

Chaotic Itinerancy From a Ring of Four-Coupled Phase-Locked Loops

長谷川 晃朗[†]

ahase@chaos.mind.meiji.ac.jp PFC03231@niftyserve.or.jp

遠藤 哲郎[†]

endoh@isc.meiji.ac.jp ce66002@isc.meiji.ac.jp

小室 元政[‡]

五十嵐 量[‡]

[†]明治大学理工学部電子通信工学科

[‡]帝京科学大学理工学部電子情報科学科

あらまし

本研究では、4個の環状結合PLLに見られるカオスの遍歴現象のメカニズムについて述べる。この系にはある超平面が存在し、一定時間その平面上に軌道が拘束されていると、軌道は徐々にその超平面から離れカオス的に動きまわるようになる。しばらくすると、再び超平面に引き寄せられ、軌道は超平面上を動くという超平面内外の2つの状態間をランダムに繰り返す。本研究では、超平面上での系の分岐を調べることでこのメカニズムを明らかにする。

1 はじめに

カオスの遍歴現象とは、大自由度力学系においていくつもの準安定なモード間を遷移する現象である[1,2]。準安定なモードは有効自由度が低く秩序状態に対応し、遷移状態は有効自由度が高くバースト状態に対応する。それぞれの状態に留まる時間は不規則で、鋭敏な初期値依存性を持っている。

本研究で扱うシステムは、4つの位相同期回路(PLL)を一方向環状結合したもので、おのおのPLLの出力位相の振舞いは6次元自律系微分方程式で表される。この系には、準吸引的性質をもつ4次元超平面が存在し、結合係数 σ をいろいろ変化させていくと、 $\sigma = 3.5$ 付近において軌道がこの超平面に引き付けられその近くを動くとき、対角位置にある2対のPLLは逆相に同期する。しかしその状態がしばらく続くと、軌道は超平面から離れ、同期は外れる。しばらく非同期状態が続くと、再び軌道は超平面に引き寄せられ同期する。これらの同期、非同期状態は不規則的に繰り返す、我々はこれをカオスの遍歴現象であると考えた[3,4]。

本文では、この超平面の準吸引的性質を、超平面上での分岐現象を調べ、「入口集合」と「出口集合」の存在を明らかにすることにより解明した。さらに、遷移状態でのカオス的不規則性を、出口集合の不安定多様体と平衡点の安定多様体が横断的に交わってできる「はじき飛ばし機構」の存在によって明らかにした。

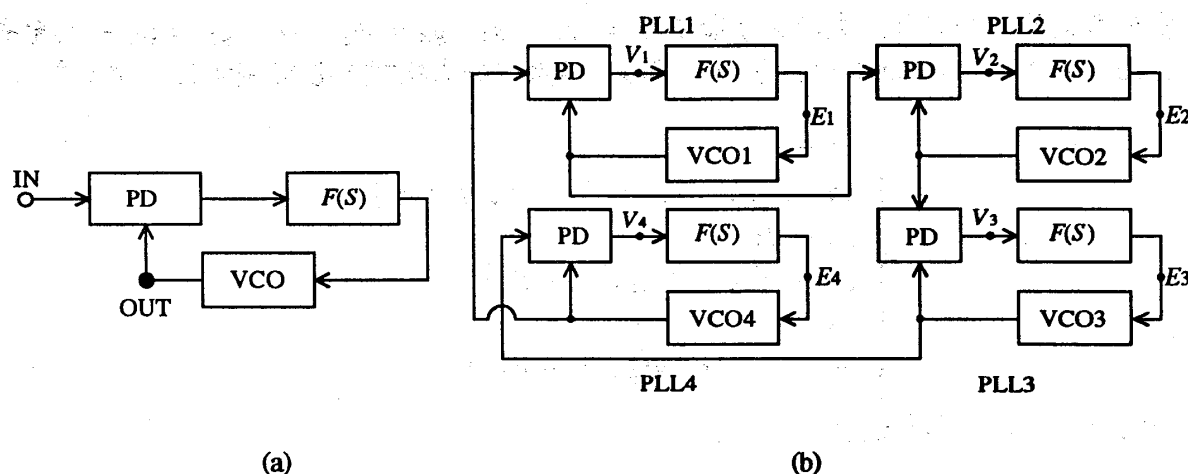


図 1: 結合 PLL モデル

2 モデル

本研究では図 1(a) のような同一の PLL 4 個を図 1(b) のように一方向環状結合した系を考える [5]. 単体の PLL はループフィルタ ($F(S)$), 電圧制御発振器 (Voltage-Controlled Oscillator : VCO), 位相比較器 (Phase Detector : PD) の 3 つの部分で構成されている. まず, VCO は入力端子のついた発振器であり, 何も入力がない場合には自走周波数 ω_0 で発振している. しかし, 入力がある場合には, 入力電圧に比例して発振周波数が変化する. $F(S)$ は今回はラグフィルタ $F(S) = 1/(1 + \tau S)$ を用い, PD は次のような 2π 周期対称三角波位相比較特性として与えられる.

$$g(\phi) = \begin{cases} \phi & (|\phi| \leq \frac{\pi}{2}) \\ \phi + \pi & (\frac{\pi}{2} \leq \phi < \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

$$g(\phi + 2n\pi) = g(\phi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

この単一の PLL 回路は, VCO 出力が入力信号に同期するように振舞う. これらの PLL を図 1(b) のように PLL1 の VCO 出力を PLL2 の入力に, PLL2 の VCO 出力を PLL3 の入力に, PLL3 の VCO 出力を PLL4 の入力に, PLL4 の VCO 出力を PLL1 の入力にというように, 一方向環状結合させる.

各々の PLL の VCO の出力位相を $\phi_1 \sim \phi_4$ とし, 各 VCO の自走周波数を同一 ($= \omega_0$) とし, かつ, ループゲインも同一とすると, それぞれの PLL の振舞いは次のような微分方程式で表わされる.

$$\ddot{\phi}_i + \frac{1}{\tau} \dot{\phi}_i + \frac{K}{\tau} g(\phi_i - \phi_{i-1}) = \frac{\omega_0}{\tau}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{mod. } 4)$$
(1)

ここで ϕ_i は位相なので, 絶対的な値には意味がなく, 各々の PLL 間の位相の相対的な関係のみに意味がある. したがって, 個々の PLL の位相を考えるのではなく, 隣の PLL との

位相差を考える。つまり、次のような量 $y_1 = \phi_1 - \phi_4$, $y_3 = \phi_2 - \phi_1$, $y_5 = \phi_3 - \phi_2$ を考える。これにより、この系は次のような 6 階の自律系微分方程式として表すことができる [3]。

