

Two-sided tilting complexes and pointings for Brauer tree algebras

東京理科大学 (Tokyo University of Science)

小境雄太 (Yuta Kozakai)

1 導入

k を代数的閉体とし, Γ 及び Λ を k 上の有限次元対称多元環とする. Γ と Λ がどれくらい似ているかということの 1 つの尺度として導来同値というものがある. Γ と Λ が導来同値とは, $D^b(\Gamma)$ と $D^b(\Lambda)$ が三角圏として同値なときをいう. Γ と Λ が導来同値であるための必要十分条件は, Γ 上の片側傾複体で, その自己準同型環が Λ と同型になるものが存在することであることが Rickard により [1] において示された. さらに, Γ - Λ -両側加群の両側傾複体が存在することも必要十分条件であることが Rickard により [3] において示された. この片側傾複体, 及び両側傾複体の定義は次で与えられる.

定義 1. [1] 有限次元対称多元環 Γ に対し, Γ -加群の有界な複体 T が片側傾複体とは, 次の条件が成り立つときをいう.

1. T の各項が有限生成射影 Γ -加群.
2. 0 でない任意の整数 n に対して $\mathrm{Hom}_{D^b(\Gamma)}(T, T[n]) = 0$.
3. T の有限直和の直和因子たちが三角圏として $K^b(\Gamma\text{-proj})$ を生成する.

定義 2. [3] 有限次元対称多元環 Γ, Λ に対して Γ - Λ -両側加群の有界な複体 C が両側傾複体であるとは, ある Λ - Γ -両側加群の有界な複体 D が存在し, 次の 2 条件を満たすときをいう.

1. Γ - Γ -両側加群の導来圏において $C \otimes_{\Lambda}^L D \cong \Gamma$.
2. Λ - Λ -両側加群の導来圏において $D \otimes_{\Gamma}^L C \cong \Lambda$.

Γ - Λ -両側加群の両側傾複体 C を Γ -加群の導来圏の対象と見なしたとき, Γ -加群の片側傾複体で, その自己同型環が Λ と同型となることが知られている.

一般に Γ -加群の片側傾複体でその自己準同型環が Λ となるものが与えられたとき, それが誘導する $D^b(\Gamma)$ と $D^b(\Lambda)$ の間の導来同値は抽象的で計算するのも非常に困難である. この片側傾複体に対し, Rickard は [3] において, Γ -加群の対象と見なしたとき, この片側傾複体と同型となるような両側傾複体が理論的に存在することを示した. さらに, この両側傾複体の導来テンソルにより $D^b(\Gamma)$ と $D^b(\Lambda)$ の間の導来同値が実現されることも示した.

本稿では, Brauer tree 多元環を例に, 与えられた片側傾複体に対して, 片側加群の複体と見なすと与えられた片側傾複体と同型となるような両側傾複体を, 各項が片側射影的な加群を用いて構成する. これらの両側

傾複体は各項が片側射影的であるので、導来テンソルを通常のテンソルで実現でき、導来同値の様子が具体的にわかる。

以下、 A により e 個の辺と重複度 μ をもつ Brauer tree に関する Brauer tree 多元環、 B により A と同じ e 個の辺と重複度 μ をもち、中心に例外頂点がある星形の Brauer tree に関する Brauer tree 多元環を表す。また、加群はすべて有限生成で断らない限り左加群とする。また、 k -多元環上の加群 U に対して、 U^* によって $\text{Hom}_k(U, k)$ を表し、省略のため k 上のテンソル積 $\otimes_k$ を単に $\otimes$ で表すことにする。また、 U の射影被覆 $\pi: P(U) \rightarrow U$ に対して、 ΩU によって $\text{Ker } \pi$ を表すことにし、帰納的に $\Omega^n U := \Omega(\Omega^{n-1} U)$ とおく。

