

## 3次元内部波ビームと誘起される平均流

神戸大学 (Kobe University) 片岡 武 (Takeshi Kataoka)  
Massachusetts Institute of Technology Triantaphyllos R. Akylas

### 要旨

3次元的な空間依存性をもつ内部波ビームの時間発展を記述する簡単な方程式系を導出した。計算例を過去の実験結果と比較しながら、3次元性がもたらす特徴(平均流が誘起されることなど)について報告する。

### 1. 緒言

図1は、当研究室において実験的に内部波ビームの発生を捉えたシャドウグラフ写真である。一様な密度成層流体中に円柱を水平に配置し(図中の黒い縦棒の先に、軸が奥行き方向の円柱がある)、図の横方向にゆっくりと振動させたときの写真であり、ビーム状の波が四方に伝わっていることが分かる。ビームは図の奥行き方向への依存性はないから、ビームの伝播を記述するには、伝播方向とビームを横切る方向の2方向からなる空間2次元的な運動を考えればよい。

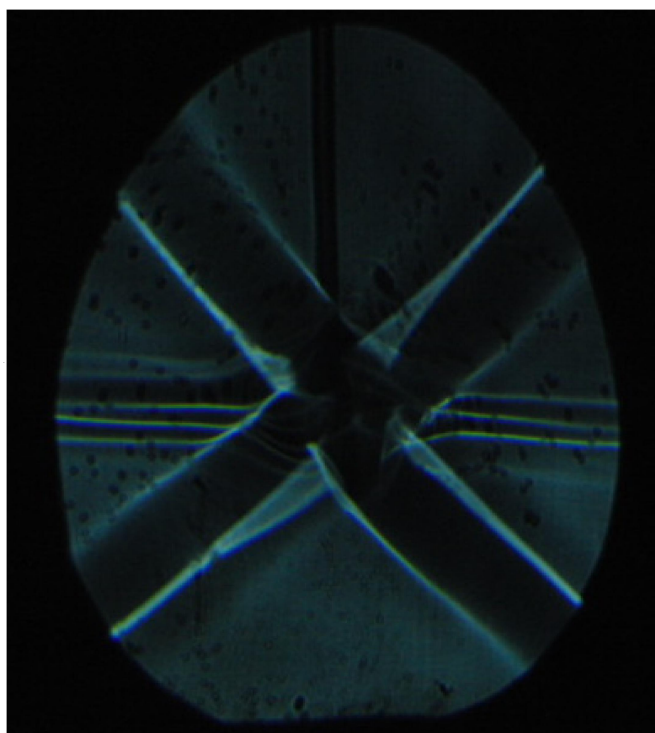


図1 波源より四方に真っ直ぐ伝わる内部波ビームのシャドウグラフ写真

そのため内部波ビームに関連した研究の多くは、空間2次元的な運動を仮定している[1,2]。最近になってようやく、空間3次元的な変動（図1の奥行き方向への依存性）を伴う研究が行われた[3-5]。それによると、振幅が大きいとき3次元的に不安定な性質を持つ[3]ことや、3次元的な変動によってビームから遠い位置にまで届く平均流が発生する[3-5]ことなど、新たな特徴が次々と明らかにされている。実際の流体现象は、依存性の大小はともかく3次元的事実であることから、このような空間3次元的なビームの性質を系統的に調べておくことが重要であると考えられる。

本報では、図1のような内部波ビームの発生する系において、外力（図1では円柱の振動に相当）が奥行き方向にも緩やかな依存性をもつ場合を考える。このとき、発生する内部波ビームも奥行き方向に依存性をもつこととなる。そのような弱3次元的な運動を記述できる単純な時間発展方程式を導くことが目的である。

## 2. 問題設定と基礎方程式

一様に密度成層をした非粘性ブジネスク流体中においては、内部波ビームが任意の流速断面形状で存在しうる。しかも、通常の単色波と同様の線形分散関係式を満たす[6]。

$$\omega = N \sin \theta. \quad (1)$$

ただし、 $N = \sqrt{-(g/\bar{\rho})(d\bar{\rho}/dy)}$  ( $g$ : 重力加速度,  $\bar{\rho}$ : 初期密度,  $y$ : 鉛直座標) は流体の浮力振動数である。つまりビームの角振動数は、その伝播方向と水平方向とのなす角度  $\theta$  により決まるのである。

