

相互作用方程式と逆散乱法

静大理 米山 徹 (Yoneyama, Tohru)

Part I KdV eq. のソリトン解

§ 1-1 相互作用 KdV 方程式と逆散乱法

§ 1-2 $u_i \propto \psi_i^2$ の証明

§ 1-3 $u \rightarrow 0$ の時の $\psi_i \rightarrow \phi_i$ ($u_i \rightarrow v_i$)

§ 1-4 $u_i' \propto \partial(\phi_i \psi_i)$ ということ

§ 1-5 ソリトン解を求める

Part II Toda eq. のソリトン解

§ 2-1 相互作用戸田 V 方程式と逆散乱法

§ 2-2 modified 差分

§ 2-3 Int Toda 方程式 と 線形方程式

§ 2-4 ソリトン解を求める

P a r t I K d V eq. のソリトン解

§ 1 - 1 相互作用 K d V 方程式と逆散乱法

K d V の解を, 新しい方法で求める.

$$d u - 6 u \partial u + \partial^3 u = 0$$

但し $d \equiv \partial / \partial t$, $\partial \equiv \partial / \partial x$

物理的に自然な I n t K d V 方程式は

$$d u_i - 6 u \partial u_i + \partial^3 u_i = 0 \quad (1)$$

N-soliton 解; $u = \sum_{i=1}^N u_i$

他の I n t K d V 方程式の形;

$$d u_i' - 3 u \partial u_i' - 3 u_i' \partial u + \partial^3 u_i' = 0 \quad (2)$$

$$u = \sum_{i=1}^N u_i'.$$

i が 1 つなら (1) と (2) とは同じ形になる.

$$d u_i(') - 6 u_i(') \partial u_i(') + \partial^3 u_i(') = 0^{1)}$$

G G K M²⁾ (1974) は "Schroedinger eq."

$$\partial^2 \psi_i - (u - \lambda_i) \psi_i = 0 \quad (3)$$

または $u = (\partial^2 \psi_i) / \psi_i + \lambda_i \quad (3')$

を満たす ψ_i は

$$d \psi_i + \partial^3 \psi_i - 3(u + \lambda_i)(\partial \psi_i) = 0 \quad (4)$$

或は $d \psi_i + \partial^3 \psi_i$

$$- 3[2u - (\partial^2 \psi_i) / \psi_i](\partial \psi_i) = 0 \quad (4')$$

を満たすことを示した．ここで u は K d V eq. の解である．

§ 1-2 $u_i \propto \psi_i^2$ の証明

(4') から

$$\begin{aligned} \psi_i d\psi_i + \psi_i \partial^3 \psi_i - 6u\psi_i(\partial\psi_i) \\ + 3(\partial\psi_i)(\partial^2\psi_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{または } d(\psi_i^2) + 2\psi_i \partial^3 \psi_i - 6u(\partial\psi_i^2) \\ + 6(\partial\psi_i)(\partial^2\psi_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即ち } d(\psi_i^2) - 6u(\partial\psi_i^2) + \partial^3(\psi_i^2) = 0.$$

そこで

$$u_i = \alpha_i \psi_i^2. \quad (\alpha_i: \text{const.}) \quad (5)$$

(5) と "Schroedinger eq." (3) とを使うと

$$\begin{aligned} \partial^3 \psi_i / \alpha_i &= 2 \partial [\psi_i \partial^2 \psi_i + (\partial \psi_i)^2] \\ &= 2 \partial [(u - \lambda_i) \psi_i + (\partial \psi_i)^2] \\ &= 2 \partial [(u - \lambda_i) \psi_i] + 4(u - \lambda_i) \psi_i \partial \psi_i \\ &= 2 \partial [(u - \lambda_i) \psi_i] + 2(u - \lambda_i) \partial(\psi_i^2). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} d u_i &= 6u \partial u_i - 3 \partial^3 u_i + 2 \partial^3 u_i \\ &= 6u \partial u_i - 6 \partial [(u - \lambda_i) u_i] \\ &\quad - 6(u - \lambda_i) \partial u_i + 2 \partial^3 u_i \end{aligned}$$

$$= -6 \partial [(u - 2\lambda_i)u_i] + 2 \partial^3 u_i$$

及び

$$d \int_{-\infty}^{\infty} u_i dx$$

$$= [-6(u - 2\lambda_i)u_i + 2 \partial^2 u_i]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

この様にして，次のことが解る．

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_i dx = \text{const.}$$

1-ソリトン解 u で解っていることは

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dx = 4\kappa$$

ここで κ はソリトンのパラメータ．依って u_i の具体的な関数形を知らなくても，一般の i ($i = 1, 2, \dots, N$) について

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_i dx = 4\kappa_i.$$

である事が解る． ψ_i を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2 dx = 1,$$

と規格化すれば

$$u_i = 4\kappa_i \psi_i^2. \quad (6)$$

量 ψ_i は，直接にソリトン解と関係がある．

§ 1-3 $u \rightarrow 0$ の時の $\psi_i \rightarrow \phi_i$ ($u_i \rightarrow v_i$)