2 Brauer tree 多元環上の片側傾複体

2.1 Rickard の結果

Brauer tree 多元環の導来同値に関して、Rickard により次のことが示された。

定理 3. [2] 辺の個数と重複度が同じ Brauer tree に関する Brauer tree 多元環たちは導来同値である。

Rickard はこの事実を A 上の片側傾複体 T で、その自己準同型環が B となるものを構成することで示した。この T の構成方法は以下の通りである：

1. Brauer tree のそれぞれの辺 i に対して、例外頂点からの最短の道から得られる辺の列を $i_0, i_1, \dots, i_r = i$ とする。
2. 得られた辺の列に対して、複体 $T(i)$ を

$$P(i_0) \rightarrow P(i_1) \rightarrow \dots \rightarrow P(i_r)$$

で定義する、ただし $P(i_0)$ は次数 0 でそれぞれの微分は 0 でないものとする。

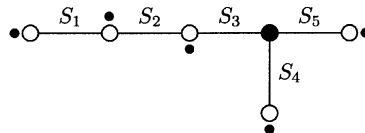
3. すべての辺に対して $T(i)$ を構成し、 $T := \bigoplus_i T(i)$ で定める。

2.2 Rickard-Schaps の結果

Rickard-Schaps は [4] において、Brauer tree 上の pointing を用いて、 A 上の片側傾複体で、その自己準同型環に B をもつものをいくつも構成した。その片側傾複体たちの中には Rickard により構成された片側傾複体 T も含まれていた。まず Brauer tree 上の pointing について説明する。

定義 4. Brauer tree 上の pointing とは、それぞれの非例外頂点に隣接するある辺とその辺と cyclic ordering で隣合う辺の間の選び方をいう。それぞれの非例外頂点に対して、選んだ辺と辺との間に point をつけてこれを明示する。これから得られる Brauer tree を pointed Brauer tree という。

例 5. 次のグラフは pointed Brauer tree である。



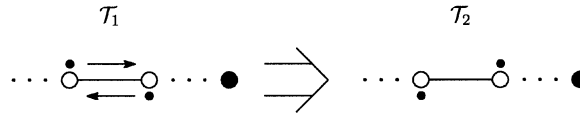
この pointed Brauer tree を用いて Rickard-Schaps は A -加群の片側傾複体で、自己準同型環 B をもつものを構成した。その構成法は以下の通りである。

- (1) 例外頂点に 0 を番号付ける。
- (2) 例外頂点からの Green's walk に沿って非例外頂点に、対応する point が到達した順番に番号を振る。
- (3) それぞれの辺に、辺の両端にある頂点のうち、例外頂点から遠いほうに振られている頂点の番号と同じ番号を振る。
- (4) それぞれの辺 r に対応する複体 T'_r を例外頂点の距離に関する帰納法で以下のように構成し、 $T' = \bigoplus T'_r$ とおく。
 - (a) 辺 r が例外頂点に隣接するとき、 $T_r = P_r$ とする、ただし P_r は次数 0 にあるとする。
 - (b) $n(1), \dots, n(r)$ を例外頂点から辺 r までの最短の道たちに振られた番号とする。適当な射影 A -加群 P, Q, R を用いて、 $T_{r-1} = (\dots \rightarrow P \rightarrow P_{r-1} \oplus R \rightarrow Q \rightarrow \dots)$ まで得られているとして、 T_r を次の 2 つの場合に分けて定義する。

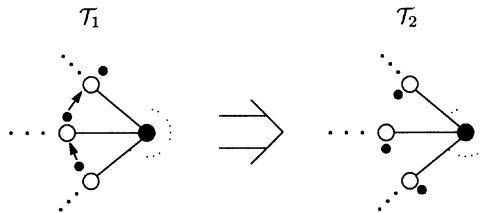
$$T_r = \begin{cases} (\dots \rightarrow P \oplus P_r \rightarrow P_{r-1} \oplus R \rightarrow Q \rightarrow \dots), & n(r-1) > n(r), \\ (\dots \rightarrow P \rightarrow P_{r-1} \oplus R \rightarrow Q \oplus P_r \rightarrow \dots), & n(r-1) < n(r). \end{cases}$$

注意 6. 手順 (b) において、 $n(j) < n(j+1)$ が常に成り立つならば、得られる片側傾複体は Rickard によって構成されたものと一致する。

与えられた pointed Brauer tree $\mathcal{T}_1$ の例外頂点と隣接しない辺 U に対して、その両端の頂点にある point を Green's walk の逆向きに沿って以下のように置換し、 $\mathcal{T}_2$ が得られるとする：