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_2 - \sigma g(y_1 + y_3 + y_5) - \sigma g(y_1) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -y_4 + \sigma g(y_1) - \sigma g(y_3) \\ \dot{y}_5 = y_6 \\ \dot{y}_6 = -y_6 + \sigma g(y_3) - \sigma g(y_5) \end{cases} \quad (2)$$

簡単のため、次のような変換

$$\begin{aligned} x_1 &= (2/\pi)y_1, x_2 = (2/\pi)y_2, x_3 = (2/\pi)y_3, x_4 = (2/\pi)y_4, \\ x_5 &= (2/\pi)(y_1 + y_5), x_6 = (2/\pi)(y_2 + y_6) \end{aligned}$$

をし、さらに非線形関数 $g(y)$ も $g(y) = (\pi/2)h(2y/\pi)$ と変換する。このとき $h(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{cases} x & (-1 \leq x \leq 1) \\ -x + 2 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases} \\ h(x + 4n) &= h(x) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

とかける (図 2)。ここで、非線形関数 $h(x)$ は次のような性質を持っている。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & h(-x) = -h(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \\ \text{(ii)} \quad & h(2-x) = h(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \\ \text{(iii)} \quad & h(x) = h(y) \Leftrightarrow x - y \equiv 0 \pmod{4} \text{ or } x + y \equiv 2 \pmod{4} \end{aligned} \quad (3)$$

すると (2) は次のような方程式となる。

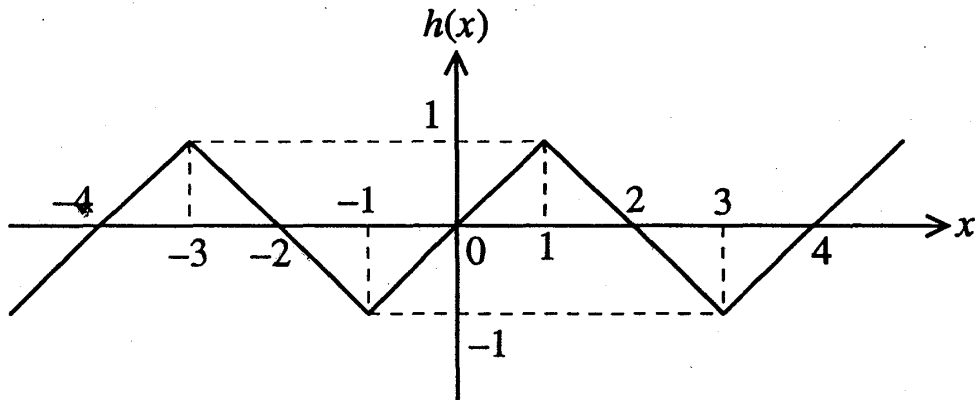
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \sigma h(x_1) - \sigma h(x_3 + x_5) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_4 + \sigma h(x_1) - \sigma h(x_3) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -x_6 - \sigma h(x_1) + \sigma h(x_3) - \sigma h(x_5 - x_1) - \sigma h(x_3 + x_5) \end{cases} \quad (4)$$

(4) において、 $x_5 = x_6 = 0$ とすると、 $h(x)$ の性質 (3) より

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= x_6 = 0 \\ \dot{x}_6 &= -x_6 - \sigma \{h(x_5 + x_3) + h(x_5 - x_1) - h(x_3)\} \\ &= -\sigma \{h(x_3) + h(-x_1) + h(x_1) - h(x_3)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。このことから、次のような 4 次元超平面

$$H = \{x \in \mathbf{R}^6 \mid x_5 = x_6 = 0\}$$

図 2: $h(x)$ の特性

が普遍的に存在することがわかる。さらに $h(x)$ の性質 (3) より, H は 6 次元空間内に唯一存在するのではなく, x_5 方向に周期 4 で無数に存在する。この超平面 H は, もとの物理系では対角位置にある PLL が逆相に同期しているということに対応している。つまり, 軌道が H 上にあるときには逆相に同期しており, 軌道が H から離れると同期が外れるということを表している。(4) において $x_5 = x_6 = 0$ とすることにより, H 上のダイナミクスは次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \sigma\{h(x_1) + h(x_3)\} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_4 - \sigma\{h(x_3) - h(x_1)\} \end{cases} \quad (5)$$

また, (5) は次のような変換 $T_1: H \rightarrow H$ に対して不変である。

$$T_1: (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (x_3, x_4, -x_1, -x_2) \quad (6)$$

さらに, 次の変換に対しても不変である。

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \circ T_1: (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4) \\ T_3 &= T_1 \circ T_1 \circ T_1: (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (-x_3, -x_4, x_1, x_2) \end{aligned}$$

これは, ある軌道 γ が H 上に存在すれば, 変換 $T_i (i = 1, 2, 3)$ による γ の像 $T_i(\gamma)$ も軌道となっていることを表わしている (図 3)。つまり, H 上にある軌道 γ が存在すれば, 変換 T_i で変換するとのできる軌道が 3 つ存在するということを意味している。

3 カオスの遍歴現象

次にカオスの遍歴現象のコンピュータシミュレーションの結果と, 電子回路実験の結果を示す。図 4 は式 (2) において $\sigma = 3.5$ としたときの $y_1 + y_5 (\propto x_5)$ と $y_2 + y_6 (\propto x_6)$ の時間

