

# Some examples of tropicalization

川口 周 \*

このノートは 2025 年 10 月 20 日–10 月 24 日に行われた「城崎代数幾何学シンポジウム 2025」での講演の報告で、講演スライドに基づいています。以下の本文は、「である」調で書きます。

## 目次

|     |                                       |    |
|-----|---------------------------------------|----|
| 1   | トロピカル化                                | 1  |
| 1.1 | アメーバの極限としてのトロピカル化 . . . . .           | 2  |
| 1.2 | 多面体集合 $T$ の記述 . . . . .               | 4  |
| 1.3 | 埋め込みトロピカル化 . . . . .                  | 6  |
| 1.4 | 骨格としてのトロピカル化 . . . . .                | 7  |
| 1.5 | ベルコビッチ解析空間を用いた埋め込みトロピカル化と骨格 . . . . . | 9  |
| 2   | トロピカル化の諸相                             | 11 |
| 2.1 | 骨格から埋め込みトロピカル化への写像と忠実トロピカル化 . . . . . | 12 |
| 2.2 | 関数体のトロピカル化 . . . . .                  | 14 |
| 2.3 | アーベル多様体のトロピカル化 . . . . .              | 17 |

## 1 トロピカル化

代数多様体のトロピカル化にはいくつかの方法がある。この節では、代数多様体のトロピカル化について概説する。

---

\* 京都大学理学研究科 kawaguch(( ))math.kyoto-u.ac.jp

講演の機会をくださった組織委員の榎園誠氏、橋詰健太氏、宋珠愛氏、山木壱彦氏に感謝します。本稿は、KAKENHI 23K03041, 25H00587 の助成を受けています。

## 1.1 アメーバの極限としてのトロピカル化

$\mathcal{X}$  を  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体とする.  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$  の元を  $(t, z)$  ( $t \in \mathbb{C}^\times$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ ) で表す.  $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を第1成分への射影とし,  $t \in \mathbb{C}^\times$  に対して,  $\mathcal{X}_t := \pi^{-1}(t) \subseteq (\mathbb{C}^\times)^n$  を  $\mathcal{X}$  の  $t$  におけるファイバーとする. 写像  $\mathcal{L}_\mathbb{C}: (\mathbb{C}^\times)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

$$(1.1) \quad \mathcal{L}_\mathbb{C}: (\mathbb{C}^\times)^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (-\log |z_1|_\mathbb{C}, \dots, -\log |z_n|_\mathbb{C}),$$

で定める. ただし,  $|\cdot|_\mathbb{C}$  は複素数の通常絶対値である.

**定義 1.1** (アメーバ).  $t \in \mathbb{C}^\times$  に対して,  $\mathcal{X}_t$  のアメーバ  $A_{\mathcal{X}_t}$  を,  $\mathcal{X}_t$  の  $\mathcal{L}_\mathbb{C}$  による像として定める. すなわち,

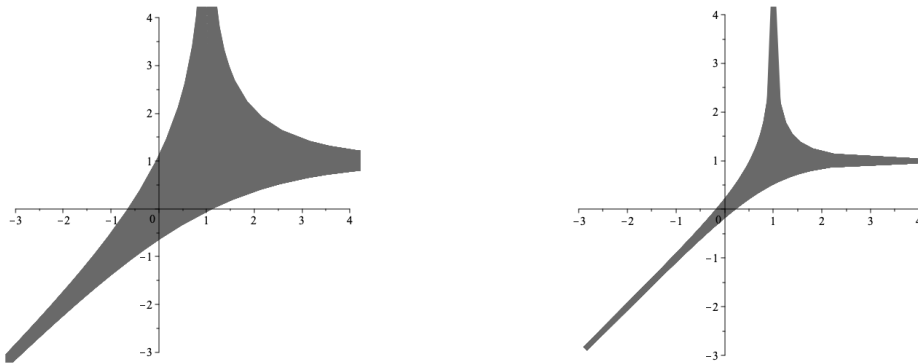
$$A_{\mathcal{X}_t} = \mathcal{L}_\mathbb{C}(\mathcal{X}_t)$$

とおく.

複素数  $z$  に対して, 偏角の情報を忘れて絶対値  $|z|_\mathbb{C}$  だけを考えることを, 複素数  $z$  がもつ情報のだいたい半分程度に注目していると捉えることにする. すると, アメーバ  $A_{\mathcal{X}_t}$  を考えることは, 代数多様体  $\mathcal{X}_t$  がもつ情報のだいたい半分程度に注目していると捉えられるかもしれない.

**例 1.2.**  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^2$  の部分多様体  $\mathcal{X} := \{(t, z_1, z_2) \mid z_1 + z_2 + t = 0\}$  を考える.  $\mathcal{L}_\mathbb{C}: (\mathbb{C}^\times)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(z_1, z_2) \mapsto (-\log |z_1|_\mathbb{C}, -\log |z_2|_\mathbb{C})$  に対して, アメーバ  $A_{\mathcal{X}_t} := \mathcal{L}_\mathbb{C}(\mathcal{X}_t)$  ( $t \in \mathbb{C}^\times$ ) の形は, 以下ようになる.

ただし, 後の都合上,  $\frac{1}{\log |t|_\mathbb{C}^{-1}} A_{\mathcal{X}_t} := \left\{ \frac{1}{\log |t|_\mathbb{C}^{-1}} x \mid x \in A_{\mathcal{X}_t} \right\}$  を描いている. 左は  $t = 0.5$  のときの図, 右は  $t = 0.2$  のときの図である.



上図を見ると,  $t \rightarrow 0$  のとき,  $\frac{1}{\log |t|_{\mathbb{C}}^{-1}} A_{\mathcal{X}_t}$  は多面体集合に収束しそうである. これは, 以下の定理のように一般に正しい.

**定理 1.3** (Bergman [4], ..., Rullgård [21], Mikhalkin [16], Jonsson [10]).  $\mathcal{X}$  を  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体とする. このとき,  $\mathbb{R}^n$  のある多面体集合  $T$  (1.2 節で詳しく述べる) が存在して,

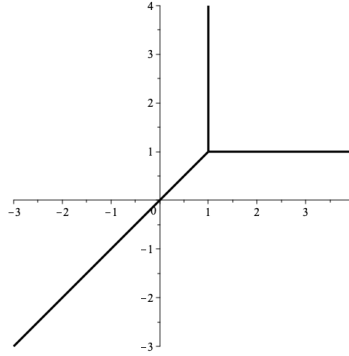
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log |t|_{\mathbb{C}}^{-1}} A_{\mathcal{X}_t} = T$$

となる (収束の定義は Jonsson [10] 参照).

**例 1.4.** 例 1.2 の場合は,  $\frac{1}{\log |t|_{\mathbb{C}}^{-1}} A_{\mathcal{X}_t}$  は下図の多面体集合

$$T = \{(x_1, 1) \mid x_1 \geq 1\} \cup \{(1, x_2) \mid x_2 \geq 1\} \cup \{(x, x) \mid x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

に収束する (ことが分かる).



$(\mathbb{C}^\times)^n$  の部分多様体  $X$  が与えられたとする. このとき,  $\mathcal{X} := \mathbb{C}^\times \times X$  は  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体である ( $t$  をパラメータとみなすと, この  $\mathcal{X}$  は constant family と考えられる). 任意の  $t \in \mathbb{C}^\times$  に対して,  $\mathcal{X}_t = X$  (一定) であるから,  $A_{\mathcal{X}_t} = A_X$  ( $:= \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X)$ ) になる. 定理 1.3 より次が成り立つ.

