から定まる$\partial M$の(角度付き)三角形分割$\mathcal{T}$の各頂点は、$\mathcal{D}$の理想頂点のリンクと$\mathcal{D}$の理想辺との交わりである。したがって$\partial M$の(角度付き)三角形分割$\mathcal{T}$の各頂点には赤か青による二彩色が与えられる。このとき次が成り立つことがわかる。

- taut な理想三角形分割$\mathcal{D}$が veering であることの必要十分条件は、(角度付き)三角形分割$\mathcal{T}$の任意の三角形が図 3 の三角形へ向きを保つ同相写像で写ることである。

ただし、$\partial M$には横断的な方向を多様体の外側へ出る方向とする様な向きが定まっているとする。

定理 2.9 は$\partial M$の(角度付き)三角形分割$\mathcal{T}$の双対$\mathcal{T}^*$を用いて与えられる。$\mathcal{T}^*$の状況を見るために、まずは理想三角形分割$\mathcal{D}$の双対$\mathcal{D}^*$を見る必要がある。

$\mathcal{D}$を多様体$M \setminus \partial M$の理想三角形分割とする。$\mathcal{D}^*$を$\mathcal{D}$と双対な2次元セル複体とする。すなわち$\mathcal{D}^*$は次を満たす。

(1) $\mathcal{D}^*$の0セルは$\mathcal{D}$の理想四面体の双対である。

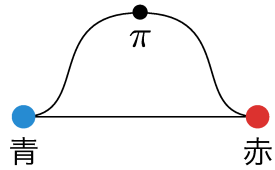



図 3: 左の頂点が青、右の頂点が赤に彩色された (角度付き) 三角形

(2) $\mathcal{D}^*$ の 1 セル $\delta^*$ は $\mathcal{D}$ の理想三角形 $\delta$ の双対である。すなわち、$\delta^*$ の端点は $\delta$ を共有する $\mathcal{D}$ の理想四面体の双対である $\mathcal{D}^*$ の 0 セルである。よって各 0 セルは 4 価頂点である。

(3) $\mathcal{D}^*$ の 2 セル $f$ は $\mathcal{D}$ の理想辺 $e$ の双対である。すなわち、$e$ を共有する $\mathcal{D}$ の理想三角形を循環的順序 (cyclic order) で並べた列を $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ としたとき、$f$ の境界はその双対の列 $(\delta_0^*, \delta_1^*, \ldots, \delta_n^*)$ となる。

このとき $\mathcal{D}$ が taut であるならば、$\mathcal{D}$ の各理想三角形には横断的な方向が指定されている。$\mathcal{D}^*$ の各 1 セル $\delta^*$ は $\mathcal{D}$ の理想三角形 $\delta$ と対応しているから、$\delta$ に指定されている横断的な方向から $\delta^*$ の向きを定める事が出来る。定義より、taut な理想四面体は、面として持つ 4 つの理想三角形のうち丁度 2 つの横断的な方向はその理想四面体の内側へ向いており、残りの 2 つの横断的な方向はその理想四面体の外側へ向いている。よって双対 $\mathcal{D}^*$ の各 0 セルに接する 4 つの 1 セルのうち、丁度 2 つはその 0 セルへ入る向きが定まっており、また残りの 2 つはその 0 セルから出る向きが定まっている。以下、理想三角形 $\mathcal{D}$ が taut であるとき、その双対 $\mathcal{D}^*$ の各 1 セルにはこの様な向きが指定されているとする。

双対 $\mathcal{D}^*$ の 2 セル $f$ に対して、その境界 $\partial f$ 上にある 0 セル $\tau^*$ は、$\partial f$ 上の (同一なものも含めて) 丁度 2 つの 1 セル $\delta_1^*$、$\delta_2^*$ に共有される。このとき次の 3 つの場合がある。

(i) $\delta_1^*$ と $\delta_2^*$ は共に $\tau^*$ へ入る向きである。

(ii) $\delta_1^*$ と $\delta_2^*$ は共に $\tau^*$ から出る向きである。

(iii) $\delta_1^*$ と $\delta_2^*$ のうち一方は $\tau^*$ へ入る向きであり、もう一方は $\tau^*$ から出る向きである。

(i) を満たす $\tau^*$ を $f$ に関する**極大点**、(ii) を満たす $\tau^*$ を $f$ に関する**極小点**と呼ぶ。極大点、極小点に関して次が成り立つ。