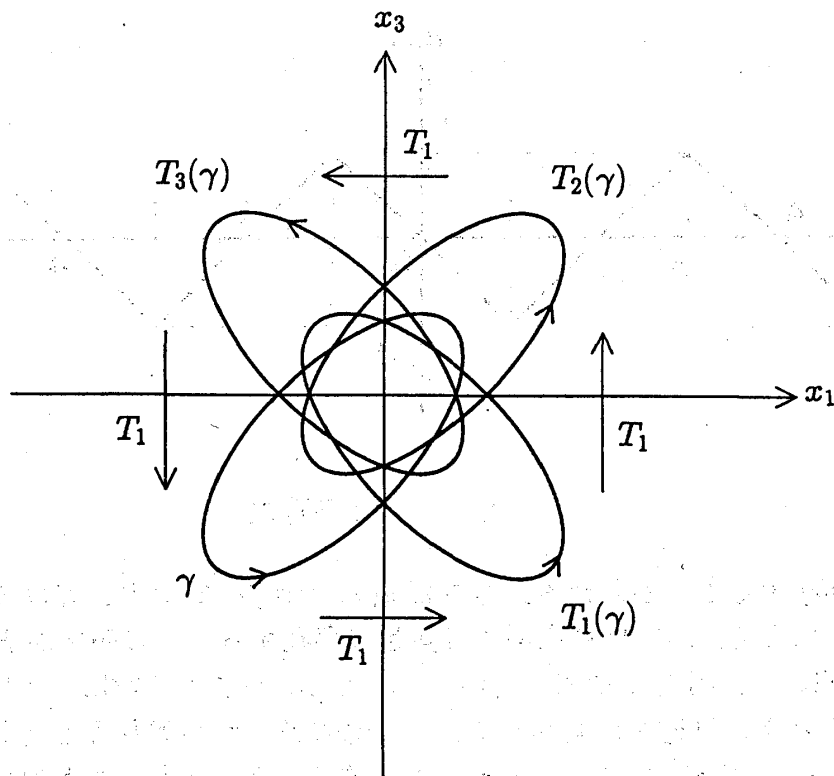


図 3: H 上の軌道の対称性

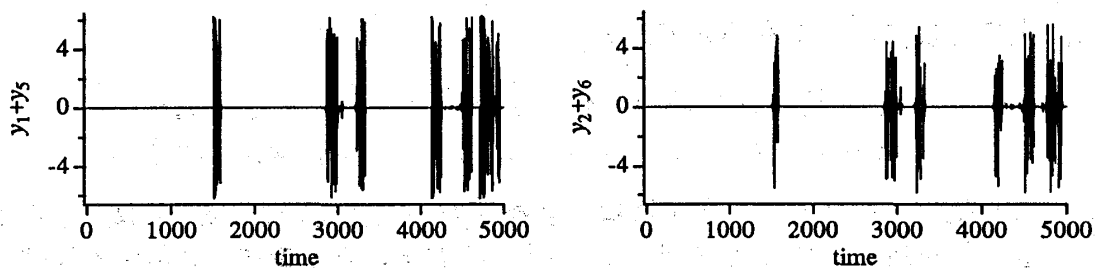


図 4: ノイズのない場合のカオス的遍历現象のコンピュータシミュレーション結果

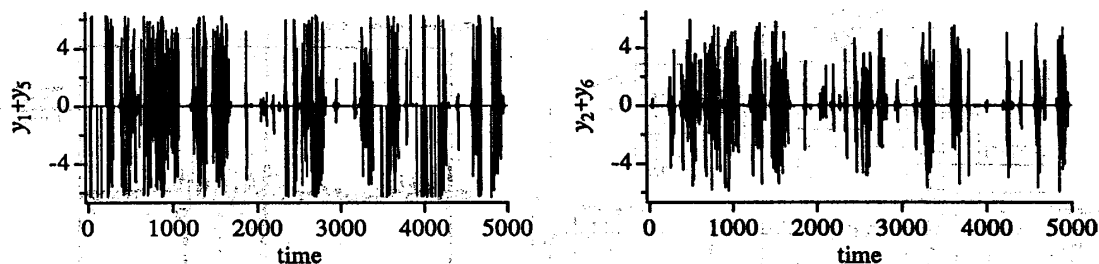


図 5: ノイズを加えた場合のカオスの遍歴現象のコンピュータシミュレーション結果

発展である。ここで、 $(y_1 + y_5, y_2 + y_6) = (0, 0)$ の時には軌道は H 上にあるということを示している。 H 上に拘束されていた軌道は、しばらくすると H から飛び出す。しばらくの間、軌道が H の外をさまよう、再び H に吸い寄せられ、 H 上に拘束されるという 2 つの状態間をランダムに繰り返している。

図 5 は式 (2) にパルス的なノイズを y_1 に加えた場合（ルンゲクッタ法のきざみ幅を 0.001 として、500 ステップごとに $y_1 \rightarrow y_1 + 0.001$ とする）のコンピュータシミュレーションの結果である。ノイズを加えると、ノイズを加えない場合に比べて H 上に拘束されている時間が短くなるが、やはりカオスの遍歴現象を観測することができる。

次に電子回路実験の結果を示す。実験回路は図 6(a) のような PLL 回路を 4 つ図 1(b) のように環状一方向結合させることにより作ることができる。図 1(b) において各々の PLL の PD 出力 V_i と VCO 入力電圧 E_i を観測することにより、式 (2) の $y_1 \sim y_6$ に対応した値を次のような変換

$$\begin{aligned} g(y_1) &= -V_1, \quad g(y_3) = -V_2, \quad g(y_5) = -V_3 \\ y_2 &= E_1 - E_4, \quad y_4 = E_2 - E_1, \quad y_6 = E_3 - E_2 \end{aligned}$$

により得ることができる。図 6(b) は電子回路実験におけるカオスの遍歴現象の実験結果で、コンピュータシミュレーションによる結果とはほぼ同様の結果が得られた。特に、電子回路実験ではノイズを排除することはできないため、図 5 のノイズを加えたシミュレーションにより得られる時間波形とよく似ている。

4 H 上での分岐現象

$\sigma = 3.5$ 付近で見られるカオスの遍歴現象を解析するために、結合係数 σ を 1.0 ~ 4.0 ま で変化させたときの H 上でのダイナミクスの分岐を調べる。図 8(a) はポアンカレ平面を $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, \dot{x}_3 = x_4 > 0\}$ としたときの 1 パラメータ分岐図で、左下の図はピッチフォーク分岐でわかれたすべての分岐経路を重ね合わせて描いたものであり、図 8(b) はカオスの遍歴現象の見られる $\sigma = 3.5$ 付近を拡大したものである。分岐を調べる際に、同時に H の補空間方向 ($H^\perp$ 方向) への軌道の安定性も調べた。