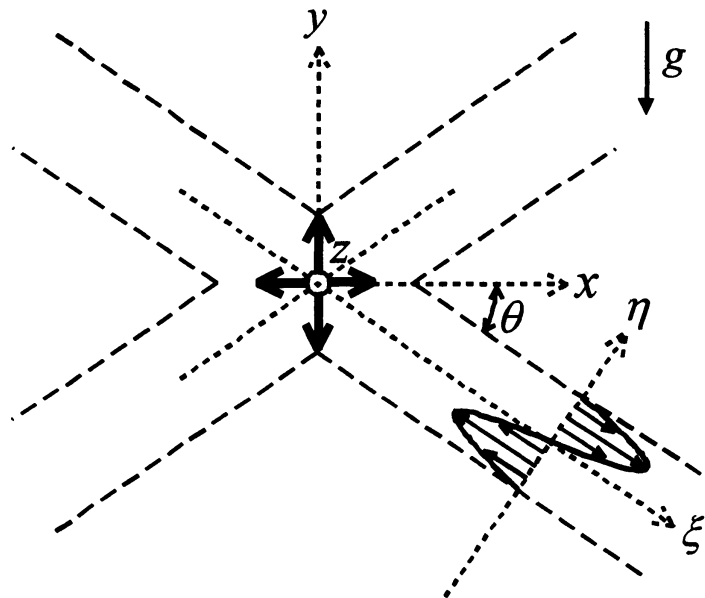


図2  $x=y=0$ の線上において、 $\omega = \sin \theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ )の角振動数の外力を加えたときに発生する内部波ビームの概略図。本解析では、ビームに沿う  $\xi$  方向および奥行水平  $z$  方向への変化は、ビームを横切る  $\eta$  方向の変化に比べて小さいと仮定している。

ここでは、四方へ伝わる4本のビームのうち、第4象限へ伝わるビームを取り上げて解析する。他のビームについても解析の要領は同様である。また全ての変数は、時間 $1/N$ と外力の代表長さ $L$ を用いて無次元化する。図2のように $\xi$ がビームの伝播方向、 $\eta$ がビームを横切る方向、 $z$ が水平奥行き方向となるような空間座標系を導入し、奥行き $z$ 方向に緩やかな依存性をもつ次の $(\xi, \eta)$ 方向外力 $(F, H)$ を考える。

$$F = \varepsilon^{1/2} \left\{ \hat{F}(\xi, \eta, Z) e^{-i \sin \theta t} + \text{c.c.} \right\}, \quad (2a)$$

$$H = \varepsilon^{1/2} \left\{ \hat{H}(\xi, \eta, Z) e^{-i \sin \theta t} + \text{c.c.} \right\}. \quad (2b)$$

ただし $\varepsilon (\ll 1)$ は小さな定数、c.c.は複素共役であり、

$$Z = \varepsilon z \quad (3)$$

はスケーリングされた奥行き方向座標を表す。また、 $\hat{F}$ と $\hat{H}$ はいずれも $\xi$ と $\eta$ に関して局所的な関数である。

基礎方程式は、以下のNS方程式系である。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4a)$$

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -u \sin \theta + v \cos \theta, \quad (4b)$$

$$u_t + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -p_\xi + \rho \sin \theta + \mu \nabla^2 u + F, \quad (4c)$$

$$v_t + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -p_\eta - \rho \cos \theta + \mu \nabla^2 v + H, \quad (4d)$$

$$w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w = -p_z + \mu \nabla^2 w. \quad (4e)$$

ここに、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は流速の $(\xi, \eta, z)$ 方向成分、 $\rho$ は密度の初期値からのずれ、 $p$ は圧力のずれ、 $\mu = \nu^* / NL^2$ はレイノルズ数の逆数 ( $\nu^*$ は動粘性係数)、下添え字はその変数による偏微分を表す。

### 3. 時間発展方程式の導出

(4)における各項のつりあいより、適切なスケーリングは次のようになることが分かる(詳細は文献[3]参照)。

$$X = \varepsilon^2 \xi, \quad T = \varepsilon^2 t, \quad \mu = \varepsilon^2 \beta. \quad (5)$$

ただし $\beta$ は $O(1)$ の定数。これに伴い、外力(2)は

$$F \rightarrow 2\varepsilon^{5/2} \delta(X) \left\{ f(\eta, Z) e^{-i \sin \theta t} + \text{c.c.} \right\}, \quad (6a)$$

$$H \rightarrow 2\varepsilon^{5/2} \delta(X) \left\{ h(\eta, Z) e^{-i \sin \theta t} + \text{c.c.} \right\}, \quad (6b)$$