**観察 2.5.** 双対 $\mathcal{D}^*$ の各 2 セル $f$ に対して、$f$ に関する極大点と極小点は丁度 1 つずつ存在する。

2 次元セル複体 $\mathcal{T}^*$ を三角形分割 $\mathcal{T}$ の双対とする。$\mathcal{T}^*$ の各 1 セルに向きを定めることを考える。まず $\mathcal{T}^*$ に関して次のことが分かる。

**観察 2.6.** 次を満たす全射セル写像 $\gamma : \mathcal{T}^* \to \mathcal{D}^*$ が存在する。

(1) $|\gamma| : |\mathcal{T}^*| \to |\mathcal{D}^*|$ は変位レトラクト $|\mathcal{D}| \to |\mathcal{D}^*|$ へ拡張する。

(2) $\mathcal{D}^*$ の各 0 セル $\tau^*$ に対して、$\mathcal{D}$ の理想四面体 $\tau$ が対応する。理想四面体 $\tau$ は $\partial M$ の三角形分割 $\mathcal{T}$ の三角形を丁度 4 つ導く。このとき $\tau^*$ の $\gamma$ による逆像は、$\tau$ から導かれた $\mathcal{T}$ の 4 つの三角形の双対である。

(3) $\mathcal{D}^*$の各1セル$\delta^*$に対して、$\mathcal{D}$の理想三角形$\delta$が対応する。理想三角形$\delta$は$\partial M$の三角形分割$\mathcal{T}$の辺を丁度3つ導く。このとき$\delta^*$の$\gamma$による逆像は、$\delta$から導かれた$\mathcal{T}$の3つの辺の双対である。

(4) $\mathcal{D}^*$の各2セル$f$に対して、$\mathcal{D}$の理想辺$e = f^*$が対応する。理想辺$e$は$\partial M$の三角形分割$\mathcal{T}$の頂点を丁度2つ導く。このとき$f$の$\gamma$による逆像は、$e$から導かれた$\mathcal{T}$の2つの頂点の双対である。

よって$\mathcal{T}^*$の各1セルに対して$\mathcal{D}^*$の向き付けられた1セルが対応しているから、$\mathcal{T}^*$の1セルには対応する$\mathcal{D}^*$の1セルから向きを定めることが出来る。

$\mathcal{T}^*$の2セル$\widetilde{f}$の境界$\partial\widetilde{f}$の頂点に関しても、$\mathcal{D}^*$の2セルの場合と同様に極大点、極小点が定義出来る。よって観察 2.5、2.6より、$\mathcal{T}^*$の各2セルに対して、その2セルに関する極大点と極小点は丁度1つずつ存在する。したがって$\partial\widetilde{f}$の境界には、$\widetilde{f}$に関する極小点から極大点へ向かう$\partial\widetilde{f}$内の道(path)が丁度2つ存在する。そのうち2セルを反時計回りで回る道を$\partial_R(\widetilde{f})$、時計回りで回る道を$\partial_L(\widetilde{f})$で表わす。ただし$\widetilde{f}$には$\partial M$から向きが定まっているとする。

**定義 2.7.** $\widetilde{f}$を$\mathcal{T}^*$の2セルとする。$\ell$を$\partial_R(\widetilde{f})$か$\partial_L(\widetilde{f})$のいずれかを表わすとする。

(1) 道$\ell$の内部の頂点$v$(つまり、極大点と極小点以外の0セル)に対して、その点を端点に持つ丁度3つの1セルが存在する。そのうちの2つは$\ell$に含まれる連続した1セルである。残り1つの1セルに定まっている向きが$v$へ入る向きであるとき、$v$を**誘引的**(attractive)と呼ぶ。また、1セルに定まっている向きが$v$から出る向きであるとき、$v$を**反発的**(repulsive)と呼ぶ。

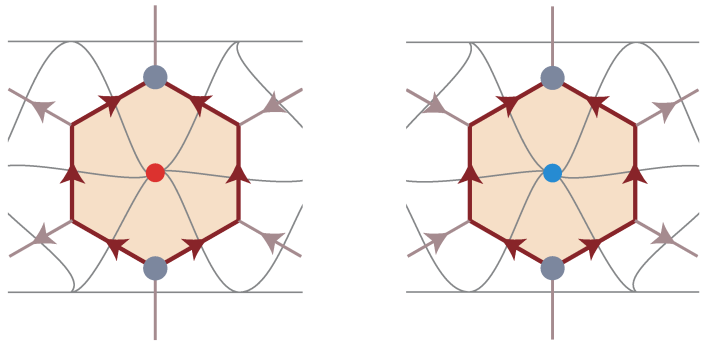
(2) 道$\ell$の内部の点が全て誘引的であるとき、$\ell$を**誘引的**、全て反発的であるとき、$\ell$を**反発的**と呼ぶ。