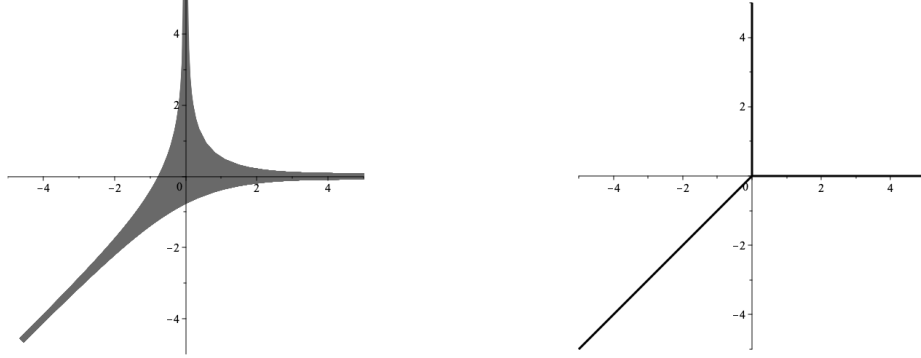
**系 1.5.**  $X$  を  $(\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体とする. このとき,  $\mathbb{R}^n$  のある多面体集合  $T$  (1.2 節で詳しく述べる) が存在して,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot A_X = T$$

となる. ここで,  $\rho$  は正の実数であり,  $\rho \cdot A_X = \{\rho x \mid x \in A_X\} \subseteq \mathbb{R}^n$  である.

**例 1.6.**  $(\mathbb{C}^\times)^2$  の部分多様体  $X := \{(z_1, z_2) \mid z_1 + z_2 + 1 = 0\}$  を考える.  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}: (\mathbb{C}^\times)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(z_1, z_2) \mapsto (-\log |z_1|_{\mathbb{C}}, -\log |z_2|_{\mathbb{C}})$  に対して, アメーバ  $A_X := \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X)$  の形は, 以下

の左図のようになる．このとき， $T := \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot A_X$  は右図になる．



なお，

$$T = \{(x_1, 0) \mid x_1 \geq 0\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 \geq 0\} \cup \{(x, x) \mid x \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

である．

系 1.5 において， $T$  を  $(\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体  $X$  の**トロピカル化**とよぶ．また，定理 1.3 において， $\mathcal{X}$  から  $\mathbb{C}(t)$ （または，次項で説明する Puiseux 級数体  $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ ）上の代数多様体が定まるが， $T$  のその代数多様体のトロピカル化とよぶ．

## 1.2 多面体集合 $T$ の記述

$\mathcal{X}$  を  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体とする．この小節では，アメーバの極限として現れる多面体集合  $T$ （定理 1.3 参照）を記述する．

$\mathbb{C}(t)$  で  $\mathbb{C}$  上の有理関数体を， $\mathbb{C}((t))$  で  $\mathbb{C}$  上の形式的 Laurent 級数体を表す．さらに，

$$K := \mathbb{C}\{\{t\}\} := \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}((t^{1/n}))$$

とおく． $K$  は代数的閉体で **Puiseux 級数体**とよばれる． $K$  は次のような非アルキメデス（乗法的）付値をもつ．

$K = \mathbb{C}\{\{t\}\}$  の零でない元  $f$  は，

$$f = c_1 t^{q_1} + c_2 t^{q_2} + \cdots \quad (q_i \in \mathbb{Q} \text{ で } q_1 < q_2 < \cdots, c_i \in \mathbb{C} \text{ で } c_1 \neq 0)$$

と表される．このとき，

$$|f|_K := \exp(-q_1)$$

とおく．また， $K$  の零元  $0$  に対しては  $|0|_K := 0$  とおく．

$|\cdot|_K$  は次の非アルキメデス（乗法的）付値の条件を確かに満たしている．

- (i) 任意の  $f \in K$  に対して,  $|f|_K \geq 0$  が成り立つ. また, 等号成立は  $f = 0$  のときのみである.
- (ii) 任意の  $f, g \in K$  に対して,  $|fg|_K = |f|_K |g|_K$  が成り立つ (乗法性).
- (iii) 任意の  $f, g \in K$  に対して,  $|f + g|_K \leq \max\{|f|_K, |g|_K\}$  が成り立つ (強い三角不等式).

式 (1.1) と同様に, 写像  $\mathcal{L}_K: (K^\times)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

$$(1.2) \quad \mathcal{L}_K: (K^\times)^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (-\log |z_1|_K, \dots, -\log |z_n|_K),$$

で定める. ただし,  $|\cdot|_K$  は  $K$  の非アルキメデス付値である.

さて,  $\mathcal{X}$  は  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$  の部分代数多様体なので,  $f_i \in \mathbb{C}[t^\pm][z_1^\pm, \dots, z_n^\pm]$  ( $1 \leq i \leq m$ ) が存在して,

$$\mathcal{X} = V(f_1, \dots, f_m) := \{(t, z) \in \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n \mid f_1(t, z) = \dots = f_m(t, z) = 0\}$$

と表される. 体の埋め込み  $\mathbb{C}[t^\pm] \subseteq K := \mathbb{C}\{\{t\}\}$  により,  $f_i$  を  $K[z_1^\pm, \dots, z_n^\pm]$  の元とみなす. そして,

$$X := V(f_1, \dots, f_m) \subset (K^\times)^n$$

とおく.

**定義 1.7.**  $X$  のトロピカル化  $\text{Trop}(X)$  を, 写像  $\mathcal{L}_K$  による  $X$  の像の ( $\mathbb{R}^n$  のユークリッド位相に関する) 閉包として定める. すなわち,

$$\text{Trop}(X) := \overline{\mathcal{L}_K(X)}$$

とおく.

**定理 1.8** (定理 1.3 の続き). 定理 1.3 のアメーバの極限集合  $T$  は,  $\text{Trop}(X)$  に他ならない.

**例 1.9.** 例 1.2 の,  $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^2$  の部分多様体  $\mathcal{X} := \{(t, z_1, z_2) \mid z_1 + z_2 + t = 0\}$  を考える. このとき,  $K := \mathbb{C}\{\{t\}\}$  とおくと,  $X = \{(z_1, z_2) \in (K^\times)^2 \mid z_1 + z_2 + t = 0\}$  である.  $\mathcal{L}_K(X)$  が何になるかを考えよう.  $(z_1, z_2) \in X$  を, 付値によって, 3 つの場合に分ける. これらの場合でつくされていることも, 下の議論から分かる.

- (1)  $|z_1|_K > 1/e$  ( $e$  は自然対数の底).
- (2)  $|z_1|_K < 1/e$ .

(3)  $|z_1|_K = 1/e$  かつ  $|z_2|_K \leq 1/e$ .