ここで、 x_1, x_3, x_5 は周期 4 の周期性を持つために、シリンダ状の座標系を考えたとき、次

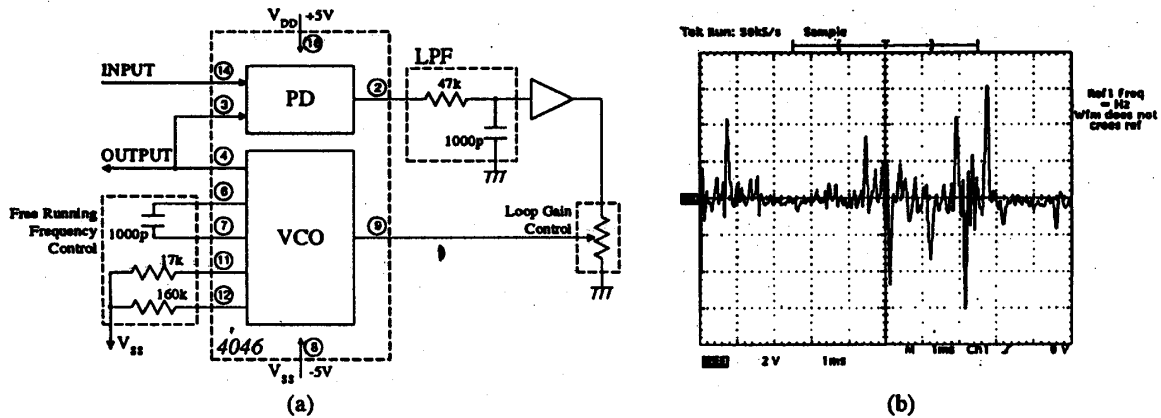


図 6: 電子回路実験に用いた 1 つの PLL のブロック図とカオスの遍歴現象の結果 (a) ブロック図, (b) 実験結果

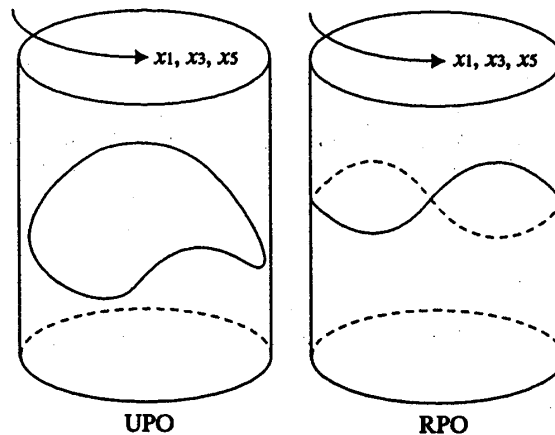


図 7: Un-running Periodic Orbit (UPO) と Running Periodic Orbit (RPO)

のような 2 種類の周期軌道を考えることができる。すなわち、シリンダの表面上で周期軌道となるものを un-running periodic orbit (UPO), シリンダの外側をまわって周期軌道となるものを running periodic orbit (RPO) と呼ぶ (図 7)。

4.1 H 上における UPO の分岐

まず, H 上における UPO の分岐について調べる。

- (1) $0 < \sigma < HP (= 1.0)$: 原点 $O = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ は H 方向にも $H^\perp$ 方向にも安定な平衡点となっている。
- (2) $HP \leq \sigma \leq PF_1 (\approx 1.6591)$: $\sigma = HP$ において原点 O はホップ分岐により H 方向に安定性を失い, H 上に安定な周期軌道 γ_0 が発生する。これは $H^\perp$ 方向には安定である。

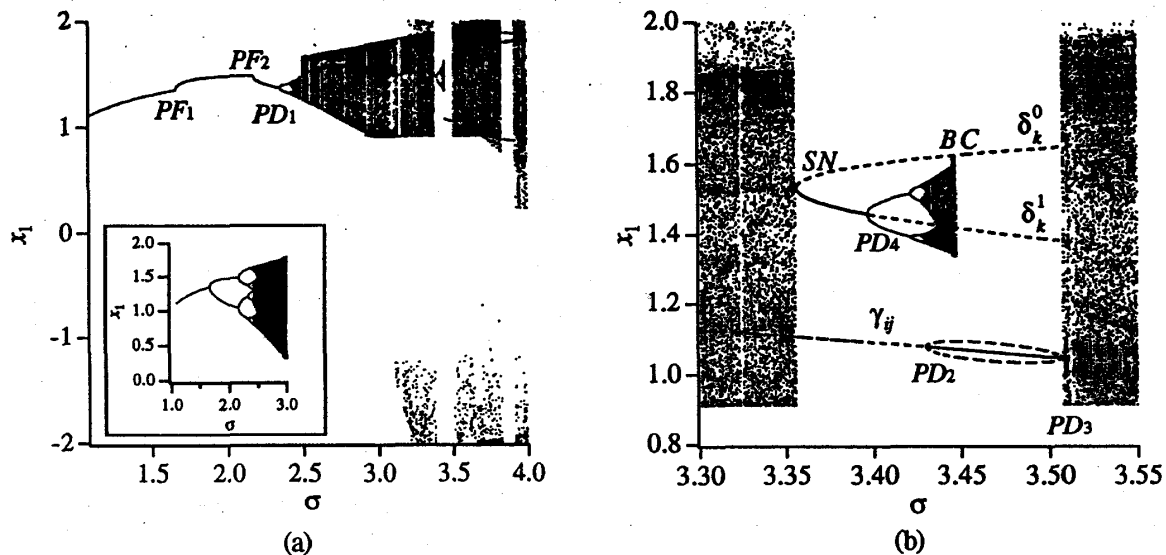


図 8: H 上での分岐図 (a) 全体の分岐図, (b) $\sigma = 3.5$ 付近の拡大図

- (3) $PF_1 \leq \sigma \leq PF_2 (\simeq 2.1703)$: $\sigma = PF_1$ において周期軌道 γ_0 はピッチフォーク分岐により H 方向に安定性を失い, 2つの安定な周期軌道 γ_1 と γ_2 が発生する. これらは $H^\perp$ 方向に安定である.
- (4) $PF_2 \leq \sigma \leq PD_0 (\simeq 2.2436)$: $\sigma = PF_2$ において, γ_1, γ_2 はピッチフォーク分岐により H 方向に安定性を失い, $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ という4つの安定な周期軌道が発生する. これらは $H^\perp$ 方向に安定である.
- (5) $PD_0 \leq \sigma \leq PD_1 (\simeq 2.3425)$: $\sigma = PD_0$ において, γ_{ij} ($i, j = 1, 2$) は周期倍分岐により $H^\perp$ 方向に安定性を失う. つまり, 6次元空間で見た場合, H 上にある周期解 γ_{ij} は周期倍分岐を起こし, H から飛び出した2周期解が見えるようになる.
- (6) $PD_1 \leq \sigma \leq PD_2 (\simeq 3.4299)$: $\sigma = PD_1$ において H 上では安定であった周期軌道 γ_{ij} は周期倍分岐により H 方向に安定性を失い, 安定な2周期軌道 γ_{ij}^2 が発生する. σ をさらに増加させると, γ_{ij}^2 は周期倍分岐をくり返し, $\sigma = 2.4$ 付近でカオスとなる.
- (7) $PD_2 \leq \sigma \leq PD_3 (\simeq 3.5064)$: $\sigma = PD_2$ において, $\sigma = PD_1$ で周期倍分岐により不安定化した γ_{ij} は周期倍分岐により再び H 方向に安定となる. 同時に, γ_{ij} のまわりに H 方向に不安定な2周期軌道が現れる. σ をさらに増加させると, $\sigma = PD_3$ において γ_{ij} は周期倍分岐を起こし, $\sigma = PD_2$ で安定化した γ_{ij} は再び H 方向に不安定化する.