と表すことができる。(3)(5)(6)を(4)に代入して解くと、 $\varepsilon$ に関する最低次の解は次のようになる ( $u, v, w$ のみを記す)。

$$\begin{cases} u = \varepsilon^{1/2} U(X, \eta, Z, T) e^{-i \sin \theta t} + \text{c.c.} \\ v = \varepsilon^2 \bar{V}(X, Z, T) \\ w = \varepsilon^{3/2} \cot \theta \int^\eta U_Z d\eta' e^{-i \sin \theta t} + \text{c.c.} \end{cases} \quad (7)$$

ここに  $U$  と  $\bar{V}$  は未定関数であり、それぞれビームおよび平均流の流速を表す。 $\varepsilon$  に関するさらに高次の解析に進むことでその支配方程式系が決まる。これが本報の主要な結果である。結果のみを記すと（詳細は文献[7]参照）,

$$U_T + \bar{V} U_\eta + i \cos \theta \left( \int^\eta U_X d\eta' + \frac{\cot \theta}{2} \int^\eta \int^{\eta'} U_{ZZ} d\eta'' d\eta' \right) - \frac{\beta}{2} U_{\eta\eta} = f \delta(X), \quad (8a)$$

$$\bar{V}_T = i \frac{\partial}{\partial Z} \hbar \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (U^* U_\eta)_T + \beta U_\eta^* U_{\eta\eta} \right\} d\eta \right]. \quad (8b)$$

ただしアスタリスクは複素共役、 $\hbar$  は Hilbert 変換

$$\hbar[q] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(Z')}{Z' - Z} dZ',$$

を表し、 $P$  はコーシーの主値をとることを意味する。

結局、(8) が求める時間発展方程式であり、この2式を解くことにより  $U$  と  $\bar{V}$  の時間発展が得られる。(8a)の左辺第二項は非線形項であり、ビームの3次元運動に伴い生成される平均流  $\bar{V}$  が、ビーム自身の運動に有意の影響を及ぼすことを示す。(8b)より明らかのように、この非線形項は奥行  $z$  方向への依存性がない2次元問題では現れない。また(8b)の式の形より、右辺に現れる粘性項（ $\beta$ を含む項）が平均流生成において重要な役割を果たしていることが分かる[7]。つまりビームの準定常状態においては、この粘性項が時間  $T$  とともに線形的に増加する平均流を生み出すのである。

#### 4. Bordes et al. (2012) による実験との比較

(8)から得られる結果と、Bordes et al.[4]による実験との比較を行う。彼らが用いた造波装置は、波長  $\lambda = 3.8\text{cm}$  の正弦関数形をしており、高さ  $3\lambda$ 、奥行き幅  $3.7\lambda$  の大きさである。鉛直方向と奥行き方向の長さスケール比が0.8であることから、(8)式を導く際に(3)で用いた奥行き方向の依存性が緩やかである、という仮定は厳密には成り立たない。それにも関わらず、実験で観測された本質的な特徴を(8)式が記述できることを以下に示す。

波長  $\lambda$  を代表長さ  $L$  にとると、造波装置の無次元高さは3であり、奥行き幅が  $Z$  に関して1となるように  $\varepsilon$  を選ぶと、 $\varepsilon = 0.27$  となる。(6a)で定義される外力関数  $f$  は

$$f(\eta, Z) = \begin{cases} A_0 e^{2\pi i \eta} & (-1.5 < \eta < 1.5, -0.5 < Z < 0.5) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