I n t K d V eq.(1) と "Schroedinger eq. とは $u \rightarrow 0$ の時, それぞれ

$$d v_i + \partial^3 v_i = 0 \quad (u_i \rightarrow v_i) \quad (7)$$

$$\partial^2 \phi_i = -\lambda_i \psi_i \equiv \kappa_i^2 \psi_i \quad (\psi_i \rightarrow \phi_i) \quad (8)$$

となる. よって

$$\phi_i = A_i(t) \exp(\pm \kappa_i x).$$

符号は $+\kappa_i$ と選ぶ. $v_i \rightarrow \phi_i^2$ と (7) より

$$\phi_i = \exp(\kappa_i x - 4 \kappa_i^3 t + c_i). \quad (9)$$

§ 1-4 $u_i' \propto \partial(\phi_i \psi_i)$ ということ

(4') より

$$\begin{aligned} \phi_i(d\psi_i) + \phi_i(\partial^3 \psi_i) - 6u\phi_i(\partial\psi_i) \\ + 3\phi_i(\partial\psi_i)(\partial^2 \psi_i) / \psi_i = 0 \end{aligned}$$

(9)から $\partial\phi_i = \kappa_i \phi_i$,

$$\partial^2 \phi_i = \kappa_i^2 \phi_i = -\lambda_i \phi_i$$

そして

$$\psi_i(d\phi_i) + 4\psi_i(\partial^3 \phi_i) = 0.$$

これらと "Schroedinger eq." (3) 或は (3') から

$$d(\phi_i \psi_i) - 3u\partial(\phi_i \psi_i) + \partial^3(\phi_i \psi_i) = 0 \quad (10)$$

或は

$$\begin{aligned} & d[\partial(\phi_i, \psi_i)] - 3u_x[\partial(\phi_i, \psi_i)] \\ & - 3u\partial[\partial(\phi_i, \psi_i)] + \partial^3[\partial(\phi_i, \psi_i)] = 0. \quad (10') \end{aligned}$$

よって (2) の ソリトン 解 u_i' が得られる.

$$u_i' \propto \partial(\phi_i, \psi_i),$$

ここで u_i' は ϕ_i と ψ_i のパラメータ κ_i によって決められるとする.

次に (10) から

$$\begin{aligned} & d \int_{-\infty}^{\infty} \partial(\phi_i, \psi_i) dx \\ & = \{[3u\partial(\phi_i, \psi_i) + \partial^3[\partial(\phi_i, \psi_i)]]\}_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

故に
$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial(\phi_i, \psi_i) dx = \text{const.}$$

(10) と Int KdV eq. (1) とからこの定数が $2\kappa_i$ であることが解る. そのように ϕ_i の位相 c_i を選べばよい. これと (6) とから

$$u_i' = 2\partial(\phi_i, \psi_i). \quad (11)$$

u_i' のグラフは Calogero and Degasperis.³⁾ に載っている. ただしここで考えた様な意味は与えていない.

§ 1-5 ソリトン解を求める

N -成分ベクトル $\underline{\phi}$ を導入する.

$$\underline{\phi}^T = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N)$$

ソリトン解が, この $\underline{\phi}$ と $N \times N$ 成分の対称 行列 M とから組立られるとする. 即ち

$$\underline{\psi} \equiv M \underline{\phi} \quad (12)$$

行列 M の具体的な形を求める.

5-1 (6) と (12) とから

$$u = 4 \sum_{i=1}^N \kappa_i \psi_i^2 = 4 \underline{\psi}^T K \underline{\psi} = 4 \underline{\phi}^T M K M \underline{\phi} \quad (13)$$

ここで K は $N \times N$ の対角行列 (要素 κ_i) である.

(11) と (12) から

$$\begin{aligned} u &= 2 \sum_{i=1}^N \partial(\phi_i \psi_i) \\ &= 2 \partial(\underline{\phi}^T \underline{\psi}) = 2 \partial(\underline{\phi}^T M \underline{\phi}) \\ &= 2 \underline{\phi}^T K M \underline{\phi} + 2 \underline{\phi}^T (\partial M) \underline{\phi} + 2 \underline{\phi}^T M K \underline{\phi}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{よって} \quad \partial M = 2 M K M - K M - M K \quad (15)$$

$$\text{または} \quad -\partial(M^{-1}) = 2 K - M^{-1} K - K M^{-1},$$

$$\text{即ち} \quad \partial(I - M^{-1}) = (I - M^{-1}) K + K (I - M^{-1}).$$

この形から M を $M^{-1} \equiv I - B$, と置くと

$$\partial B = B K + K B. \quad (15')$$

よって次の有用な公式が出る.