4.2 H 上における RPO の分岐

$\sigma = SN (\simeq 3.3559)$ において, サドルノード分岐により, 一対の $H^\perp$ 方向には安定で, かつ H 方向に安定な RPO δ_k^1 と H 方向に不安定な δ_k^0 ($k = 1, 2, 3, 4$)が発生する. ここで σ を

表 1: $\sigma = 3.5$ での平衡点 O , RPO δ_k^0 , δ_k^1 , UPO γ_{ij} の固有値 (λ を固有値とすると, O は $\text{Re}(\lambda) < 0$ のとき安定. その他は $|\lambda| < 1$ のとき安定)

	O		δ_k^0		δ_k^1		γ_{ij}	
H	s	$-1.3736 + 2.0033i$	u	8.5235	u	-2.1106	c	1.0000
	s	$-1.3736 - 2.0033i$	c	1.0000	c	1.0000	s	-0.9857
	u	$0.37357 + 2.0033i$	s	0.0390	s	0.0479	s	-0.0141
	u	$0.37357 - 2.0033i$	s	0.0046	s	-0.0227	s	0.0139
$H^\perp$	s	$-0.5 + 2.5981i$	s	-0.8433	s	$-0.1893 + 0.1100i$	u	-1.5694
	s	$-0.5 - 2.5981i$	s	-0.0463	s	$-0.1893 - 0.1100i$	s	-0.0088

増加させていった時の分岐現象を調べる (図 8(b)).

H 方向に安定な δ_k^0 は, $\sigma = PD_4 (\simeq 3.3962)$ において周期倍分岐により H 方向の安定性を失い, 安定な 2 周期の RPO が発生する. その後 RPO は, 周期倍分岐をくり返し, $\sigma = 3.43$ 付近でカオスとなる. $\sigma = BC (\simeq 3.4473)$ において, カオスアトラクタは H 方向に不安定な δ_k^0 と接触し, クライシスを起こし消滅する. $SN \leq \sigma \leq PD_7 (\simeq 3.889)$ において, δ_k^0 は $H^\perp$ 方向には安定であり, $\sigma = PD_7 (\simeq 3.889)$ において周期倍分岐により $H^\perp$ 方向の安定性を失う.

また, δ_k^0 は, H 方向には調べた範囲 ($\sigma < 4.0$) では不安定であり, $H^\perp$ 方向に関しては $\sigma = PD_6 (\simeq 3.548)$ において, 周期倍分岐により安定性を失うまで安定である.

4.3 $\sigma = 3.5$ でのダイナミクス

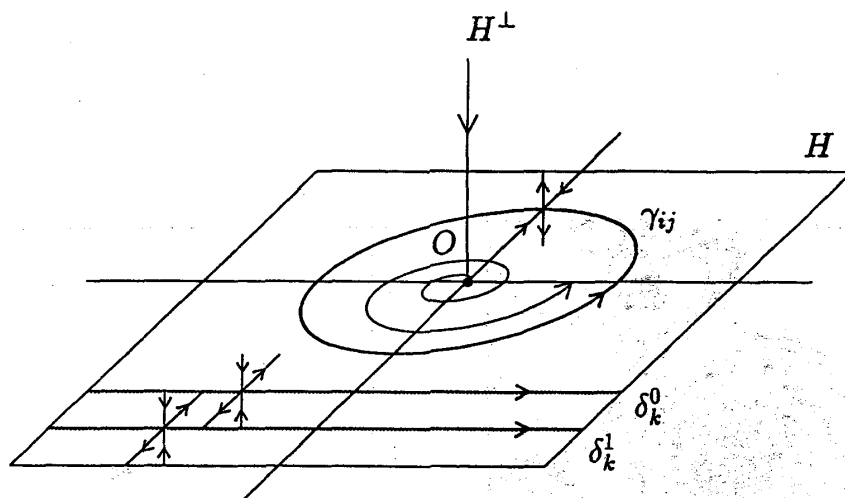
以上の解析より, $\sigma = 3.5$ の時の H 上でのダイナミクスの様子をまとめる (図 9).

- (1) 原点 O は H 方向に不安定で, $H^\perp$ 方向に安定である (表 1).
- (2) H 方向に不安定で, $H^\perp$ 方向に安定な RPO δ_k^0 と δ_k^1 が存在する (表 1).
- (3) H 方向に安定な UPO γ_{ij} が存在し, γ_{ij} は $H^\perp$ 方向には不安定である (表 1).

(1), (2) は $H^\perp$ 方向に安定なため, これらの近くを通る軌道は H に引き寄せられる. 十分に H に引き寄せられた軌道は, (1), (2) の H 方向の不安定性により, H 上でこれらから離れていく. (1), (2) の他にも, クライシス (BC) で壊れたカオスアトラクタに含まれていた H 方向に不安定な無数の RPO も同様の性質を持つものと思われる. 一方 (3) は, H 方向に安定なため, H の十分近くを通っていた軌道はここに引き寄せられる. しかし (3) は $H^\perp$ 方向には不安定なため, (3) の近くを動いていた軌道は H からしだいに離れていく. このような性質は $\sigma = 3.5$ のときだけでなく $\sigma = BC \sim PD_3$ の範囲で同様の性質をもつ.

5 カオスの遍歴現象

ここで, $\sigma = 3.5$ の時に見られるカオスの遍歴現象の様子について述べる.

図 9: $\sigma = 3.5$ における H 上のアトラクタの様子

5.1 入口集合と出口集合

Γ を H の双曲型不変集合とする. 安定多様体 $W^s(\Gamma)$ と不安定多様体 $W^u(\Gamma)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} W^s(\Gamma) &= \{x \in \mathbb{R}^6 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Gamma, \phi^t(x)) = 0\} \\ W^u(\Gamma) &= \{x \in \mathbb{R}^6 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Gamma, \phi^{-t}(x)) = 0\} \end{aligned} \quad (7)$$

このとき Γ が

$$W^u(\Gamma) \subset H \text{ and } W^s(\Gamma) \setminus H \neq \emptyset$$

を満たすとき, すなわち H 方向に不安定で, $H^\perp$ 方向に安定なとき, 入口集合とする. また,

$$H \subset W^s(\Gamma) \text{ and } W^u(\Gamma) \setminus H \neq \emptyset$$

のとき, つまり H 方向に安定で, $H^\perp$ 方向に不安定なとき, 出口集合とする. 分岐解析より, $\sigma = 3.5$ においては, 原点 O と RPO δ_k^0, δ_k^1 は H への入口集合となっており, UPO γ_{ij} は出口集合となっている. これらの存在により, H の近くを通っていた軌道は, 入口集合により H に引き寄せられる. H に十分引き寄せられた軌道は, ほぼ H 上のダイナミクスに従って動くようになる. H の十分近くを動いていた軌道は, やがて H 方向には安定な出口集合に引き寄せられる. 軌道が H の外から来たものであれば, $H^\perp$ 方向成分がゼロであることはないため, 出口集合のそばで動いている軌道は, 出口集合の $H^\perp$ 方向不安定性により $H^\perp$ 成分が増大し, H から離れていくという準吸引的な性質を H が持つことになる.