(1) の場合は、強い三角不等式から、 $|z_2|_K = |z_1 + t|_K = |z_1|_K > 1/e$  になる。  
 $-\log |z_1|_K < 1$  で、 $-\log |z_1|_K \in \mathbb{Q}$  である。よって、 $\mathcal{L}_K(X \cap \text{場合 (1)}) = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Q}, a < 1\}$  になる。

(2) の場合は、強い三角不等式から、 $|z_2|_K = |z_1 + t|_K = |t|_K = 1/e$  になる。  
 $-\log |z_1|_K > 1$  で、 $-\log |z_1|_K \in \mathbb{Q}$  である。よって、 $\mathcal{L}_K(X \cap \text{場合 (2)}) = \{(a, 1) \mid a \in \mathbb{Q}, a > 1\}$  になる。

(3) の場合は、 $\mathcal{L}_K(X \cap \text{場合 (3)}) = \{(1, a) \mid a \in \mathbb{Q}, a \geq 1\}$  になる。

以上をまとめて、

$$\begin{aligned} \text{Trop}(X) &:= \overline{\mathcal{L}_K(X)} \\ &= \{(x_1, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1\} \cup \{(1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 1\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\} \end{aligned}$$

となり、例 1.2 の極限集合  $T$  に確かに一致する (例 1.4 参照)。

### 1.3 埋め込みトロピカル化

前項では Puiseux 級数体を考えたが、以下では代数閉の完備非アルキメデス付値体を考える。また、前項ではアフィン代数多様体を考えたが、以下では射影代数多様体を考える。

この項では、 $K$  は代数的閉な完備非アルキメデス付値体を表す。ただし、付値は自明ではないとし、(乗法的) 付値を  $|\cdot|_K$  で表す。

$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  とおき、 $\mathbb{T}$  に加法  $\oplus := \min$  と乗法  $\odot := +$  (右辺は通常の  $+$ ) の演算を入れる。 $\mathbb{T}$  を**トロピカル半体** (tropical semifield) とよぶ。 $\mathbb{T}$  にはユークリッド位相を入れておく。

**トロピカル射影空間**  $\mathbb{TP}^n$  を

$$\mathbb{TP}^n := (\mathbb{T}^{n+1} \setminus \{(\infty, \dots, \infty)\}) / \sim$$

で定める。ただし、 $a = (a_0, \dots, a_n), b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{T}^{n+1} \setminus \{(\infty, \dots, \infty)\}$  が  $a \sim b$  であるとは、ある  $c \in \mathbb{R} = \mathbb{T} \setminus \{\infty\}$  が存在して、 $b_0 = a_0 + c, \dots, b_n = a_n + c$  が成り立つときにいう。 $\mathbb{TP}^n$  には商位相を入れておく。

**トロピカル写像** (tropicalization map) を

$$(1.3) \quad \text{trop} : \mathbb{P}^n(K) \rightarrow \mathbb{TP}^n, \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (-\log |x_0|_K : \dots : -\log |x_n|_K)$$

で定める.

$X$  を  $K$  上で定義された射影代数多様体とする.

**定義 1.10.**  $X$  の射影空間  $\mathbb{P}^n$  への埋め込みを固定する. このとき,  $X$  の埋め込みトロピカル化 (embedded tropicalization) を, トロピカル写像 (1.3) による  $X(K)$  の像の ( $\mathbb{TP}^n$  の位相に関する) 閉包として定める. すなわち,

$$(1.4) \quad \text{Trop}(X) := \overline{\text{trop}(X(K))}$$

とおく.

## 1.4 骨格としてのトロピカル化

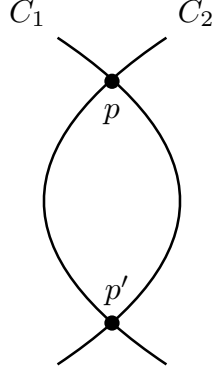
$K$  を代数的閉な完備非アルキメデス付値体とする. ただし, 付値は自明ではないとし, (乗法的) 付値を  $|\cdot|_K$  で表す.  $K$  の付値環を  $R := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ ,  $R$  の極大イデアルを  $\mathfrak{m} := \{x \in K \mid |x| < 1\}$ , 剰余体を  $k := R/\mathfrak{m}$  とおく.

$X$  を  $K$  上で定義された非特異な射影代数多様体とする.  $X$  は**狭義半安定モデル**  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(R)$  をもつと仮定する. すなわち,  $\mathcal{X}$  は  $\text{Spec}(R)$  上で射影的かつ平坦とし, 生成ファイバー  $\mathcal{X}_K := \mathcal{X} \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(K)$  は  $X$  と同型であり,  $\mathcal{X}$  のザリスキー開集合による開被覆  $\{U\}$  で, 各  $U$  は  $R[x_0, \dots, x_d]/(x_0 x_1 \cdots x_r - t)$  ( $r$  と  $t \in \mathfrak{m}$  は  $U$  に依存する) へのエタール射をもつとする.

$\mathcal{X}_s := \mathcal{X} \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(k)$  を狭義半安定モデル  $\mathcal{X}$  の特殊ファイバーとする.  $\mathcal{X}_s$  の**双対交叉複体** (dual intersection complex)  $S(\mathcal{X})$  を,  $X$  の狭義半安定モデル  $\mathcal{X}$  から決まる**骨格** (skeleton) とよぶ.

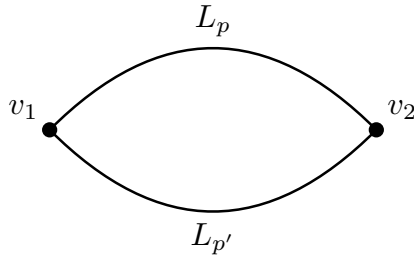
**例 1.11.**  $X$  が曲線のときを考える.  $X$  の狭義半安定モデル  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(R)$  の特殊ファイバー  $\mathcal{X}_s$  の形は下図のものとする. すなわち,  $\mathcal{X}_s$  は 2 つの曲線  $C_1, C_2$  の和集合で,

$C_1$  と  $C_2$  は 2 箇所で交わっているとする.



このとき,  $\mathcal{X}_s$  の双対交叉複体は以下ようになる. なお,  $\dim X = 1$  なので, 双対交叉複体は  $\mathcal{X}_s$  の双対距離グラフである.

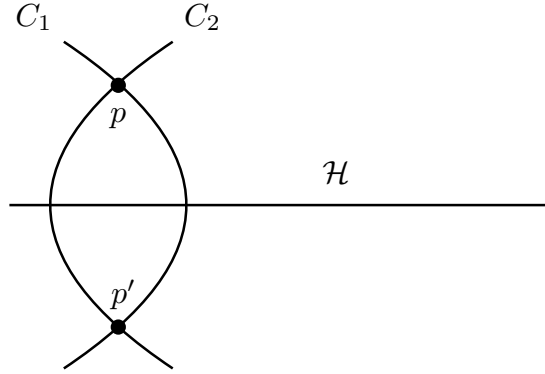
各既約成分  $C_i$  に点  $v_i$  を対応させる.  $C_1$  と  $C_2$  は 2 箇所で交わっているので, その交点を  $p, p'$  とする.  $p$  のまわりで,  $\mathcal{X}$  は  $R[x_0, x_1]/(x_0x_1 - t)$  ( $t \in \mathfrak{m}$ ) で定義されているとする. このとき,  $v_1$  と  $v_2$  を距離  $-\log |t|_K$  の線分  $L_p$  で結ぶ. 同様に,  $p'$  のまわりで,  $\mathcal{X}$  は  $R[x'_0, x'_1]/(x'_0x'_1 - t')$  ( $t' \in \mathfrak{m}$ ) で定義されているとし,  $v_1$  と  $v_2$  を距離  $-\log |t'|_K$  の別の線分  $L_{p'}$  で結ぶ. このようにしてできた距離グラフが  $\mathcal{X}_s$  の双対距離グラフで, 骨格  $S(\mathcal{X})$  である.



