

# 一般 Airy 関数に付随した有理的ドラム コホモロジー

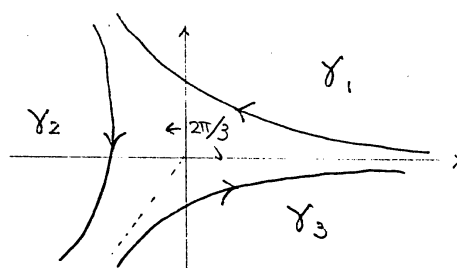
木村 弘信 熊本大学理学部

## 1 はじめに

前の講演で述べたように, ガウスの超幾何関数の退化したものの一つとして, 次の積分で与えられる Airy 関数がある:

$$A(x) = \int_{\gamma} e^{xu-u^3/3} du$$

ここで, 積分路は



で与えられる  $\gamma_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) のうちのいずれかである.  $A(x)$  は次の微分方程式を満たしている:

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} - xA(x) = 0 \quad (1)$$

これを Airy の方程式という. この事実は

$$\frac{d}{du} e^{xu-u^3/3} = (x-u^2)e^{xu-u^3/3}$$

の両辺を  $\gamma$  上で積分して, Laplace 変換の下で  $u \times$  が  $-d/dx$  に対応していることから分かる. 当たり前のことであるが, (1) は

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と同値である. このように Airy 関数を規定する一階連立微分方程式系を書くということを, 多重積分で定義される 一般 Airy 関数 (第2節参照) に拡張したり, Aomoto-Gel'fand の超幾何関数にたいして展開されている Intersection Theory を構成するための one step として, 一般 Airy 関数に付随した de Rham cohomology を調べる.

## 2 一般 Airy 関数

古典的な Airy 関数は一重積分で表されているが, ここでは [GRS] において導入された, 多重積分による Airy 関数を考える. その定義を復習しておく.  $Z \subset M(r+1, n+1)$  を

$$Z := \left\{ z = (z_0, \dots, z_n) \in M(r+1, n+1); \begin{array}{l} z_0 = {}^t(1, 0, \dots, 0), \\ \det(z_0, \dots, z_r) \neq 0 \end{array} \right\}$$

で定義する. ここで  $z_0$  を上のように normalize する事は本質的ではないことを注意しておく.  $GL(n)$  の可換部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ & & & h_0 \end{pmatrix} \right\}$$

を考える. この群は Jordan 群と呼ばれる.  $H$  の普遍被覆群  $\tilde{H}$  の指標を記述するために,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  の多項式  $\theta_m(x)$  を, generating function を用いて

$$\log(1 + x_1 T + x_2 T^2 + \dots + x_n T^n) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(x) T^m$$

によって定義する.  $x_i$  の weight を  $i$  とすると  $\theta_m(x)$  は total weight が  $m$  の weighted homogeneous polynomial である. このとき

**命題 1** 群  $\tilde{H}$  の指標  $\chi$  は

$$\chi(h; \alpha) = h_0^{\alpha_0} \exp \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \theta_i(h_1/h_0, \dots, h_n/h_0) \right)$$

で与えられる. ここで,  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  である.

一般 Airy 関数は, 次の積分で与えられる.

$$A(z; \alpha) = \int_{\Delta} \chi(tz; \alpha) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r$$

ここで

$$t = (1, t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{C}^r$$

で,  $\Delta$  は  $r$  次元の chain で,  $|t| \rightarrow \infty$  のとき, 被積分関数が指数関数的に 0 に近づくようなものをとる.  $Z$  の定義より  $tz_0 = 1$  であるので

$$F(t, z) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \theta_i(tz_1, \dots, tz_n) \in \mathbb{C}[t, z]$$

とおくと, 被積分関数は

$$\chi(tz; \alpha) = \exp F(t, z)$$

とかけることに注意する.

### 3 有理的 de Rham cohomology

次の記号を用いる

- $T := \mathbb{C}^r$ ;  $t$ -space,
- $M = T \times Z$ ,
- $S(Z) := \mathbb{C}[z][\det(z')^{-1}]$ ; the ring of regular functions on  $Z$ ,
- $\Omega_T^p := \{ \text{polynomial } p\text{-forms in } t \}$ ,
- $\Omega_{M/Z}^p := \Omega_T^p \otimes_{\mathbb{C}} S(Z)$ .