と表される。ただし  $A_0$  は、生成されるビームの最大流速が実験観測値である  $1\text{mm/s}$  とな

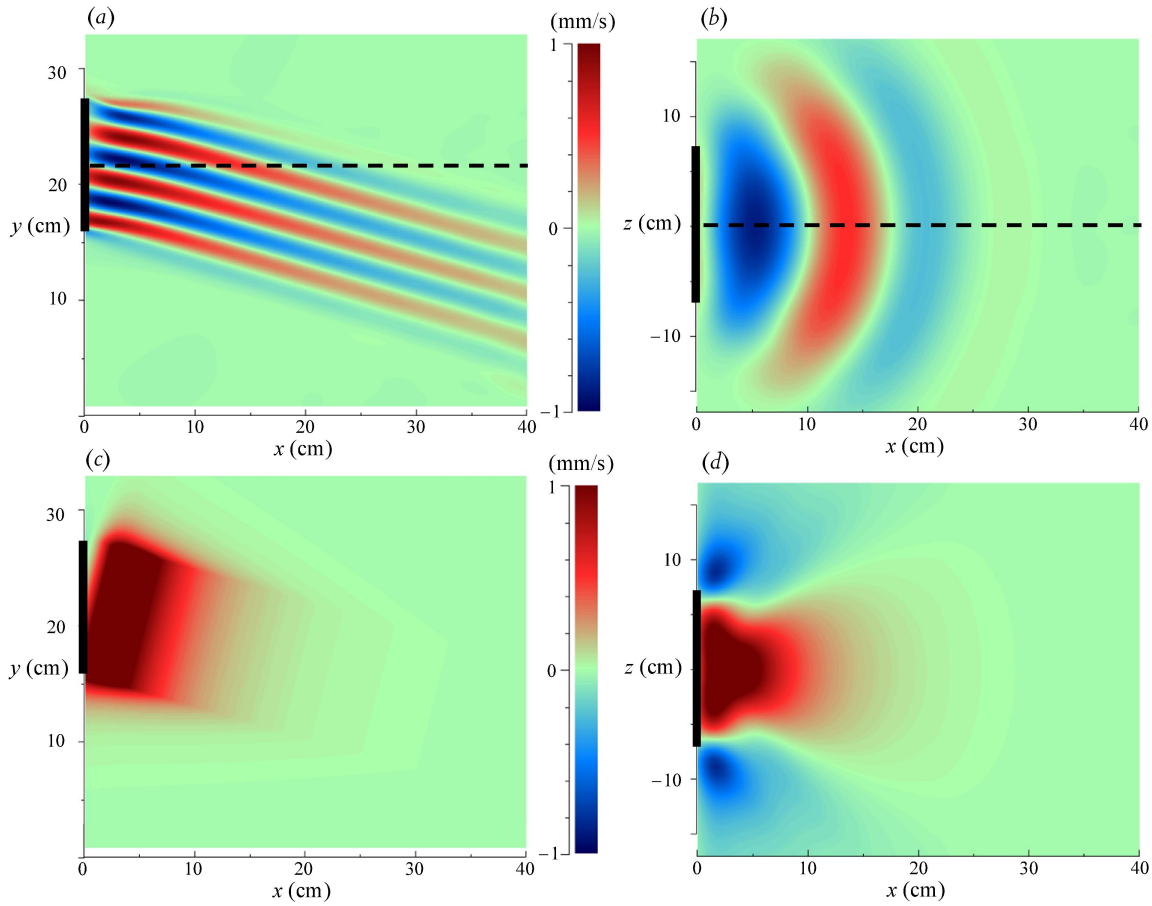


図3 (8)の数値計算により得られた $T=6$ （有次元では $t=96s$ ）における内部波ビーム(a, b)および平均流の $x$ 方向流速分布。Bordes et al.[4]の図2と対比されたい。造波装置の位置は黒で示した。(a, c): 造波装置の中心( $z=0$ )を通る鉛直断面図。(b, d): 造波装置の中心高さ( $y=21.6\text{cm}$ )を通る水平断面図。

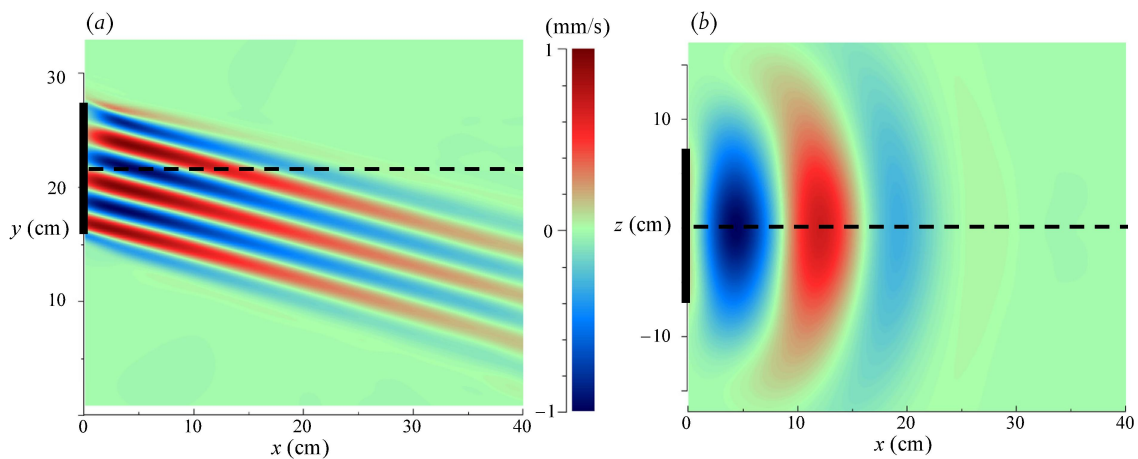


図4 (8a)の平均流を0 ( $\bar{V}=0$ ) としたときの計算結果。図3(a, b)と対比されたい。

るように  $A_0 = 0.005$  とした。また実験の浮力振動数は  $N = 0.85 \text{ rad/s}$  であり、動粘性係数  $\nu^* = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$  に対して粘性パラメータは  $\beta = 0.011$  となる。ここでは造波角振動数が  $\sin \theta = 0.26$  の結果について報告する。