$$\partial \psi = \partial (M \phi) = (2M - I) K M \phi \equiv R \psi, \quad (16)$$

ここで $R \equiv (2M - I) K$ と定義した.

$$\begin{aligned} \partial R &= 2(\partial M) K = 2(2 K M K - M K - K M) K \\ &= (2M - I) K (2M - I) K - K^2 = R^2 - K^2. \end{aligned} \quad (17)$$

5-2 "Schroedinger eq.": $\partial^2 \psi = (u + K^2) \psi$ より

$$\text{左辺: } \partial^2 (M \phi) = \partial (R M \phi)$$

$$= (R^2 - K^2) M \phi + R^2 M \phi$$

$$\text{右辺: } (u + K^2) M \phi = 4 M \phi \phi^\top M K M \phi + K^2 M \phi.$$

$$\text{依って} \quad R^2 - K^2 = 2 M \phi \phi^\top K$$

$$\text{となるがこの左辺は} \quad = \partial R = 2(\partial M) K$$

$$\text{である. よって} \quad \partial M = M \phi \phi^\top M$$

$$\partial B = -\phi \phi^\top.$$

依って B の $i j$ 要素は

$$B_{ij} = -\phi_i \phi_j / (\kappa_i + \kappa_j).$$

これは Wadati and Sawada⁴⁾ の解である.

Part II Toda eq. のソリトン解

§ 2-1 相互作用戸田方程式と逆散乱法

戸田方程式は, $d \equiv \partial / \partial t$ として

$$d[dV / (1 + V(n))] = \Delta^2 V(n)$$

相互作用戸田 (Int Toda) 方程式は

$$d[dV_i / (1 + V(n))] = \Delta^2 V_i(n)$$

N-soliton 解は $V(n) = \sum_{i=1}^N V_i(n)$

これに対する逆散乱法の Flaschka eq. は

$$\begin{aligned} a(n-1)\phi_i(n-1) + b(n)\phi_i(n) \\ + a(n)\phi_i(n+1) = 2\lambda_i \phi_i(n) \end{aligned}$$

及び $2d\phi_i(n)$

$$= a(n-1)\phi_i(n-1) - a(n)\phi_i(n+1)$$

ここで

$$da(n) = a(n)[b(n) - b(n+1)]$$

$$db(n) = 2[a^2(n-1) - a^2(n)]$$

$$4a^2(n-1) = 1 + V(n)$$

$$a(n) = (1/2) \exp [-(Q_{n+1} - Q_n)/2]$$

ref⁵⁾ で解ったことは

$$V(n) = c_i a(n)\phi_i(n)\phi_i(n+1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

さて $\phi_i \rightarrow f_i, g_i$ の変換をする

$$f_i(n) \equiv \exp(Q_n/2)\phi_i(n)$$

$$g_i(n) \equiv \exp(-Q_n/2)\phi_i(n)$$

すると Flaschka eq. は量 $f_i(n)$ または $g_i(n)$ を使って

$$\begin{aligned} f_i(n-1) + 2b(n)f_i(n) \\ + [1 + V(n)]f_i(n+1) \\ = 2\lambda_i f_i(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2df_i(n) \\ = f_i(n-1) + 2b(n)f_i(n) \\ - [1 + V(n)]f_i(n+1) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} [1 + V(n)]g_i(n) \\ + 2b(n+1)g_i(n+1) + g_i(n+2) \\ = 2\lambda_i g_i(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2dg_i(n) \\ = [1 + V(n)]g_i(n) \\ - 2b(n+1)g_i(n+1) - g_i(n+2) \end{aligned}$$

そして

$$V_i(n) = (c_i/2)f_i(n)g_i(n+1)$$

となる. [K d V の時は $u_i \propto g_i^2$]

§ 2 - 2 modified 差分

Flashcka eq. は KdV での Schrodinger eq. に対応する。ここで2階の差分でなく1階の差分の式を考えたい。

modified 前進差分 を

$$\tilde{\Delta}^+ f_i(n)$$

$$\equiv -[1 + V(n)]f_i(n+1) + \lambda_i f_i(n)$$

modified 後退差分 を

$$\tilde{\Delta}^- f_i(n)$$

$$\equiv f_i(n-1) + 2b(n)f_i(n) - \lambda_i f_i(n)$$

と定義をすると

$$df_i(n) = \tilde{\Delta}^+ f_i(n) = \tilde{\Delta}^- f_i(n)$$

§ 2 - 3 Int Toda 方程式 と 線形方程式

KdV の時と同様に $V(n) \rightarrow 0$ の時の線形方程式を考え

$$d^2 V_i(n) = \Delta^2 V_i(n)$$

$$\text{または } (d^2 - \Delta^2)V_i(n) = 0$$

Flaschka eq. で $V(n)=0$ とすると

$$\begin{aligned}\phi_i(n-1) + \phi_i(n+1) &= 2\lambda_i \phi_i(n) \\ &= (z_i^{-1} + z_i) \phi_i(n)\end{aligned}$$

$$\phi_i(n+1) = z_i \phi_i(n) \text{ とすると}$$

$$\phi_i(n) = \exp(-\alpha_i n)$$

次に $\phi_i(n)$ の t -dependence を求める.