$F$  は上に定義した多項式として,  $\nabla_F: \Omega_{M/Z}^p \rightarrow \Omega_{M/Z}^{p+1}$  を

$$\nabla_F \eta = d\eta + dF \wedge \eta$$

で定義する. ここで,  $d$  は  $t$  に関する外微分を表す.  $\nabla_F$  は integrable である, すなわち  $\nabla_F \cdot \nabla_F = 0$  が成り立つ.

定義 2 複体  $C_{\nabla_F} := (\Omega_{M/Z}^\bullet, \nabla_F)$  を

$$0 \rightarrow \Omega_{M/Z}^0 \xrightarrow{\nabla_F} \Omega_{M/Z}^1 \xrightarrow{\nabla_F} \Omega_{M/Z}^2 \xrightarrow{\nabla_F} \dots \xrightarrow{\nabla_F} \Omega_{M/Z}^r \rightarrow 0.$$

を一般 Airy 積分に付随した *twisted de Rham complex* と呼ぶ.

この複体の cohomology  $H^*(C_{\nabla_F})$  について次を主張する.

定理 3 パラメータ  $\alpha$  は  $\alpha_n \neq 0$  を満たすとする. このとき

- 1)  $H^p(C_{\nabla_F}) = 0$  for  $p \neq r$ .
- 2)  $H^r(C_{\nabla_F})$  は, 自由  $S(Z)$ -加群で, その階数は

$$\text{rank } H^r(C_{\nabla_F}) = \binom{n-1}{r}.$$

$H^r(C_{\nabla_F})$  の基底の取り方については, 第5節で言及する.

## 4 アイデア

第3節の定理を示すために, 上記の複体の cohomology の計算を, 孤立特異点を持つ weighted homogeneous polynomial で定義される Koszul complex の cohomology の計算に帰着させる.

1)  $X := \{(1_{r+1}, x'') ; x'' \in M(r+1, n-r)\}$  とおく. また  $S(X) := \mathbb{C}[x'']$ ,  $N := T \times X$  とおく.  $X$  は  $Z$  の部分空間とすることができる. 従って  $N \subset M$  と思える.  $N$  上の関数

$$G(t, x) := \log \chi(tx; \alpha) \in S(X)[t],$$

を用いて, 複体  $C_{\nabla_G} = (\Omega_{N/X}^\bullet, \nabla_G)$  を考え, その cohomology を  $H^*(C_{\nabla_G})$  で表す. これは  $S(X)$ -加群である.

2) cohomologies  $H^*(C_{\nabla_F})$  と  $H^*(C_{\nabla_G})$  を関係づける. そのために, 写像  $\beta : Z \rightarrow X$  を  $(z', z'') \mapsto (1_{r+1}, (z')^{-1}z'')$  で定義する. これにより,  $Z \rightarrow X$  は principal fiber bundle になる. 関数環に誘導される写像  $\beta^* : S(X) \rightarrow S(Z)$  によって,  $S(Z)$  は  $S(X)$ -加群である. このとき, 次が成り立つ.

$$H^*(C_{\nabla_F}) \simeq H^*(C_{\nabla_G}) \otimes_{S(X)} S(Z).$$

3) 次に  $H^*(C_{\nabla_G})$  の計算を Koszul complex の cohomology の計算に帰着させる.

$$g(t) = \theta_n(t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}[t]$$

とおく. これは, 変数  $t_i$  の weight を  $i/n$  としたとき, 多項式  $G(t, x)$  の weighted homogeneous part の中で一番 weight の高い部分, すなわち weight 1 の部分を選び出したものである. Koszul 複体

$$(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) : 0 \rightarrow \Omega_T^0 \xrightarrow{dg\wedge} \Omega_T^1 \xrightarrow{dg\wedge} \Omega_T^2 \xrightarrow{dg\wedge} \dots \xrightarrow{dg\wedge} \Omega_T^r \rightarrow 0$$

を考える. すると次が示せる:  $S(X)$ -加群の同型

$$H^*(C_{\nabla_G}) \simeq H^*(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) \otimes_{\mathbb{C}} S(X)$$

が成り立つ.

4) 以上で, 問題は cohomology  $H^*(\Omega_T^\bullet, dg\wedge)$  を調べることに帰着した. さて, 多項式  $g(t)$  に関しては次のことがすぐ分かる:

- $g$  は孤立特異点  $t = 0$  を持つ weighted homogeneous な多項式である.
- 孤立特異点の Milnor 数は

$$\mu(g) := \binom{n-1}{r}$$

である.