このとき、pointed Brauer tree $\mathcal{T}_2$ から得られる片側傾複体 T'_2 は、pointed Brauer tree $\mathcal{T}_1$ から得られる片側傾複体 T'_1 の $P(U)$ を -2 だけシフトしたものである。また、与えられた pointed Brauer tree $\mathcal{T}_1$ の例外頂点に隣接するすべての辺 $U_1, U_2, \dots, U_n$ に対して、それらの辺の非例外頂点にある point たちを Green's walk の逆向きに沿って以下のように置換し、 $\mathcal{T}_2$ が得られるとする：



このとき、pointed Brauer tree $\mathcal{T}_2$ から得られる片側傾複体 T'_2 は、pointed Brauer tree $\mathcal{T}_1$ から得られる片側傾複体 T'_1 の $\bigoplus P(U_i)$ を -2 だけシフトしたものである。このように、例外頂点と隣接しない辺 U に関する射影加群を -2 だけシフトする操作、および例外頂点と隣接するすべての辺 $U_1, U_2, \dots, U_n$ に関するすべての射影加群 $\bigoplus P(U_i)$ を -2 だけシフトする操作を folding という。この folding により得られる複体は、再び自己準同型環 B をもつ片側傾複体となる。

3 両側傾複体の構成

この節では、2 節により与えられた Brauer tree 多元環 A 上の片側傾複体たちに対応する A - B -両側加群の両側傾複体、すなわち、 A -加群の複体と見なすと、最初に与えられた片側傾複体と同型となるような A - B -両側加群の両側傾複体を構成していく。

3.1 Rickard の片側傾複体の両側化

1 節でも述べたように片側傾複体に対して、片側加群の複体と見なすとそれと同型となるような両側傾複体が理論的に存在する。従って、2.1 節の片側傾複体 T に対しても、 A -加群の複体と見なすと T と同型となるような両側傾複体が存在するはずである。本稿の 1 つ目の結果として、 A - B -両側加群の両側傾複体 C で、 A -加群の複体と見なすと 2.1 節の片側傾複体 T と同型となるようなものを各項が片側射影的である具体的な加群を用いて構成した。

定理 1 (Kozakai-Kunugi). A を Brauer tree 多元環、 B を A と導来同値な星形の Brauer tree に関する Brauer tree 多元環とする。 T を Rickard に与えられた自己準同型環として B をもつ片側傾複体とする。このとき、 T により誘導される A と B の森田型安定同値を与える直既約 A - B -両側加群 M に対して、 M の A - B -両側加群としての極小射影分解の各項から適当に直和因子を取り除くことで、 A -加群の複体と見なしたとき T と同型となる A - B -両側加群の両側傾複体 C を構成することができる。

以下、定理 1 の両側傾複体の構成法について説明する。まず、対称多元環について次のことが知られている。

命題 7. 対称多元環 Γ, Λ が導来同値ならば、森田型安定同値である。

この命題と、片側傾複体 T の存在性によって A と B は森田型安定同値であることがわかる。従って、 T から誘導される安定同値をテンソルで与える A - B -両側加群 M が存在する。この M について、 S を A の Brauer tree において例外頂点から 1 番遠い辺に対応する単純 A -加群とすると、 $M^* \otimes_A S$ は単純 B -加群となるので、 $V := M^* \otimes_A S$ とおく (このとき、 $M \otimes_B V \cong S$ を得る)。まず、 M の A - B -両側加群としての極小射影分解を求める。そこで次の補題を用いる。

補題 8. [5] Γ, Λ を有限次元対称多元環、 N を片側射影的な Γ - Λ -両側加群とする。このとき、 N の Γ - Λ -両側加群としての射影被覆は次で与えられる。

$$\bigoplus_W P(N \otimes_{\Lambda} W) \otimes P(W^*)$$

ただし、 W は単純 Λ -加群の同型類の完全代表系全てを動く。

いま、任意の整数 n に対し、 $\Omega^n M$ は片側射影的であるので、 $\Omega^n M$ にも補題 8 を適用できる。また、 B は対称中山多元環であるので単純 B -加群 V に対して、 $\{\Omega^{2i} V | 0 \leq i \leq e-1\}$ が単純 B -加群全体である。従っ

