

距離に依存する次元 d_2 について

埼玉大学教育学部 後藤 達生

距離に依存する次元関数 $d_2, d_3, d_5, d_0 = \mu \dim$ は [2][3][4] 等において導入され, 一般の距離空間 (X, ρ) において

$$d_2(X, \rho) \leq d_3(X, \rho) \leq d_5(X, \rho) \leq d_0(X, \rho) \leq \dim X \leq 2d_2(X, \rho)$$

が成立する。ただし $\dim X$ は X の被覆次元を表す ([4] [5] [9])。

Roberts-Slaughter [10] が一般の距離空間において d_0 の実現定理を証明して以来, 他の次元関数 d_i についての実現定理が成立するかどうかが問題とされてきた。

実現定理 距離空間 (X, ρ) において $d_i(X, \rho) < \dim X$ のとき $d_i(X, \rho) \leq k \leq \dim X$ なるかつてな整数 k に対し, $d_i(X, \rho_k) = k$ となる ρ と位相同値な距離関数 ρ_k が存在する ($i=0, 2, 3, 5$)。

$i=3, 5$ の場合は J.C. Nichols [6] が一般の距離空間に対し, $i=2$ の場合はやはり Nichols [7] が特別の距離空間に対し

上の実現定理が成立することを示した。ここでは一般の距離空間 (X, d_2) における d_2 の実現定理の証明の概略を述べる ([1] 参照)。

$d_2(X, \rho) < \dim X = n$ とし, k を $d_2(X, \rho) = k \leq n$ なる最大の整数とする。 $\{C_1, C'_1; \dots; C_n, C'_n\}$ を X の n -defining system とする。 $j=1, 2, \dots$ に対し

$$A_j = \bigcup_{i=1}^n A_{ji}, \quad A_{ji} = \{x \in X : \rho(x, C_i) \leq 1/j, \rho(x, C'_i) \leq 1/j\}$$

と定める。 $\{U_i\}$ を (X, ρ) の一様開被覆の列で $U_{i+1} \subset^* U_i$, $\text{mesh } U_i < 1/i$ ($i=1, 2, \dots$) を満たすものとする。

$$B_j = S_t(A_j, U_j), \quad \mathcal{V}_j = \{B_j\} \cup \{U \in U_j : U \cap A_j = \emptyset\}$$

とすれば, $\mathcal{V}_{j+1} \subset^* \mathcal{V}_j$ が成立し, 各 $x \in X$ に対し $\{S_t(x, \mathcal{V}_j) : j=1, 2, \dots\}$ は x の近傍基となる。従って ρ と位相同値な X の距離関数 σ で,

$$\mathcal{V}_{i+1} \subset \{S_{2^{-i}}(x, \sigma) : x \in X\} \subset \mathcal{V}_i^{\Delta} \quad i=1, 2, \dots$$

を満たすものがある。このとき, $f_i : X \rightarrow I = [0, 1]$ ($1 \leq i \leq n$) を適当に定めれば, $f_i(C_i) = 0$, $f_i(C'_i) = 1$ を満たし, さらに $\epsilon > 0$ に対し X の開集合 U が存在して, σ -diameter $U < \epsilon$ かつ各 x に対し $f_i|_{(X \setminus U)}$ は σ -uniformly continuous となるように出来る。そこで $g_k = (f_1, \dots, f_k) : X \rightarrow I^k$ とし, X 上の距離関数 P_k を

$$P_k(x, y) = \sigma(x, y) + \sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(y)| \quad x, y \in X$$

と定めれば", P_2 は P と位相同値で", $d_2(X, P_2) = R$ を満たす。

参考文献

- [1] T. Goto : On the realization of dimension function d_2 ,
Proc. A. M. S. 58 (1976) 265-271
- [2] R. E. Hodel : Note on metric-dependent dimension functions,
Fund. Math. 61 (1967) 83-89
- [3] M. Katětov : On the relation between the metric and
topological dimension, Czech. M. J. 8 (1958) 163-166
- [4] K. Nagami and J. H. Roberts : Metric-dependent dimension
functions, Proc. A. M. S. 16 (1965) 601-604
- [5] — : Study of metric-dependent dimension functions,
Trans. A. M. S. 129 (1967) 414-435
- [6] J. C. Nichols : Equivalent metrics giving different values to
metric-dependent dimension functions, Proc. A. M. S. 23 (1969) 648-652
- [7] — : The realization of dimension function d_2 , Fund. Math. 77
(1973) 211-217
- [8] J. H. Roberts : Metric-dependent function d_2 and covering
dimension, Duke M. J. 37 (1970) 467-472
- [9] — : Realizability of metric-dependent dimensions,

Proc. A.M.S. 19 (1968) 1439-1442.

[10] — and F.G. Slaughter; Metric dimension and equivalent metrics, Fund. Math. 62 (1968) 1-5.