5.2 入口集合の存在

分岐解析から明らかになった入口集合 $O, \delta_k^0, \delta_k^1$ が本当に入口集合として機能しているかを確かめるために, 次のようなコンピュータシミュレーションを行なう. まず, $\mathbb{R}^2$ 上の

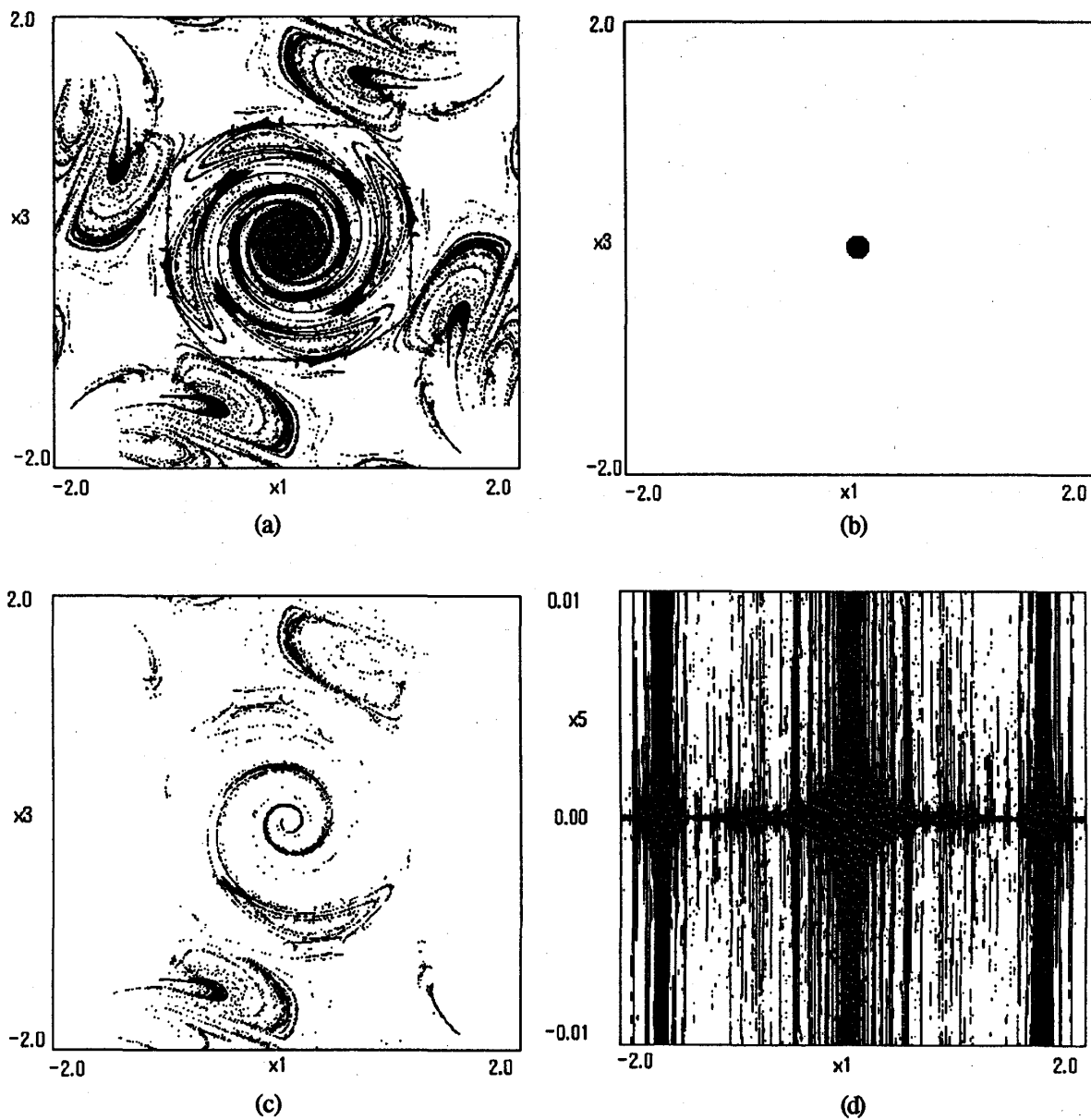


図 10: 超平面 H の準吸引的性質 (a) H に引き込まれていく領域 (b) O によって引き込まれる領域 (c) δ_1^0 , δ_1^0 とその近傍の RPO によって引き込まれる領域 (d) H に引き込まれていく領域 (H に垂直な方向)

矩形領域

$$D = \{(x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_3 \leq 2\}$$

と H から d_0 の距離にある 2 次元平面

$$\bar{H} = \{(x_1, 0, x_3, 0, d_0, 0) \mid (x_1, x_3) \in D\}$$

をとる. この $\bar{H}$ 上の点 $\mathbf{x}_s = (x_1, 0, x_3, 0, d_0, 0)$ から出発した点は, ある時刻 t に $\phi^t(\mathbf{x}_s)$ にあるとする. この点と H との距離を

$$d_t(x_1, x_3) = \text{dist}(H, \phi^t(\mathbf{x}_s))$$

とする. ある時間 T を決め, そのとき

$$\begin{aligned} 0 \leq d_T(x_1, x_3) \leq 0.001 \quad \text{かつ} \\ 0 \leq d_t(x_1, x_3) < 0.1 \quad \text{for } 0 < t < T \end{aligned} \quad (8)$$

という条件を満たした点を (x_1, x_3) 平面にプロットする. 図 10(a) は, $d_0 = 0.01$, $T = 20$ とした時の初期値平面である. この図で, 黒い部分が入口集合に相当しており, 入口集合はフラクタル的な性質を持っていることがわかる. また, 図の対称性は系の対称性 (式 (6)) によるものである. 次に, 原点 O と RPO δ_k^0 , δ_k^1 が入口集合になっているということを確かめるために, 次のようなコンピュータシミュレーションを行なった. まず, 次のような原点 O のまわりの半径 $r (= 0.1)$ の近傍 B_r を考える.

$$B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6 \mid |\mathbf{x}| \leq r\}$$

図 10(b) は点 $\mathbf{x}_s$ を出発した軌道が B_r を通過し, (8) を満たした点をプロットしたものであり, これは原点 O により H に引き寄せられた点の集合である. さらに RPO δ_k^0 , δ_k^1 の半径 $r (= 1)$ の管状近傍 T_r を考える.

$$T_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^6 \mid \text{dist}(\delta_k^0 \cup \delta_1^1, \mathbf{x}) \leq r\}$$

図 10(c) は点 $\mathbf{x}_s$ を出発し, δ_1^0 , δ_1^1 に対応する T_r を通り (8) を満たした点をプロットしたものである. すなわち, δ_1^0 , δ_1^1 およびその近傍により H に引き寄せられた点の集合である. この図を 90° ずつ回転させれば, $k = 2, 3, 4$ の時の δ_k^0 , δ_k^1 とその近傍により引き寄せられる点の集合が得られることがわかる. 系の対称性から, 90° ずつ回転させて得られた 4 枚の図と, 図 10(b) を重ね合わせれば, 図 10(a) と同様の図が得られることがわかり, H の入口集合が原点 O と RPO δ_k^0 , δ_k^1 とその近傍の RPO から成ることがわかる.