て、 $\Omega^n M$ の射影被覆 $P(\Omega^n M)$ を以下のように求めることができる：

$$\begin{aligned}
 P(\Omega^n M) &= \bigoplus_{i=0}^{e-1} P(\Omega^n M \otimes_B \Omega^{2i} V) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &= \bigoplus_{i=0}^{e-1} P(\Omega^{n+2i}(M \otimes_B V)) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &= \bigoplus_{i=0}^{e-1} P(\Omega^{n+2i} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*)
 \end{aligned}$$

これを用いて M の極小射影分解

$$\cdots \rightarrow P(\Omega^n M) \rightarrow \cdots \rightarrow P(\Omega M) \rightarrow P(M) \rightarrow M \rightarrow 0$$

は次のように表示できる。

$$\begin{aligned}
 &\cdots \xrightarrow{\pi_{n+2}} \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i+n} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &\xrightarrow{\pi_{n+1}} \cdots \\
 &\xrightarrow{\pi_3} \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i+1} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &\xrightarrow{\pi_2} \bigoplus_{0 \leq i \leq e-1} P(\Omega^{2i} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &\xrightarrow{\pi_1} M
 \end{aligned}$$

これを用いて両側傾複体 C を構成していく。Brauer tree のそれぞれの辺 U に対し、自然数 $d(U)$ を、例外頂点から U に対応する辺の遠い方への頂点への最短のルートに用いる辺の個数とする。例えば例外頂点に隣接する辺の距離は 1 である。また、 $d(U)$ の最大値、すなわち $d(S)$ を m とおく。

補題 9. M の極小射影分解と $1 \leq n \leq m-2$ に対して次の包含関係が成り立つ。

$$\pi_{n+1} \left(\bigoplus_{d(\text{top} \Omega^{2i+n} S) \leq m-n-1} P(\Omega^{2i+n} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \right) \subset \bigoplus_{d(\text{top} \Omega^{2i+n-1} S) \leq m-n} P(\Omega^{2i+n-1} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*)$$

この補題により、先ほどの極小射影分解のそれぞれの項から以下のように直和因子を取り除き、全射準同型 π_n をその直和因子に制限することで次の両側複体 C を得る。

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow \bigoplus_{d(\text{top} \Omega^{2i+m-1} S) \leq 1} P(\Omega^{2i+m-1} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &\xrightarrow{\pi_m} \cdots \\
 &\xrightarrow{\pi_3} \bigoplus_{d(\text{top} \Omega^{2i+1} S) \leq m-2} P(\Omega^{2i+1} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &\xrightarrow{\pi_2} \bigoplus_{d(\text{top} \Omega^{2i} S) \leq m-1} P(\Omega^{2i} S) \otimes P(\Omega^{2i} V^*) \\
 &\xrightarrow{\pi_1} M \\
 &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

この C について次のことが成り立つ。

命題 10. 両側複体 C は A - B -両側加群の両側傾複体で、 A -加群の複体とみなしたとき、 A の導来圏で Rickard [2] により A 上の片側傾複体と一致する。

3.2 Rickard-Schaps の片側傾複体の両側化

定理 1 により T に対応する両側傾複体 C が具体的な加群を用いて構成された。一方で、2.2 節で T に folding を施すことで新たな A -加群の片側傾複体 T' で自己準同型環 B をもつものが得られた。本稿の 2 つ目の結果として、 T の folding に対応する操作を C で実現した、すなわち、次の図を可換にするような操作 (two-sided folding) を与えた。

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\text{folding}} & T' \\
 \downarrow \text{両側化} & & \downarrow \text{両側化} \\
 C & \xrightarrow{\text{two-sided folding}} & C'
 \end{array}$$