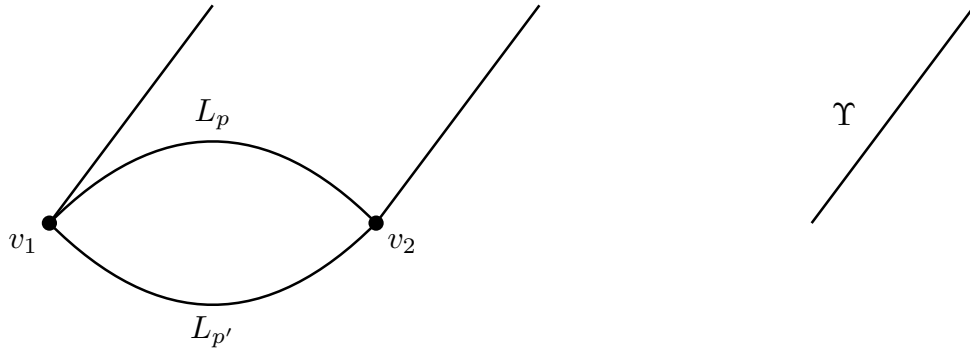
骨格  $S(\mathcal{X})$  の垂種を考えることもできる.  $X, \mathcal{X}$  は上のものとし,  $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{X}$  の水平な (horizontal) 因子とする. さらに,  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  は狭義半安定対 (strictly semistable pair) であると仮定する. すなわち, エタール局所的に,  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  は  $R[x_0, \dots, x_d]/(x_0x_1 \cdots x_r - t)$  ( $t \in \mathfrak{m}$ ) の形をしており,  $\mathcal{H}$  の各既約成分は自明であるか  $x_j$  ( $r+1 \leq j \leq d$ ) で定義されているとする.

このとき,  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を  $\mathcal{X}_s + \mathcal{H}$  の双対交叉複体として定める.  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を狭義半安定対  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  から決まる骨格とよぶ. さらに,  $\mathcal{H}$  から定まる  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  の後退扇 (recession fan) を  $\Upsilon$  で表す.

**例 1.12.**  $X$  と  $\mathcal{X} \rightarrow \operatorname{Spec}(R)$  を例 1.11 のものとする. さらに, 水平な因子  $\mathcal{H}$  は既約で, 特殊ファイバー  $\mathcal{X}_s$  と下図のように交わっているとする.



このとき, 骨格  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  は下の左図のようになる. 例 1.11 と比較して, 加わった 2 本の平行な半直線が  $\mathcal{H}$  に対応している. 骨格  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  の 後退扇  $\Upsilon$  は, (半直線は平行なので) 下の右図のように 1 つ半直線になる.



骨格  $S(\mathcal{X})$  と  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  は,  $X$  のモデルの取り方と水平な因子  $\mathcal{H}$  の取り方に依存していることを強調しておく.

## 1.5 ベルコビッチ解析空間を用いた埋め込みトロピカル化と骨格

1.4 項のように,  $K$  を代数的閉な完備非アルキメデス付値体とし,  $X$  は  $K$  上で定義された非特異な射影代数多様体とする. 仮定や記号は, 1.4 項のものを用いる. 特に,  $K$  の付値  $|\cdot|_K$  は自明でない.

この項では,  $X$  に付随したベルコビッチ解析空間  $X^{\text{an}}$  を導入し, 1.3 項の  $X$  の埋め込みトロピカル化が  $X^{\text{an}}$  のトロピカル化に延長されること, および, 1.4 項の骨格  $S(\mathcal{X})$  と  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  がベルコビッチ解析空間  $X^{\text{an}}$  の中に実現されることを説明する.

**定義 1.13** (ベルコビッチ解析空間 [5]).  $X$  に付随するベルコビッチ解析空間  $X^{\text{an}}$  は集合として,

$$X^{\text{an}} := \left\{ x := (p, |\cdot|) \mid \begin{array}{l} p \in X \text{ (スキーム点) で, } |\cdot| \text{ は } p \text{ の剰余体 } \kappa(p) \text{ 上の} \\ \text{非アルキメデス付値で } |\cdot|_K \text{ を拡張したもの} \end{array} \right\}$$

で与えられる.  $X^{\text{an}}$  には次の条件を満たす最弱の位相を入れる. 任意の開集合  $U \subseteq X$  と任意の  $f \in \mathcal{O}_X(U)$  に対し,

- (i)  $U^{\text{an}}$  は  $X^{\text{an}}$  の開集合である.
- (ii) 写像  $|f|: U^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R}, (p, |\cdot|) \mapsto |f(p)|$  は連続である. ただし,  $f(p)$  は自然な全射  $\mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \kappa(p)$  による  $f$  の像である.

以下では,  $x = (p, |\cdot|)$  に対して,  $|f(p)|$  を  $|f(x)|$  で表す.

**例 1.14** (古典的な点 (classical point)).  $x \in X(K)$  のとき,  $\kappa(x) = K$  である. したがって,  $(x, |\cdot|_K) \in X^{\text{an}}$  になる. 対応  $x \mapsto (x, |\cdot|_K)$  により,  $X(K) \subseteq X^{\text{an}}$  と見なせる.

$(\mathbb{P}^n)^{\text{an}}$  のトロピカル化写像  $\text{trop}$  を

$$(1.5) \quad \text{trop}: (\mathbb{P}^n)^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{TP}^n, x = (p, |\cdot|) \mapsto (-\log |X_0(x)| : \cdots : -\log |X_n(x)|)$$

で定める. ただし,  $X_0, \dots, X_n$  は  $\mathbb{P}^n$  の座標関数である.

上の例 1.14 により,  $\mathbb{P}^n(K) \subseteq (\mathbb{P}^n)^{\text{an}}$  とみなすとき,  $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$  に対して,  $|X_i(x)| = |x_i|_K$  である. よって, 上のトロピカル化写像は, (1.3) のトロピカル化写像

$$\text{trop}: \mathbb{P}^n(K) \rightarrow \mathbb{TP}^n, (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (-\log |x_0|_K : \cdots : -\log |x_n|_K)$$

の定義域を拡張したものに他ならない.

**定理 1.15** (cf. [8]).  $X$  の射影空間  $\mathbb{P}^n$  への埋め込みを固定する.  $X^{\text{an}}$  は  $(\mathbb{P}^n)^{\text{an}}$  の部分集合になるので, トロピカル化写像 (式 (1.5) 参照) による像  $\text{trop}(X^{\text{an}})$  が考えられる. また,  $\text{Trop}(X)$  を  $X$  の埋め込みトロピカル化 (式 (1.4) 参照) とする. このとき,

$$\text{Trop}(X) = \text{trop}(X^{\text{an}})$$

が成り立つ.

**例 1.16** (シロフ点 (Shilov point)).  $\xi$  で  $X$  の生成点を表す. このとき,  $\kappa(\xi)$  は  $X$  の関数体  $\text{Rat}(X)$  に他ならない.

$\mathcal{X} \rightarrow \operatorname{Spec}(R)$  を,  $X$  の狭義半安定モデルとする.  $\mathcal{X}_s$  を  $\mathcal{X}$  の特殊ファイバーとし,  $Z_v$  ( $v \in V$ ) で  $\mathcal{X}_s$  の既約成分を表す.  $\mathcal{X}_s$  の一つの既約成分  $Z_v$  をとり,  $Z_v$  は局所的に  $R[z]/(z-t)$  ( $t \in \mathfrak{m}$ ) で定義されているとする. このとき,  $f \neq 0 \in \operatorname{Rat}(X)$  に対して,  $f = z^a g$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ,  $g \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}, Z_v}^\times$ ) と表し,  $|f|_{Z_v} = -a \log |t|_K$  と定める. また,  $|0|_{Z_v} = 0$  と定める. すると,  $|\cdot|_{Z_v}$  は  $\kappa(\xi) = \operatorname{Rat}(X)$  の非アルキメデス付値を与える. したがって,  $v := (\xi, |\cdot|_{Z_v}) \in X^{\text{an}}$  は,  $X^{\text{an}}$  の点 (シロフ点) を与える.