式(8)を静止状態  $U = \bar{V} = 0$  から数値的に解いた。数値計算法は偽スペクトル法を用い、時間発展には4次のルンゲクッタ法を採用した。外力(9)を適用するに当たっては、 $f$  を

$$A_0 e^{2\pi i \eta} \{ \tanh[5(Z + 0.5)] - \tanh[5(Z - 0.5)] \} / 2 \quad \text{for } -1.5 < \eta < 1.5, -\infty < Z < \infty,$$

に置き換え、デルタ関数  $\delta(X)$  を  $\delta(X) \cong (30/\sqrt{\pi}) \exp[-(30X)^2]$  と近似した。計算は、有限の計算領域 ( $-1.5 < X < 1.5$ ,  $-6 < \eta < 6$ ,  $-3 < Z < 3$ ) において  $256 \times 128 \times 128$  のフーリエモードを用いて行い、十分な精度のあることを確認している。時間ステップは  $\Delta T = 8 \times 10^{-5}$  である。

図3は、造波開始から96秒に相当する時間におけるビーム( $a, b$ )および平均流( $c, d$ )の $x$ 方向流速分布を示した側面図( $a, c$ )と平面図( $b, d$ )である。時間発展方程式(8)から得られる結果は、実験結果(文献[4]の図2  $a-d$ )と定性的によく一致していることが分かる。例えば、造波装置の奥行き方向中心で切った垂直側面図(図3  $c$ )には、強い噴流のような平均流が造波装置近傍のビーム内部に現れている。また造波装置の中心高さ  $y = 21.6 \text{ cm}$  で切った水平平面図(図3  $d$ )には、平均流による循環流がビームの外側にまで及んでいることが見てとれる。奥行き方向の依存性が必ずしも緩やかでないこの状況下において、よい一致が見られると言ってよいであろう。

ビームの運動についても、造波装置から遠くへ伝わるほど粘性により減衰している様子(図3  $a$ )だけでなく、図3  $b$ )では、ビームの形状がいずれも奥行き方向に大きく曲がっている様子が分かる。これは内部波ビームの奥行方向への分散性と、平均循環流による移流の効果である。

平均流による移流効果をより明確に示すため、平均流  $\bar{V}$  を0として(8a)を計算した結果を図4に示した。平均流の影響がない場合、ビームの曲がりとは全体的に小さくなっていることが分かる。とくに中心付近( $z = 0$ )の曲がりとはほとんど消えている。Bordes et al.[4]の実験結果(彼らの図2  $b$ )ではこれらの曲がりが見れていることから、平均流を考慮した計算結果の方が実験結果により近いことが分かる。

## 5. 結言

内部波ビームの空間3次元的な伝播を記述する時間発展方程式(8)を導出した。3次元的な依存性がある場合、2次元の場合とは異なり平均流が生成される。ビームの振幅が小さいとき、このビームと平均流の相互作用は単に(8)の2式により記述され、その計算結果が過去の実験結果とよく一致することを確認した。

## 参考文献

- [1] Tabaei, A. & Akylas, T. R. 2003 Nonlinear internal wave beams. *J. Fluid Mech.* **482**, 141-161.
- [2] Lamb, K. G. 2004 Nonlinear interaction among internal wave beams generated by tidal flow over

- supercritical topography. *Geophys. Res. Lett.* **31**, L09313.
- [3] Kataoka, T. & Akylas, T. R. 2013 Stability of internal gravity wave beams to three-dimensional modulations. *J. Fluid Mech.* **736**, 67-90.
- [4] Bordes, G., Venaille, A., Joubaud, S. Odier, P. & Dauxois, P. 2012 Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves. *Phys. Fluids* **24** 086602.
- [5] King, B., Zhang, H. P. & Swinney, H. L., 2009 Tidal flow over three-dimensional topography in a stratified fluid. *Phys. Fluids* **21** 116601.
- [6] Lighthill, M. J. 1978 *Waves in Fluids*. Cambridge University Press.
- [7] Kataoka, T. & Akylas, T. R. 2015 On three-dimensional internal gravity wave beams and induced large-scale mean flows. *J. Fluid Mech.* to appear.