(3) 道$\partial_R(\widetilde{f})$が誘引的であり、かつ道$\partial_L(\widetilde{f})$が反発的であるとき、2セル$\widetilde{f}$を**right-to-left** (または省略して**RL**)と呼ぶ(図 4(1))。また道$\partial_R(\widetilde{f})$が反発的であり、かつ道$\partial_L(\widetilde{f})$が誘引的であるとき、2セル$\widetilde{f}$を**left-to-right** (または省略して**LR**)と呼ぶ(図 4(2))。

**注意 2.8.** ここで$\mathcal{T}^*$の2セル$\widetilde{f}$が境界に(同一なものを含めて)3つ以上の1セルを持たないとすると、$\widetilde{f}$はRLであり、かつLRである。このとき$\widetilde{f}$に対応する$\mathcal{D}^*$の2セル$f$の双対である$\mathcal{D}$の理想辺$e = f^*$の位数(degree)は2である。しかしながらHodgsonらの結果 [7, Corollary 2.4] から、その様な理想辺が存在するとき理想三角形分割$\mathcal{D}$はveering ではない。

次の定理によって、taut な理想三角形分割がveering であるかどうかを判定する方法が与えられる。

**定理 2.9** ([10, Proposition 2.9] 参照). $M$をコンパクトな3次元多様体とする。また$M$の境界$\partial M$の成分は全てトーラスであるとする。$\mathcal{D}$を$M \setminus \partial M$のtaut な理想三角形分割で、各理想辺の位数は3以上とする。$\mathcal{T}$を$\mathcal{D}$から導かれた$\partial M$の三角形分割とする。また$\mathcal{T}^*$を$\mathcal{T}$の双対である2次元セル複体とする。このとき$\mathcal{D}$がveering であるため必要十分条件は、$\mathcal{T}^*$の各2セルがRLであるか、またはLRであることである。



(1) RLの2セル　　(2) LRの2セル

図 4:

特に、$\mathcal{T}^*$の2セル$\widetilde{f}$がRLのときは、対応する$\mathcal{D}^*$の2セル$f$の双対である$\mathcal{D}$の理想辺$e = f^*$は赤とし、また$\widetilde{f}$がLRのときは$e$は青とすれば、taut な理想三角形分割$\mathcal{D}$は veering となる。逆に veering な理想三角形分割$\mathcal{D}$の理想辺が赤ならば対応する$\mathcal{T}^*$の2セルはRLとなり、青ならば対応する$\mathcal{T}^*$の2セルはLRとなる。

証明は [10, Proposition 2.9] と同様の議論によって与えられる。

## 参考文献


[1] I. Agol, *Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori*, Topology and geometry in dimension three, Contemp. Math., vol. 560, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 1–17, DOI 10.1090/conm/560/11087.

[2] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups. I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1909, Springer, Berlin, 2007.

[3] D. B. A. Epstein and R. C. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 1, 67–80.

[4] F. Guéritaud, *Hyperbolic geometry and canonical triangulations in dimension three* (2006), 164. Thesis (Ph.D.)–University of Southern California.

[5] ———, *On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements*, Geom. Topol. **10** (2006), 1239–1284, DOI 10.2140/gt.2006.10.1239. With an appendix by David Futer.

[6] C. D. Hodgson, A. Issa, and H. Segerman, *Non-geometric veering triangulations*, Exp. Math. **25** (2016), no. 1, 17–45, DOI 10.1080/10586458.2015.1005256.

[7] C. D. Hodgson, J. H. Rubinstein, H. Segerman, and S. Tillmann, *Veering triangulations admit strict angle structures*, Geom. Topol. **15** (2011), no. 4, 2073–2089, DOI 10.2140/gt.2011.15.2073.

[8] T. Jørgensen, *On pairs of once-punctured tori*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 299, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, pp. 183–207, DOI 10.1017/CBO9780511542817.010.

[9] M. Lackenby, *Taut ideal triangulations of 3-manifolds*, Geom. Topol. **4** (2000), 369–395, DOI 10.2140/gt.2000.4.369.

[10] N. Sakata, *Veering structures of the canonical decompositions of hyperbolic fibered two-bridge link complements*, J. Knot Theor. Ramif. **25** (2016), no. 4, [34 pages], DOI 10.1142/S0218216516500152.

[11] J. R. Weeks, *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Topology Appl. **52** (1993), no. 2, 127–149, DOI 10.1016/0166-8641(93)90032-9.