特殊ファイバー  $\mathcal{X}_s$  の双対交叉複体  $S(\mathcal{X})$  において,  $\mathcal{X}_s$  の既約成分  $Z_v$  は,  $S(\mathcal{X})$  の点  $v$  を定めたことを思い出そう. 例 1.16 は,  $S(\mathcal{X})$  の点  $v$  が,  $Z_v$  のシロフ点として, ベルコビッチ解析空間  $X^{\text{an}}$  の中に自然に実現されることを述べている.

例 1.16 の記号を用いて,  $A$  を添字集合  $V$  の部分集合とし,  $S$  を  $\bigcap_{v \in A} Z_v$  の連結成分とする. エタール局所的に,  $\mathcal{X}$  は  $S$  のまわりで,  $R[x_0, \dots, x_d]/(x_0-t)$  ( $t \in \mathfrak{m}$ ) で定義されているとする. 詳細は省くが, このとき, 各  $u \in \{u = (u_v) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\#A} \mid \sum_{v \in A} u_v = -\log |t|_K\}$  に対して,  $\operatorname{Rat}(X)$  の付値  $|\cdot|_u$  を定めることができる. そこで,

$$\sigma^S := \left\{ (\xi, |\cdot|_u) \mid u = (u_v) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\#A}, \sum_{v \in A} u_v = -\log |t|_K \right\} \subseteq X^{\text{an}}$$

とおく.  $\Delta(\mathcal{X}) := \{\sigma^S \mid A \subseteq V \text{ で, } S \text{ は } \bigcap_{v \in A} Z_v \text{ の連結成分}\}$  とおく.  $\Delta(\mathcal{X})$  は  $S(\mathcal{X})$  を  $X^{\text{an}}$  の部分集合とみなしたときの,  $S(\mathcal{X})$  の多面体複体を与える. このように, 骨格  $S(\mathcal{X})$  はベルコビッチ解析空間  $X^{\text{an}}$  の中に自然に実現されることが分かる.

同様に, 狭義半安定対  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  に対しても,  $X^{\text{an}}$  の中に多面体複体  $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  が存在して,  $\Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  は骨格  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  のベルコビッチ解析空間  $X^{\text{an}}$  の中への自然に実現を与える.

以下では, 骨格  $S(\mathcal{X})$  と  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  は,  $X^{\text{an}}$  の部分集合とみなす.

## 2 トロピカル化の諸相

この節では, トロピカル化のいくつかの例を挙げる. 特に断りのない限り,  $K$  は代数的閉な完備非アルキメデス付値体とする. ただし,  $K$  の付値  $|\cdot|_K$  は自明ではないとする.  $R$  は  $K$  の付値環,  $\mathfrak{m}$  は  $R$  の極大イデアル,  $k := R/\mathfrak{m}$  は剰余体を表す.

## 2.1 骨格から埋め込みトロピカル化への写像と忠実トロピカル化

$X$  を  $K$  上で定義された非特異な射影代数多様体,  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を狭義半安定対とする.  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \subseteq X^{\text{an}}$  を  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  から定まる骨格とする.

$\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$  を射とする. 前節では,  $\varphi$  が埋め込みのときを考えたが, ここでは, 少し弱めて  $\varphi$  は射という条件だけでよい.

$\varphi$  は解析空間の射  $\varphi^{\text{an}}: X^{\text{an}} \rightarrow (\mathbb{P}^n)^{\text{an}}$  を誘導する. トロピカル化写像  $\text{trop}: X^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{TP}^n$  との合成を考え, さらに, 定義域を  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  に制限すると, 写像

$$\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})}: S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{TP}^n$$

を得る.  $\varphi$  が埋め込み  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  のときは,  $(\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}})(X^{\text{an}}) = \text{Trop}(X)$  であったから, 上の写像は, 骨格から埋め込みトロピカル化への写像

$$S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Trop}(X)$$

を与える.

詳しくは述べないが,  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  と  $\text{Trop}(X)$  の両方に自然な整構造が入っている.

**定義 2.1** (忠実トロピカル化).  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$  を射とする.  $\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})}$  が像への同相写像で, 整構造を保つとき,  $\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})}$  を **忠実トロピカル化** (faithful tropicalization) とよぶ.

**定理 2.2** (Mikhalkin [17], ..., Baker–Payne–Rabinoff [2], Gubler–Rabinoff–Werner [9]).  $X$  を  $K$  上で定義された非特異な射影代数多様体,  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を狭義半安定対とする.  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を  $X^{\text{an}}$  の骨格とする. このとき,  $f_0, \dots, f_n \in \text{Rat}(X)$  が存在して, 射  $\varphi = (f_0 : \dots : f_n): X \rightarrow \mathbb{P}^n$  に対して

$$\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})}: S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{TP}^n$$

は忠実トロピカル化を与える.

定理 2.2 の例を与えよう.

**例 2.3** (忠実トロピカル化の例 (Mikhalkin [17], Katz–Markwig–Markwig [11])).  $X$  を  $K$  上で定義された乗法的 (multiplicative) 還元をもつ楕円曲線とする. このとき,  $X$  の  $\mathbb{P}^2$  への埋め込み  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$  が存在して,  $\text{Trop}(X) \subseteq \mathbb{TP}^2$  は長さ  $-\log |j(X)|_K$  のサイクルを含む. ただし,  $j(X)$  は  $X$  の  $j$  不変量である.

### 2.1.1 忠実トロピカル化と非常に豊富な因子

忠実トロピカル化を、代数幾何における非常に豊富な因子による埋め込みと対比させよう.

以下は、代数幾何における古典的な定理である. 定理 2.4 では、 $K$  は代数閉体とする (付値体とは仮定しない).

- 定理 2.4.** (1)  $X$  を種数  $g$  が 2 以上の  $K$  上で定義された非特異な射影曲線とする.  $L$  は  $X$  上の直線束で  $\deg(L) \geq 2g + 1$  をみたすとする. このとき、 $L$  の大域切断  $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L)$  が存在して、 $\varphi = (s_0 : \dots : s_n) : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  は  $X$  の  $\mathbb{P}^n$  への埋め込みを与える.
- (2) (Lefschetz)  $A$  を次元が  $g$  の  $K$  上で定義されたアーベル多様体とする.  $L$  は  $A$  上の直線束で豊富とする. このとき、 $L^{\otimes 3}$  の大域切断  $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L^{\otimes 3})$  が存在して、 $\varphi = (s_0 : \dots : s_n) : A \rightarrow \mathbb{P}^n$  は  $A$  の  $\mathbb{P}^n$  への埋め込みを与える.
- (3)  $A$  を  $K$  上で定義された主偏極アーベル曲面とし、 $A$  の定義体の標数は 2 ではないとする.  $L$  は主偏極を与える  $A$  上の対称な直線束とする. このとき、 $L^{\otimes 2}$  の大域切断  $s_0, \dots, s_3 \in H^0(X, L^{\otimes 2})$  が存在して、 $\varphi = (s_0 : \dots : s_3) : A \rightarrow \mathbb{P}^3$  は  $A/\langle -1 \rangle$  の  $\mathbb{P}^3$  への埋め込みを与える.

次は、直線束の大域切断による忠実トロピカル化の結果である. 定理 2.5 では、今まで通り  $K$  は代数的閉な完備非アルキメデス付値体とする.