定理 2 (Kozakai). T' をある pointed Brauer tree から得られる A -加群の片側傾複体で自己準同型環 B をもつものとし、 T' に対応する A - B -両側加群の両側傾複体 C' が得られているとする。このとき、例外頂点に隣接しない辺に対応する単純 A -加群 U に対して、 T' から $P(U)$ を folding して得られる片側傾複体に対応する両側傾複体が[§]、 C' の 1 番左の項の $P(U) \otimes X$ という形の直和因子と次に左の項の $P(U) \otimes X'$ という形の直和因子を取り除くことで得られる。また、例外頂点に隣接する辺に対応するすべての単純 A -加群 $U_1, \dots, U_n$ に対して、 T' から $\bigoplus_{i=1}^n P(U_i)$ を folding して得られる片側傾複体に対応する両側傾複体が[§]、 C' の 1 番左の項の $\bigoplus_{i=1}^n P(U_i) \otimes X_i$ という形の直和因子と次に左の項の $\bigoplus_{i=1}^n P(U_i) \otimes X'_i$ という形の直和因子を取り除くことで得られる。

注意 11. 両側傾複体 $C = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow P_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ は、 A - B -両側加群の導来圏において次の複体と同型である：

$$C = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow P_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi} P(\Omega^{-1}M) \rightarrow P(\Omega^{-2}M) \rightarrow \dots \rightarrow P(\Omega^{-l}M) \rightarrow \Omega^{-l}M \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$$

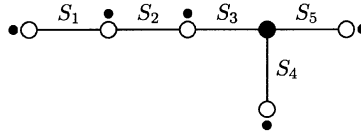
ただし $\varphi: P_1 \rightarrow P(\Omega^{-1}M)$ は、元々の微分 $P_1 \rightarrow M$ と埋め込み $M \rightarrow P(\Omega^{-1}M)$ の合成で、

$$P(\Omega^{-1}M) \rightarrow P(\Omega^{-2}M) \rightarrow \dots \rightarrow P(\Omega^{-l}M) \rightarrow \Omega^{-l}M \rightarrow 0$$

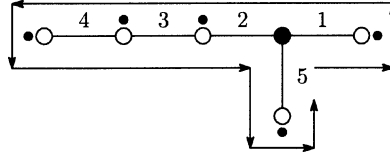
は $\Omega^{-l}M$ の極小射影分解を $P(\Omega^{-1}M)$ で切り取ったものである。この同型を利用することで、定理 2 の操作は何回も繰り返すことができる。従って、任意の Rickard-Schaps の片側傾複体に対応する両側傾複体を得たことになる。

4 例

例 12. 次の pointed Brauer tree から得られる Rickard-Schaps の片側傾複体を求める。



Green's walk からそれぞれの辺に 1 から 5 の番号をふる.

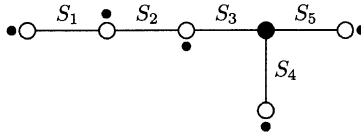


この番号付けから次の片側傾複体を得る.

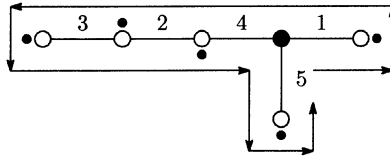
$$\begin{array}{c}
 P(S_3) \rightarrow P(S_2) \rightarrow P(S_1) \\
 \oplus \\
 P(S_3) \rightarrow P(S_2) \\
 \oplus \\
 P(S_3) \\
 \oplus \\
 P(S_4) \\
 \oplus \\
 P(S_5)
 \end{array}$$

これは Rickard が構成した片側傾複体と一致している.

例 13. 次の pointed Brauer tree から得られる Rickard-Schaps の片側傾複体を求める.



例 12 と同様に, それぞれの辺に 1 から 5 の番号をふる.

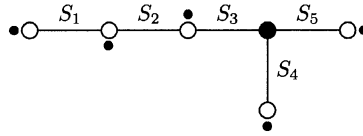


この番号付けから次の片側傾複体を得る.