$$\begin{aligned}d\phi_i &= \frac{1}{2} [\phi_i(n-1) - \phi_i(n+1)] \\ &= (\sinh \alpha_i) \phi_i(n)\end{aligned}$$

$$\phi_i(t) = \exp(\sinh \alpha_i t) \equiv \exp(\beta_i t)$$

$$\text{よって } \phi_i(t, n) = \exp(\beta_i t - \alpha_i n + c_i)$$

§ 2-4 ソリトン解を求める

$$\underline{f}(n) \equiv Q(n) \underline{\phi}(n)$$

$$\underline{g}(n) \equiv P(n) \underline{\phi}(n)$$

$$\text{とすると } \tilde{\Delta}^- \underline{f}(n) = -Q(n+1) \underline{\phi}(n+1)$$

$$- 2Q(n+1) \underline{\phi}(n+1) \underline{\phi}(n+1)$$

$$\times P(n+1) \beta Q(n) \underline{\phi}(n)$$

$$+ \lambda Q(n) \underline{\phi}(n)$$

$$\Delta^- \underline{g}(n) = -P(n+2) \underline{\phi}(n+2)$$

$$\begin{aligned}
& -2P(n+1)\underline{\phi}(n+1)\underline{\phi}(n+1) \\
& \quad \times Q(n+1)\beta P(n+1)\underline{\phi}(n+1) \\
& \quad + \lambda P(n+1)\underline{\phi}(n+1)
\end{aligned}$$

$$\text{仮定: } P(n+1)\underline{\phi}(n)\underline{\phi}^T(n)P(n)$$

$$= P(n)\underline{\phi}(n)\underline{\phi}^T(n)P(n+1)$$

$$\rightarrow Q(n) = P(n+1)$$

$$\therefore \underline{f}(n) = P(n+1)\underline{\phi}(n)$$

$$\underline{g}(n) = P(n)\underline{\phi}(n)$$

$$\text{さて } \tilde{\Delta}^+ f_i(n) = \tilde{\Delta}^- f_i(n) \text{ から}$$

$$-P(n+2)ZP^{-1}(n+1)$$

$$-2P(n+1)\Phi(n+1)P(n+2)\beta + \lambda$$

$$= -\lambda + P(n)Z^{-1}P^{-1}(n+1)$$

$$+ 2P(n)\Phi(n)P(n+1)\beta$$

$$\text{よって } P(n)Z^{-1}P^{-1}(n+1)$$

$$= 2P(n)\beta + Z$$

$$- P(n+1)ZP^{-1}(n+1)$$

$$= 2P(n+2)\beta - Z^{-1}$$

$$\text{及び } P(n+2) - P(n+1)$$

$$= P(n+2) \underline{\phi}(n+1) \underline{\phi}^T(n+1) P(n+1)$$

とすると $P^{-1}(n) \equiv I + B(n)$

$$dB(n) = \beta B(n) + B(n) \beta$$

$$\rightarrow dB(n)$$

$$= \frac{1}{2} [\underline{\phi}(n) \underline{\phi}^T(n+1) + \underline{\phi}(n+1) \underline{\phi}^T(n)]$$

$$dB_{ij}(n) = \frac{1}{2} (z_i^{-1} + z_j^{-1}) \phi_i(n+1) \phi_j(n+1)$$

所が $\frac{1}{2} (z_i^{-1} + z_j^{-1}) / (\beta_i + \beta_j) = 1 / (1 - z_i z_j)$

であるから

$$B_{ij}(n) = \phi_i(n+1) \phi_j(n+1) / (1 - z_i z_j)$$

References

- 1) Yoneyama, T., Prog. Theor. Phys. 72, 1081 (1984).
- 2) Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., Commun. Pure Appl. Math. 27, 97 (1974).
- 3) Calogero, F, and Degasperis, A., "Spectral Transform and Solitons" (North Holland, Amsterdam) (1982).
- 4) Wadati, M. and Sawada, K., J. Phys. Soc. Jpn. 48, 312 (1980).
- 5) Yoneyama, T., J. Phys. Soc. Jpn. 55, 753 (1986).

以上