- 定理 2.5** (K-Yamaki [12, 13, 14]). (1)  $X$  を種数  $g$  が 2 以上の  $K$  上で定義された非特異な射影曲線とする.  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を  $X$  の狭義半安定対とする.  $L$  は  $X$  上の直線束で  $\deg(L) \geq 3g - 1$  をみたすとする. このとき、 $L$  の大域切断  $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L)$  が存在して、 $\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})} : S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{TP}^n$  は骨格  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  の忠実トロピカル化を与える. ただし、 $\varphi = (s_0 : \dots : s_n)$  である.
- (2)  $A$  を次元が  $g$  の  $K$  上で定義されたアーベル多様体とする.  $\Sigma$  を  $A$  の標準骨格 (2.3 項で説明する) とする.  $L$  は  $A$  上の直線束で豊富とする. このとき、 $g$  のみによる定数  $C(g)$  が存在し、 $L^{\otimes C(g)}$  の大域切断  $s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L^{\otimes C(g)})$  が存在して、 $\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \mathbb{TP}^n$  は標準骨格  $\Sigma$  の忠実トロピカル化を与える. ただし、 $\varphi = (s_0 : \dots : s_n)$  である.
- (3)  $A$  を  $K$  上で定義された総退化な (2.3 項で説明する) 主偏極アーベル曲面とし、剰余体  $k$  の標数は 2 ではないとする.  $\Sigma' \subseteq (A/\langle -1 \rangle)^{\text{an}}$  を  $A/\langle -1 \rangle$  の標準骨格とす

る.  $L$  は主偏極を与える  $A$  上の対称な直線束とする. このとき,  $L^{\otimes 2}$  の大域切断  $s_0, \dots, s_3 \in H^0(X, L^{\otimes 2})$  が存在して,  $\text{trop} \circ \psi^{\text{an}}|_{\Sigma'} : \Sigma' \rightarrow \mathbb{TP}^3$  は標準骨格  $\Sigma'$  の忠実トロピカル化を与える. ただし,  $\psi: A/\langle -1 \rangle \rightarrow \mathbb{P}^3$  は  $\varphi = (s_0 : \dots : s_3)$  が誘導する射である.

## 2.2 関数体のトロピカル化

$X$  を  $K$  上で定義された非特異な射影代数多様体とする.  $\mathcal{X}$  を  $X$  の狭義半安定モデル,  $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{X}$  の水平な因子で,  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  が狭義半安定対であると仮定する. このとき, 1.5 項のように,  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \hookrightarrow X^{\text{an}}$  が得られる.

$\text{Rat}(X)$  で  $X$  の関数体を表す. また,  $\text{PL}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  で  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  上に定義された区分的アフィン関数全体のなす空間を表す.

**定義 2.6.** 写像

$$\text{trop}: \text{Rat}(X) \rightarrow \text{PL}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H})), \quad f \mapsto (-\log |f|)|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})}$$

を関数体のトロピカル化 (tropicalization of the function field) とよぶ.

$\Gamma_{\text{val}} := \{\log |\alpha|_K \mid \alpha \in K^\times\}$  を  $K$  の付値群とする.  $\mathbb{R}^n$  上で定義された関数  $F$  が, 整  $\Gamma_{\text{val}}$  アフィン (integral  $\Gamma_{\text{val}}$ -affine) であるとは,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  and  $b \in \Gamma_{\text{val}}$  が存在して,

$$F(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$$

と表されるときにいう.

**定義 2.7.**  $\text{PL}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  の中で,

$$\text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H})) := \left\{ F \in \text{PL}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H})) \left| \begin{array}{l} S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \text{ の細分で } S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \text{ と同じ後退扇 } \Upsilon \\ \text{をもつものが存在して, 細分の各面上で } F \text{ は} \\ \text{整 } \Gamma_{\text{val}} \text{ アフィン写像の制限であり, さらに,} \\ \Upsilon \text{ の任意の平行な ray に対して, それぞれの} \\ \text{ray に沿った } F \text{ の無限大の近くの傾きは同じである} \end{array} \right. \right\} \cup \{\infty\}$$

とおく.

**定理 2.8** (Amini–K–Song [1]).  $K$  は離散付値体の代数閉体とする.

- (1) トロピカル化写像  $\text{trop}: \text{Rat}(X) \rightarrow \text{PL}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  の像は  $\text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  に一致する．言い換えれば,

$$\text{trop}: \text{Rat}(X) \rightarrow \text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$$

は全射である．

- (2)  $\text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  は  $\mathbb{T}\mathbb{Q} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  上の半体として有限生成である．

**注意 2.9.** 定理 2.8 (1) は Baker–Rabinoff [3] の次元 1 の結果を一般次元に一般化している．定理 2.8 (2) は Ducros–Hrushovski–Loeser–Ye [7] の結果の離散付値体（の代数閉包）の場合の別証明を与えている．

- (1) の証明の概略を述べる．

- $\Phi \in \text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  を任意にとる．簡単のため、各  $\tau \in \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  上で、 $\Phi$  は面ごとにアフィン（facewise affine）と仮定する．
- 各  $\tau \in \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  に対して、2 つの関数  $f_\tau, g_\tau \in \text{Rat}(\mathcal{X}) = \text{Rat}(X)$  で、「正反対」の性質をもつものを構成する．
- 最初の関数  $f_\tau \in \text{Rat}(\mathcal{X}) = \text{Rat}(X)$  は以下をみたす．
  - (i)  $\text{trop}(f_\tau)|_\tau \equiv 0$ ;
  - (ii) 任意の  $\eta \in \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  に対して、 $\text{trop}(f_\tau)|_{\eta \setminus \tau} > 0$  である．さらに、 $\eta \in \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  が  $\eta \succeq \tau$  をみたすとき、 $\eta \setminus \tau$  の任意の ray に沿って、 $\text{trop}(f_\tau)|_{\eta \setminus \tau}$  の傾きは正である．

大雑把にいて、 $f_\tau \in \text{Rat}(X)$  は  $\tau$  に対応する生成点で零でなく、 $\tau$  と無関係な既約成分で  $f_\tau$  は零になるような関数である．

- 2 つ目の関数  $g_\tau \in \text{Rat}(\mathcal{X}) = \text{Rat}(X)$  は 以下をみたす．

$$\text{trop}(g_\tau)|_\tau = \Phi|_\tau.$$

$\tau \in \Delta(\mathcal{X})$  のときを考えよう． $\tau$  は  $\bigcap_{v \in A} Z_v$  の連結成分に対応しているとする．ここで、 $Z_v$  は特殊ファイバー  $\mathcal{X}_s$  の既約成分である． $\Phi|_\tau = c_\tau + \sum_{v \in A} a_v u_v$  のとき、大雑把にいて、 $g_\tau = \gamma_\tau \prod_{v \in A} z_v^{a_v}$  ( $z_v$  は  $Z_v$  を定義しているとし、 $-\log |\gamma_\tau|_K = c_\tau$ ) とおけばよい．

- これら 2 つの関数  $f_\tau, g_\tau \in \text{Rat}(\mathcal{X}) = \text{Rat}(X)$  に対して、係数  $\beta_\tau \in R^\times$  と 整数  $N_\tau \gg 1$  を適当にとって、

$$\phi := \sum_{\tau \in \Delta(\mathcal{X}, \mathcal{H})} \beta_\tau f_\tau^{N_\tau} g_\tau \in \text{Rat}(\mathcal{X}) = \text{Rat}(X),$$

とおけば,  $\text{trop}(\phi) = \Phi$  になる.

(2) の証明の概略を述べる.