図 10(d) は矩形領域を

$$D = \{(x_1, x_5) \in \mathbf{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2, -0.01 \leq x_5 \leq 0.01\}$$

とし, H に対して垂直な 2 次元平面

$$\bar{H} = \{(x_1, 0, 0, 0, x_5, 0) \mid (x_1, x_5) \in D\}$$

をとる. この $\bar{H}$ 上に初期点 $\mathbf{x}_s = (x_1, 0, 0, 0, x_5, 0)$ をとり, 条件 (8) を満たした点を (x_1, x_5) 平面にプロットしたものである. この図においても, H (図中 $x_5 = 0$) へ引きつけられる部分と, 離れていく部分が超平面 H の近くで複雑に分布している. 図 10(a), (d) より, 入口集合がリドル構造になっていることがわかる.

5.3 はじき飛ばし機構

次に、出口集合 γ_{ij} から H の外へ出ていった軌道の振舞いについて述べる．表 1 より γ_{ij} の不安定方向は 1 次元なので、 γ_{ij} の不安定多様体 $W^u(\gamma_{ij})$ は 2 次元である． H の外に存在するある平衡点 $P_1 = (0, 0, -2, 0, 2, 0)$ の固有値は、

$$-0.5 \pm 2.1679i, -1.0, -2.7803, 0.0, 1.7803$$

であり、安定次元 4、中立次元 1、不安定次元 1 なので、 P_1 の安定中心多様体 $W_c^{sc}(P_1)$ は 5 次元である．したがって $\mathbf{R}^6$ において、2 次元多様体 $W^u(\gamma_{ij})$ と 5 次元多様体 $W_c^{sc}(P_1)$ は横断的に交わる．これにより、 $W^u(\gamma_{ij})$ 上のある点 z_0 の軌道が $W_c^{sc}(P_1)$ にのるとき、 $W^u(\gamma_{ij})$ 上に z_0 に近い 2 点 z_1, z_2 がとれ、この z_1, z_2 の軌道は点 P_1 の近傍で $W_c^{sc}(P_1)$ に対して反対側にはじき飛ばされる (図 11)．この構造は $W^u(\gamma_{ij})$ と $W_c^{sc}(P_1)$ の交わりが普遍的であることより、 σ を動かしても壊れることはない．このようなことは、 P_1 以外の無数に存在する平衡点に対しても形成されていることが考えられる． $W^u(\gamma_{ij})$ に沿って H から離れた軌道は、このはじき飛ばし機構により鋭敏な初期値依存性を持つことになる．

次に、このはじき飛ばし機構の存在を確認する． W_{11}^u 上に 2 点

$$\begin{aligned} z_1 &= (0.000000, 2.523347, -0.526841, 0.483716, 0.137668, -0.368000), \\ z_2 &= (0.000000, 2.523110, -0.527032, 0.484083, 0.137944, -0.368652) \end{aligned}$$

をとると、 z_1, z_2 の 5 次元平面

$$K_- = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbf{R}^6 \mid x_1 = 0, x_3 \leq 0\}.$$

への 2 回りターンマップは

$$\begin{aligned} z'_1 &= (0.000000, 1.956171, -1.981411, -0.785136, 2.018764, 1.575670), \\ z'_2 &= (0.000000, 1.952832, -1.990873, -0.799059, 2.030582, 1.597385) \end{aligned}$$

となる． $P_1(0, 0, -2, 0, 2, 0)$ の安定中心多様体 $W_c^{sc}(P_1)$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{x} - P_1) &= 0, \\ \mathbf{a}_1 &= (0.595131, 0.214053, 0.595131, 0.214053, -0.420821, -0.151358) \end{aligned}$$

となり、この時の z'_1, z'_2 の符号つき距離は

$$\begin{aligned} \text{dist}(z'_1) &= \mathbf{a}_1 \cdot (z'_1 - P_1) / |\mathbf{a}_1| = -0.015340 < 0 \\ \text{dist}(z'_2) &= \mathbf{a}_1 \cdot (z'_2 - P_1) / |\mathbf{a}_1| = 0.002246 > 0 \end{aligned}$$

となり、符号が逆向きになっていることがわかる．これにより、 $W_c^{sc}(P_1)$ を打つような $W^u(\gamma_{ij})$ 上の点 z_0 が存在し、点 z'_1, z'_2 は反対側にはじき飛ばされることがわかる．