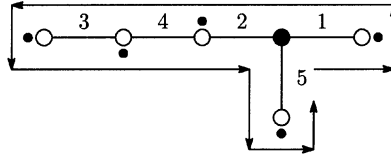
$$\begin{array}{ccc}
P(S_2) & \rightarrow & P(S_1) \oplus P(S_3) \\
& \oplus & \\
P(S_2) & \rightarrow & P(S_3) \\
& \oplus & \\
& & P(S_3) \\
& \oplus & \\
& & P(S_4) \\
& \oplus & \\
& & P(S_5)
\end{array}$$

これは例 12 の片側傾複体において、例外頂点に隣接する辺に対応する単純加群に関する射影加群すべてを folding して得られるものである。

例 14. 次の pointed Brauer tree から得られる Rickard-Schaps の片側傾複体を求める。



例 12 と同様に、それぞれの辺に 1 から 5 の番号をふる。



この番号付けから次の片側傾複体を得る。

$$\begin{array}{ccc}
P(S_1) \oplus P(S_3) & \rightarrow & P(S_2) \\
& \oplus & \\
P(S_3) & \rightarrow & P(S_2) \\
& \oplus & \\
P(S_3) & & \\
& \oplus & \\
P(S_4) & & \\
& \oplus & \\
P(S_5) & &
\end{array}$$

これは例 13 の片側傾複体において、辺 S_2 に対応する単純加群に関する射影加群 $P(S_2)$ を folding して得られるものである。

次にこれらの例の A -加群の片側傾複体に対応する A - B -両側加群の両側傾複体を求める。

例 15. 例 12 の片側傾複体は Rickard の片側傾複体と一致しているので、定理 1 の構成法を用いて対応する A - B -両側加群の両側傾複体を得る、ただし、単純 B -加群 V_i は、 $M^* \otimes_B V_i / \text{rad}(M^* \otimes_B V_i) \cong S_i$ となるように番号付けをしている。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P(S_2) \otimes P(V_2)^* & & \\
 & & \oplus & & \\
 P(S_4) \otimes P(V_3)^* & \rightarrow & P(S_3) \otimes P(V_3)^* & \rightarrow & {}_A M_B \\
 \oplus & & \oplus & & \\
 P(S_5) \otimes P(V_4)^* & & P(S_4) \otimes P(V_4)^* & & \\
 \oplus & & \oplus & & \\
 P(S_3) \otimes P(V_5)^* & & P(S_5) \otimes P(V_5)^* & &
 \end{array}$$

例 16. 例 13 の片側傾複体は Rickard の片側傾複体に対し、例外頂点に隣接する単純加群に関する射影加群 $P(S_3), P(S_4), P(S_5)$ を folding して得られる Rickard-Schaps の片側傾複体であるので、定理 2 の操作を例 15 で得られた両側傾複体に施して、対応する A - B -両側加群の両側傾複体を得る。

$$P(S_2) \otimes P(V_2)^* \rightarrow {}_A M_B$$

この両側傾複体は Rouquier により [5] で構成されたものと一致している。また、この両側傾複体は次の複体と同型である、ただし真ん中の項は M の移入包絡である。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P(S_1) \otimes P(V_1)^* & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(S_3) \otimes P(V_2)^* & & \\
 & & \oplus & & \\
 P(S_2) \otimes P(V_2)^* & \rightarrow & P(S_2) \otimes P(V_3)^* & \rightarrow & {}_A \Omega^{-1} M_B \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(S_4) \otimes P(V_4)^* & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(S_5) \otimes P(V_5)^* & &
 \end{array}$$

例 17. 例 14 の片側傾複体は例 13 の片側傾複体に対し、単純加群 S_2 に関する射影加群 $P(S_2)$ を folding して得られる Rickard-Schaps の片側傾複体であるので、定理 2 の操作を例 16 で得られた両側傾複体に施して、対応する A - B -両側加群の両側傾複体を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P(S_1) \otimes P(V_1)^* & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(S_3) \otimes P(V_2)^* & \rightarrow & {}_A \Omega^{-1} M_B \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(S_4) \otimes P(V_4)^* & & \\
 & & \oplus & & \\
 & & P(S_5) \otimes P(V_5)^* & &
 \end{array}$$

参考文献

- [1] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.
- [2] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 303–317.
- [3] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), no. 1, 37–48.
- [4] J. Rickard, M. Schaps *Folded Tilting Complexes for Brauer Tree Algebras*, Advances in Mathematics **171** (2002), 169–182.
- [5] R. Rouquier, *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*, Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, 512–523, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **212**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.