- $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を適当な  $\mathbb{R}^N$  に整構造を保って埋め込む.
- $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$  を  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  の像とし,  $\Sigma$  を台にもつ多面体複体  $\mathcal{C}$  をとる.
- 任意の  $F \in \text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  をとり,  $F$  を  $\Sigma$  上の関数とみる. 必要なら  $\mathcal{C}$  の細分をとることにより,  $F$  は  $\mathcal{C}$  の各面で整  $\mathbb{Q}$  アフィン関数と仮定してよい.
- $\Sigma$  の適当な近似を考えることにより,  $\mathcal{C}$  を  $\mathbb{R}^N$  全体を台にもつ多面体複体  $\hat{\mathcal{C}}$  に拡張する.  $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  の拡張  $\hat{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  で,  $\hat{F}$  は  $\hat{\mathcal{C}}$  の各面で (必ずしも整とは限らない)  $\mathbb{Q}$  アフィン関数になるものをとる.
- $\mathbb{R}^N$  上の狭義凸関数  $H_1, H_2$  で,  $\hat{\mathcal{C}}$  の各面で  $\mathbb{Q}$  アフィン関数になるものが存在して,  $\hat{F} = H_1 - H_2$  と表すことができる.
- 各面  $\sigma \in \hat{\mathcal{C}}$  に対して,  $\mathbb{R}^N$  上の  $\mathbb{Q}$  アフィン関数  $L_{i\sigma}$  を,  $(H_i - L_{i\sigma})|_{\sigma} = 0$  かつ, 任意の  $\eta \supseteq \sigma$  に対して,  $(H_i - L_{i\sigma})|_{\eta \setminus \sigma} > 0$  となるものをとる.
- このとき,  $\Sigma = |\mathcal{C}|$  上で

$$F = \max_{\sigma} \{L_{1\sigma}|_{\Sigma}\} - \max_{\sigma} \{L_{2\sigma}|_{\Sigma}\}$$

となる.  $\mathcal{C}$  の面  $\sigma$  上では,  $L_{i\sigma}$  は整  $\mathbb{Q}$  アフィン関数なので,  $F$  は, 座標関数  $X_1, \dots, X_N$  で生成される  $\mathbb{TQ}$  上の半体に含まれる. よって,  $\text{Rat}(\Sigma)$  は,  $\mathbb{TQ}$  上座標関数  $X_1, \dots, X_N$  で生成される. したがって,  $\text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  も  $\mathbb{TQ}$  上有限生成である.

定理 2.8 は, 定理 2.2 (忠実トロピカル化) の別証明 (ただし,  $K$  は離散付値体の代数閉包と仮定する) を与える.

**系 2.10.**  $K$  は離散付値体の代数閉包と仮定する.  $X$  を  $K$  上で定義された非特異な射影代数多様体,  $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を狭義半安定対とする.  $S(\mathcal{X}, \mathcal{H})$  を  $X^{\text{an}}$  の骨格とする. このとき,  $f_0, \dots, f_n \in \text{Rat}(X)$  が存在して, 射  $\varphi = (f_0 : \dots : f_n): X \rightarrow \mathbb{P}^n$  に対して

$$\text{trop} \circ \varphi^{\text{an}}|_{S(\mathcal{X}, \mathcal{H})} : S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{TP}^n$$

は忠実トロピカル化を与える.

*Proof.* 上のように  $\iota: S(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  を整構造を保った埋め込みとし,  $F_i = \iota^*(X_i) \in \text{Rat}(S(\mathcal{X}, \mathcal{H}))$  とおく. 定理 2.8 (1) により,  $\text{trop}(f_i) = F_i$  となる  $f_i \in \text{Rat}(X)$  をと

る.  $f_0 = 1$  とおき, 必要ならば,  $\varphi = (f_0, \dots, f_n)$  が射になるように,  $f_i$  ( $i \geq N$ ) をとる. このとき,  $\varphi = (f_0, \dots, f_n)$  が題意をみたす.  $\square$

## 2.3 アーベル多様体のトロピカル化

### 2.3.1 トロピカルアーベル多様体

$g$  を正の整数とし,  $M \cong \mathbb{Z}^g$  を階数  $g$  の自由  $\mathbb{Z}$  加群とする.  $N := \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$  とおき,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  を自然なペアリングとする.  $M'$  を  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  の格子とする.

**定義 2.11.** 商  $X = N_{\mathbb{R}}/M'$  を次元が  $g$  の **整構造付き実トーラス** ((real torus with integral structure) とよぶ. ただし,  $X$  の整構造は  $N_{\mathbb{R}}$  の格子  $N$  から定める.

**定義 2.12** (偏極).  $X = N_{\mathbb{R}}/M'$  を次元が  $g$  の整構造付き実トーラスとする. 対称な  $\mathbb{R}$  双線形形式

$$Q: N_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

が  $X$  の**偏極** (polarization) を定めるとは, 以下の条件をみたすときにいう.

- $Q$  は正定値である.
- $Q$  は  $M' \times N$  上整である. すなわち,  $Q(M' \times N) \subseteq \mathbb{Z}$  が成り立つ.

**定義 2.13** (トロピカルアーベル多様体). 整構造付き実トーラス  $X$  が **トロピカルアーベル多様体** (tropical abelian variety) であるとは,  $X$  に偏極が存在するときにいう.

「トロピカルアーベル多様体」という名前は, おそらく, Mikhalkin–Zharkov [18] による. しかし, この名前によばれるよりもずっと以前から, アーベル多様体の退化の研究 (Mumford [19, Proposition 6.7] など) で, トロピカルアーベル多様体は登場している.

### 2.3.2 総退化なアーベル多様体

$A$  を  $K$  上で定義された次元が  $g$  のアーベル多様体とする.

$p: E^{\text{an}} \rightarrow A^{\text{an}}$  を位相空間  $A^{\text{an}}$  の普遍被覆 (universal covering) とする. Raynaud [20] と Bosch–Lütkebohmert [6] により,  $E^{\text{an}}$  は群スキーム  $E$  に付随するベルコビッチ解析空間であり, 完全列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow M' \rightarrow E^{\text{an}} \rightarrow A^{\text{an}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が存在する．ここで， $T := \text{Spec}(K[\chi^M])$  は階数有限の  $\mathbb{Z}$  自由加群  $M$  を指標格子とする代数トーラスであり， $B$  は良還元をもつアーベル多様体， $M'$  は  $E^{\text{an}}$  の格子である．

**定義 2.14.**  $B = 0$  のとき， $A$  は**総退化** (totally degenerate) という．

### 2.3.3 総退化なアーベル多様体からトロピカルアーベル多様体へのトロピカル化

$A$  を次元が  $g$  の  $K$  上で定義された総退化なアーベル多様体とする．このとき，アーベル群の完全列

$$0 \rightarrow M' \rightarrow T^{\text{an}} \rightarrow A^{\text{an}} \rightarrow 0$$

が存在する．ここで， $T := \text{Spec}(K[\chi^M])$  は階数  $g$  の  $\mathbb{Z}$  自由加群  $M$  を指標格子とする代数トーラスである．

$N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$  とおき， $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  とおく．このとき，写像  $\text{trop}: T^{\text{an}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$  を，

$$\langle u, \text{trop}(t) \rangle = -\log |\chi^u(t)|, \quad (u \in M, t \in T^{\text{an}}).$$

が成り立つように定められ，次の可換図式を得る．

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & T^{\text{an}} & \longrightarrow & A^{\text{an}} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{trop} & & \downarrow \text{trop} \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & X := N_{\mathbb{R}}/M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

このとき， $X := N_{\mathbb{R}}/M'$  は次元が  $g$  のトロピカルアーベル多様体になり， $\text{trop}: A^{\text{an}} \rightarrow X$  は，総退化なアーベル多様体  $A$  (に付随するベルコビッチ解析空間) からトロピカルアーベル多様体  $X$  へのトロピカル化を与える．

### 2.3.4 標準骨格

可換図式 (2.1) において，任意の  $v \in N_{\mathbb{R}}$  に対し，写像  $\sigma_T(v): K[\chi^M] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を

$$\sigma_T(v): \sum_{u \in M} a_u \chi^u \mapsto \max_{u \in M} \left\{ |a_u|_K e^{-\langle u, v \rangle} \right\}$$

で定めることができる． $\sigma_T(v)$  は  $K[\chi^M]$  の非アルキメデス (乗法的) 付値を与えるので， $\sigma_T(v) \in T^{\text{an}}$  となる．この対応  $v \mapsto \sigma_T(v)$  により，トロピカル化写像  $\text{trop}: T^{\text{an}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$  の切断  $\sigma_T: N_{\mathbb{R}} \rightarrow T^{\text{an}}$  を得る． $\sigma_T$  はトロピカル化写像  $\text{trop}: A^{\text{an}} \rightarrow X$  の切断  $\sigma_X: X \rightarrow A^{\text{an}}$  を誘導する． $\sigma_X$  による  $X$  の像を， $A^{\text{an}}$  の**標準骨格** (canonical skeleton) とよぶ．

### 2.3.5 準同形, 持ち上げなど

アーベル多様体の準同形のトロピカル化や, トロピカルアーベル多様体の性質, 持ち上げなどについて, [15] の結果を述べる.