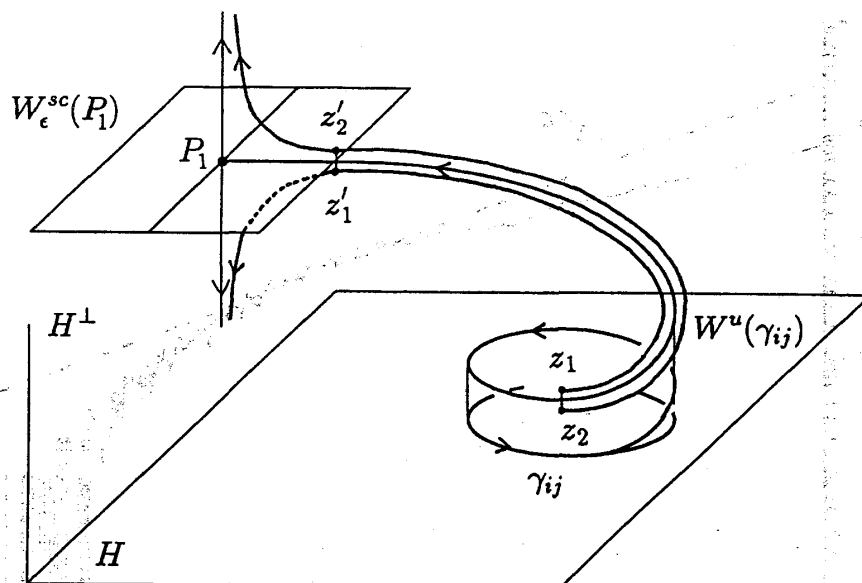


図 11: はじき飛ばしのメカニズム

5.4 カオスの遍歴のメカニズム

以上の結果から、この系におけるカオスの遍歴現象のメカニズムは以下ようになる。 H の入口集合 O , δ_k^0 , δ_k^1 のそばを軌道が通ると、入口集合の吸引的性質により軌道は H に引き寄せられる。 H に十分近づいたアトラクタは、ほぼ H 上のダイナミクスに従い、 H の十分近くをさまよう。しばらくすると、軌道は H 上で安定な出口集合 γ_{ij} に引き寄せられる。出口集合のそばを動いているうちに、軌道の $H^\perp$ 方向成分が γ_{ij} の $H^\perp$ 方向不安定性により増加し、 γ_{ij} の不安定多様体 $W^u(\gamma_{ij})$ に沿って軌道は H から離れていく。 $W^u(\gamma_{ij})$ は H の外に無数に存在する不安定平衡点の安定中心多様体 $W^s_\epsilon(P)$ と横断的に交わっているため、それによりいろいろな方向にはじき飛ばされ、鋭敏な初期値依存性をもつようになる。ここで、 H に引き寄せられている状態、すなわち対角位置にある PLL が逆相に同期している状態が“秩序状態”にあたり、 H を離れ、6次元空間内をさまよっている状態、すなわち同期が外れている状態が“遷移状態”となる。

6 ラミナー状態の継続時間の分布

上で述べた $\sigma = 3.5$ で見られる現象と良く似た現象として、オンオフ間欠性 [6,7] がある。オンオフ間欠性の研究において、ラミナー状態（秩序状態）の継続時間 τ の分布 $\rho(\tau)$ は漸近的に

$$\rho(\tau) \simeq \tau^{-\frac{3}{2}} \quad (9)$$

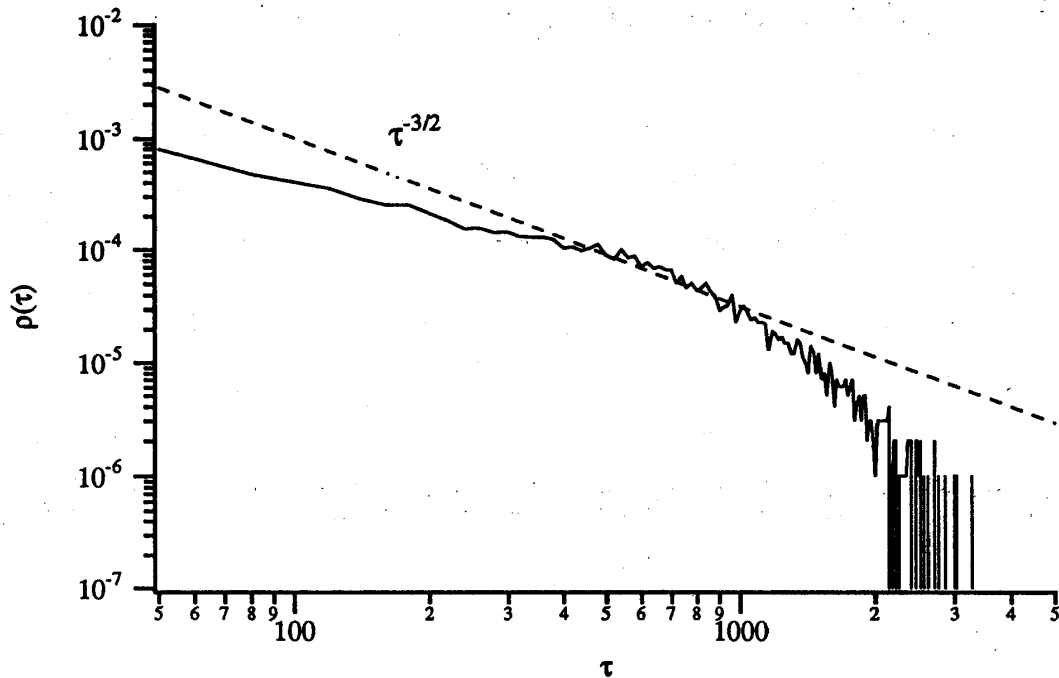


図 12: $\sigma = 3.5$ のときのラミナー長の分布

となることが知られている。図 12 は $\sigma = 3.5$ におけるラミナー状態の継続時間の分布で、この場合においてもオンオフ間欠性と同様なラミナー状態の継続分布のべき則 (9) にほぼしたがっている。

今後、いろいろな統計的性質を調べ、オンオフ間欠性との比較検討を行う必要がある。

7 まとめ

本研究では 4 つの環状結合 PLL 系に見られるカオスの遍歴現象について、コンピュータシミュレーションと回路実験により観察した。さらに、そのメカニズムを分岐解析により明らかにした。この系は 6 次元空間内に周期的に 4 次元超平面 H が無数に存在する。さらに超平面 H の外には不安定平衡点が無数に存在している。超平面 H に入口集合が存在することにより、 H の外をさまよっていた軌道は H に引き寄せられる。 H の十分近くに引き寄せられた軌道は H 上の出口集合から H の外へ離れていく。 H から離れていった軌道は、 H の外に無数に存在する不安定平衡点の固有平面によりさまざまな方向へはじき飛ばされる。この機構により、軌道は鋭敏な初期値依存性を持つことがわかる。この様に、超平面 H と不安定平衡点の固有平面の存在が、カオスの遍歴現象が発生するために大きな役割をはたしている。

参考文献

- [1] K. Kaneko, "Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements," *Physica* 41D, pp.137-172, 1990.
- [2] T. Ikegami and K. Kaneko, "Computer symbiosis — emergence of symbiotic behavior through evolution," *Physica* 42D, pp. 235-243, 1990.
- [3] 長谷川, 遠藤, "4 個の環状結合 PLL に発生する分岐とカオス," 電子情報通信学会技術研究報告, NLP95-110, pp. 33-40, 1996-03.
- [4] 長谷川, 小室, 遠藤, 五十嵐, "4 個の環状結合 PLL にみられるカオスの遍歴現象の解析," 電子情報通信学会技術研究報告, NLP96-106, pp. 9-16. 1996-12.
- [5] H. Tanaka and S. Oishi, "Synchronization limit and complex dynamics onset in a class of phase models," *NOLTA '95 Proc. of Vol.2*, pp. 913-916, 1995-12.
- [6] N. Platt, E. A. Spiegel and C. Tresser, "On-off intermittency: A mechanism for bursting," *Phys. Rev. Lett.* 70, pp. 279-282, 1993.
- [7] J. F. Heagy, N. Platt and S. M. Hammel, "Characterization of on-off intermittency," *Phys. Rev. E* 49, pp. 1140-1150, 1994.