この事実から, 次が分かる:

- $p \neq r$  のとき  $H^p(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) = 0$  である.
- $H^r(\Omega_T^\bullet, dg\wedge) \simeq \mathbb{C}[t]/(\partial_1 g, \dots, \partial_r g)$  は次元  $\mu(g)$  の複素ベクトル空間である. ただし,  $(\partial_1 g, \dots, \partial_r g)$  は  $g$  の偏導関数たちで生成される  $\mathbb{C}[t]$  の ideal である.

$R = \mathbb{C}[t]/(\partial_1 g, \dots, \partial_r g)$  は  $g$  の Jacobi ring と呼ばれる.

## 5 $R$ の基底

ここでは,  $\mathbb{C}$  上の  $R$  の基底について予想を述べる. そのために, いくつか言葉を用意する.

$p \leq r$  なる 自然数  $p$  を取り  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  を分割とする. 分割は, 通常のように Young diagram を用いて視覚化される.  $|\lambda|$  で diagram の箱の数を表す.  $\lambda$  に対する変数  $= (x_1, \dots, x_r)$  の Schur 関数を  $s_\lambda(x)$  とかく:

$$s_\lambda(x) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+r-1} & \dots & x_r^{\lambda_1+r-1} \\ x_1^{\lambda_2+r-2} & \dots & x_r^{\lambda_2+r-2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_{r-1}+1} & \dots & x_r^{\lambda_{r-1}+1} \\ x_1^{\lambda_r} & \dots & x_r^{\lambda_r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{r-1} & \dots & x_r^{r-1} \\ x_1^{r-2} & \dots & x_r^{r-2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}$$

ただし, ここで  $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_r = 0$  という便法を用いている.  $s_\lambda(x)$  は  $x$  の  $|\lambda|$  次斉次対称多項式である.

$t_1, \dots, t_r$  を  $x$  の基本対称式とする. Suffix はその次数である.  $s_\lambda(x)$  を  $t$  の関数とみたものを  $S_\lambda(t)$  とかく. これは,  $t_i$  の weight を  $i$  としたとき weighted homogeneous polynomial で, その次数はやはり  $|\lambda|$  である.

$\mathbf{Y}_{r,n-r-1}$  によって length が  $n-r-1$  以下で depth が  $r$  以下の Young diagram の集合を表す.

予想:  $[S_\lambda(t)]$  ( $\lambda \in \mathbf{Y}_{r,n-r-1}$ ) は Jacobi ring の  $\mathbb{C}$  上の基底を与える. ただし,  $[S_\lambda(t)]$  は  $S_\lambda(t)$  の定める  $R$  の元を表す.

この予想については, いくつか状況証拠がある. たとえば, Jacobi ring  $R = \mathbb{C}[t]/(\partial g)$  は monomial からなる  $\mathbb{C}$ -basis を持つが, その分布を表す Poincaré 多項式は

$$P_g(T) := \sum_i \mu_i T^i, \\ \mu_i := \# \{ \text{monomials of weight } i \text{ which form a basis of } R \}$$

で与えられる. このとき

$$P_g(T) = \prod_{i=1}^r \frac{T^{n-i} - 1}{T^i - 1}.$$

が成り立つ. [AVG] 参照. 一方,

$$P_Y(T) := \sum_i \nu_i T^i, \quad \nu_i := \#\{\lambda \in Y_{r,n-r-1} ; |\lambda| = i\}.$$

と定義すると, これは  $P_g(T)$  と一致することが知られている, [Mac] 参照.

#### 参考文献

- [AGV ] V. Arnold, A. Varchenko and S. Goussein-Zadé, Singularité des applications différentiables vol 1,2 , Mir Moscou (1986).
- [GRS ] I. M. Gelfand, V. S. Retahk, and V. V. Serganova, Generalized Airy functions, Schubert cells, and Jordan groups, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **298** (1988), 17-21.
- [K ] H. Kimura, On Wronskian determinants of the generalized confluent hypergeometric functions, (1994) preprint
- [Mac ] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press (1979).
- [N ] M. Noumi, Expansion of the solutions of a Gauss-Manin system at a point of infinity, Tokyo J. Math., **7** (1984), 1-60.
- [OK ] K. Okamoto and H. Kimura, On particular solutions of Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables , Quarterly J. Math. **37** (1986) 61-80