**定理 2.15** (トロピカル・ポアンカレ完全可約性定理).  $X$  をトロピカルアーベル多様体,  $Y$  を  $X$  のトロピカルアーベル部分多様体とする. このとき,  $X$  のトロピカルアーベル部分多様体  $Z$  が存在して,  $Y \cap Z$  は有限集合であり,  $Y + Z = X$  となる. 言い換えれば,  $X$  は  $Y \times Z$  と同種 (*isogenous*) である.

**系 2.16.**  $X$  をトロピカルアーベル多様体とする. このとき,  $X$  は単純な (*simple*) トロピカルアーベル多様体の積  $X_1^{n_1} \times \cdots \times X_k^{n_k}$  と同種になる. ここで,  $X_i$  と  $X_j$  ( $i \neq j$ ) は同種ではない. さらに,  $D_i := \text{End}_{\mathbb{Q}}(X_i)$  は  $\mathbb{Q}$  上有限次元の斜体であり,  $M_{n_i}(D_i)$  を  $D_i$  上の  $n_i \times n_i$  の行列環とすると,

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$$

となる.

$A$  を  $K$  上で定義された総退化なアーベル多様体とする.  $A^{\text{trop}} := \Sigma$  で標準骨格を表す.  $A^{\text{trop}}$  はトロピカルアーベル多様体である.

**命題 2.17** (準同形のトロピカル化).  $A$  の準同形写像  $f: A \rightarrow A$  は, トロピカルアーベル多様体  $A^{\text{trop}}$  の準同形写像  $f^{\text{trop}}: A^{\text{trop}} \rightarrow A^{\text{trop}}$  を誘導する. さらに,

$$\rho: \text{End}(A) \rightarrow \text{End}(A^{\text{trop}}), \quad f \mapsto f^{\text{trop}}$$

は単射である.

**注意 2.18.**  $\rho$  は一般には全射ではない.

$\Gamma_{\text{val}} := \{-\log |\alpha|_K \mid \alpha \in K^\times\}$  は付値群であった. トロピカルアーベル多様体  $X = N_{\mathbb{R}}/M'$  に対して,  $M' \subseteq N \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_{\text{val}}$  のとき,  $X$  は  $\Gamma_{\text{val}}$  上で定義されているという.

**命題 2.19.**  $X$  を  $\Gamma_{\text{val}}$  上で定義されたトロピカルアーベル多様体とする. このとき,  $K$  上で定義された総退化なアーベル多様体  $A$  が存在して,  $A^{\text{trop}}$  は  $X$  と同型になる.

**命題 2.20.**  $X$  を  $\Gamma_{\text{val}}$  上で定義されたトロピカルアーベル多様体とし,  $X \sim X_1^{n_1} \times \cdots \times X_k^{n_k}$  を系 2.16 の分解とする. このとき,  $K$  上に定義された総退化なアーベル多様体

$A, A_i$  で, それぞれ  $X, X_i$  の持ち上げであるものが存在して,  $A_i$  は単純であり,  $A_i$  と  $A_j$  ( $i \neq j$ ) は同種でなく,  $A \sim A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k}$  となるものが存在する.

## 参考文献

- [1] Amini, Omid; Kawaguchi, Shu; Song, JuAe. *Tropical function fields, finite generation, and faithful tropicalization*, preprint, arXiv:arXiv:2503.20611, 26 pages.
- [2] Baker, Matthew; Payne, Sam; Rabinoff, Joseph. *Nonarchimedean geometry, tropicalization, and metrics on curves*. *Algebr. Geom.* **3** (2016), no. 1, 63–105.
- [3] Baker, Matthew; Rabinoff, Joseph. *The skeleton of the Jacobian, the Jacobian of the skeleton, and lifting meromorphic functions from tropical to algebraic curves*. *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2015**, no. 16, 7436–7472.
- [4] Bergman, George M. *The logarithmic limit-set of an algebraic variety*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), 459–469.
- [5] Berkovich, Vladimir G. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. *Mathematical Surveys and Monographs*, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. x+169 pp.
- [6] Bosch, Siegfried; Lütkebohmert, Werner. *Degenerating abelian varieties*. *Topology* **30** (1991), no. 4, 653–698.
- [7] Ducros, Antoine; Hrushovski, Ehud; Loeser, François; Ye, Jinhe. *Tropical functions on a skeleton*. *J. Éc. polytech. Math.* **11** (2024), 613–654.
- [8] Gubler, Walter. *A guide to tropicalizations*. *Algebraic and combinatorial aspects of tropical geometry*, 125–189, *Contemp. Math.*, **589**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [9] Gubler, Walter; Rabinoff, Joseph; Werner, Annette. *Skeletons and tropicalizations*. *Adv. Math.* **294** (2016), 150–215.
- [10] Jonsson, Mattias. *Degenerations of amoebae and Berkovich spaces*. *Math. Ann.* **364** (2016), no. 1-2, 293–311.
- [11] Katz, Eric; Markwig, Hannah; Markwig, Thomas. *The  $j$ -invariant of a plane tropical cubic*. *J. Algebra* **320** (2008), no. 10, 3832–3848.
- [12] Kawaguchi, Shu; Yamaki, Kazuhiko. *Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves*. *Mem. Amer. Math. Soc.* **270** (2021), no. 1323, v+110 pp.
- [13] Kawaguchi, Shu; Yamaki, Kazuhiko. *Effective faithful embeddings and tropicalizations for abelian varieties*. preprint, arXiv:2412.18192, 56 pages.
- [14] Kawaguchi, Shu; Yamaki, Kazuhiko. *Tropical Kummer quartic surfaces*. in preparation.
- [15] Kawaguchi, Shu; Yamaki, Kazuhiko. *Homomorphisms of tropical and nonarchimedean abelian varieties (tentative title)*. in preparation.
- [16] Mikhalkin, Grigory. *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*. *Topology* **43** (2004), no. 5, 1035–1065.

- [17] Mikhalkin, Grigory. *Tropical geometry and its applications*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 827–852.
- [18] Mikhalkin, Grigory; Zharkov, Ilia. *Tropical curves, their Jacobians and theta functions*, Curves and abelian varieties, 203–230, Contemp. Math., **465**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [19] Mumford, David. *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*. Compos. Math. **24**, (1972), 239–272.
- [20] Raynaud, Michel. *Variétés abéliennes et géométrie rigide*, in Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 473–477, Gauthier-Villars Éditeur, Paris.
- [21] Rullgård, Hans. *Polynomial Amoebas and Convexity*, Research Reports in Mathematics, Number 8, Stockholm University, 2001.