

## モード解の構造安定性

京大理 荒木 圭典 (Keisuke Araki)  
藤 定義 (Sadayoshi Toh)  
川原 琢治 (Takuji Kawahara)

### 1 CHM 方程式とモード解

Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式

$$\zeta_t + [\phi, \zeta + \nu y] = 0, \quad (1)$$

(ただし、 $\phi$  は流れ関数、 $\zeta = (\Delta - 1)\phi$ 、 $[\cdot, \cdot]$  はヤコビアンである) は、低 $\beta$ プラズマ中のドリフト渦や惑星大気の準地衡流 ( $\beta$  平面近似) を記述する方程式として提案された。[1,2] (これ以降、 $\zeta$  を渦度、 $\zeta + \nu y$  をポテンシャル渦度と呼ぶことにする。) この方程式には、ヤコビアン型の非線形項に由来する渦運動的なダイナミクスと線形項による波動的なダイナミクスが共存しており、渦と波の相互作用を調べるモデル方程式として、これまでにさまざまな研究がなされている。

この方程式には、以下に挙げる保存量が存在することが知られている。

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi) &= \int_D \phi d\mathbf{r}, & E &= \frac{1}{2} \int_D [\phi^2 + (\nabla \phi)^2] d\mathbf{r}, \\ P_x(\phi) &= \int_D x \phi d\mathbf{r}, & \Omega &= \frac{1}{2} \int_D [(\nabla \phi)^2 + (\Delta \phi)^2] d\mathbf{r}, \\ P_y(\phi) &= \int_D y \phi d\mathbf{r}, & C_f &= \int_D f(\zeta + \nu y) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

ただし  $P_x(\phi)$  の保存は  $\Gamma(\phi) = 0$  のときに成り立つ。最後の積分  $C_f$  は、(Lie 代数に由来する用語で) casimirs と呼ばれる第 1 積分で、任意の関数  $f$  に対するポテンシャル渦度の汎関数積分なので、無限個存在する。これらは渦運動に対する拘束条件として働くが、完全可積分系にはなっていない。[3]

CHM 方程式には、モード解と呼ばれる、 $x$  軸に平行な方向に伝播する定常進行渦解が存在し、次式で与えられる。[4]

$$\phi_M(r, \theta) = -r_0 U f_M(r) \sin \theta. \quad (2a)$$

ここで、 $U$  はモード解の進行速度で、 $x$  軸正方向に向かう場合を正とする。また、 $f_M$ ,  $\rho$  は

$$f_M(r) = \begin{cases} \frac{K_1(\rho r)}{K_1(\rho r_0)} & r \geq r_0 \\ \left(1 + \frac{\rho^2}{\lambda^2}\right) \frac{r}{r_0} - \frac{\rho^2}{\lambda^2} \frac{J_1(\lambda r)}{J_1(\lambda r_0)} & r \leq r_0 \end{cases}, \quad (2b)$$

$$\rho^2 = 1 + \frac{\nu}{U}, \quad (2c)$$

であり、 $\lambda$ は次の接続条件式により与えられる定数である。

$$\frac{\lambda r_0 J_1(\lambda r_0)}{J_2(\lambda r_0)} + \frac{\rho r_0 K_1(\rho r_0)}{K_2(\rho r_0)} = 0. \quad (2d)$$

以上の式で  $J_1$ ,  $J_2$  は Bessel 関数、 $K_1$ ,  $K_2$  は変形 Bessel 関数である。この解は次の偏微分方程式より導かれる。

$$\begin{cases} \Delta\phi - \rho^2\phi = 0 & r \geq r_0, \\ \Delta\phi + \lambda^2\phi + U(\lambda^2 + \rho^2)y = 0 & r \leq r_0. \end{cases} \quad (3)$$

以後簡単のため、準地衡流近似に従って、 $x$  軸正方向を「東」、 $y$  軸正方向を「北」と呼ぶことにする。よって、モード解をその進行方向に従って「東向き」「西向き」と呼んで区別することにする。また、線形項の影響は、おもにポテンシャル渦度の非一様項、 $\nu y$  の影響によるので、これを「 $\beta$ 平面の効果」と呼ぶことにする。

この解の安定性は、この方程式における重要な問題の一つとして、これまでに多くの研究がなされてきた。しかし、最近 Nycander によって、これまでの線形安定性の証明には、すべて不備があることが示された。[5] このような解析的アプローチの状況に対して、数値計算の側からのアプローチでは、東向きモードは安定、西向きは不安定であるという結果が示唆されている。次節において、この安定性に関する定性的な議論と、渦糸近似モデルによるアプローチを紹介し、安定性の意味と渦糸近似の限界について考察する。

## 2 渦糸対による近似とその限界

数値的アプローチの側では、モード解に対する摂動として、主に傾斜配位 (tilted configuration) 型の摂動、すなわち元の解を、緯線に対してわずかに傾けるような摂動を考える。この摂動に対する解の安定性の評価については、Makino *et al.* などの著者達が定性的な議論を行っている。[6] 以下、その評価法を簡単にまとめよう。

この議論の中心は、式 (1) がポテンシャル渦度に関する保存則を表現する式であるという特徴を利用することにある。 $\beta$ 平面の効果である南北方向の非一様項、 $\nu y$ 、が存在するために、系の等方性による縮退が解け、モードの傾斜配位に対する安定性が、東向きと西向きでは異なっていることが導かれる。

東向きの場合、傾斜配位による北進 (南進においても議論は同様) の過程において、 $\nu y$  のために、北側の渦は  $\zeta$  を減らし、南側の渦は  $\zeta$  を強めるので、北進の速度は減速され、南側の渦を軸とした回転運動により南向きに方向が変わる。つまり  $\nu y$  は傾斜配位を弱める方向に働く。従って、長時間にわたる運動は緯線を軸とした蛇行運動となることが、容易に予想される。

これに対して、西向きの場合、この項は逆に傾斜配位を強める方向に働くので、東向きの様な大雑把な定性的議論による予測が成り立たない。

上記の描像を確かめるための第 1 次の近似として、正負それぞれの渦を渦糸によって近似し、渦糸対についてのダイナミクスを調べよう。Hobson は、Zabusky and McWilliams の渦糸近似を利用して、渦糸対に対する次の方程式系を導いた。[8]

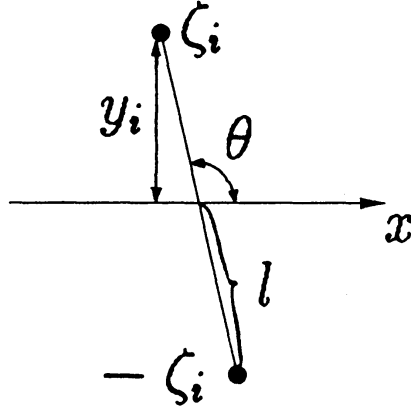


図 1. 渦糸モデルのパラメーター:  $l$  および  $\eta = (\zeta_i/\nu) + y_i$  はこの系の保存量である。

$$\begin{cases} \dot{y}_c = -l(\eta - l \sin \theta) \cos \theta \\ \dot{\theta} = -y_c \\ \dot{x}_c = l(\eta - l \sin \theta) \sin \theta. \end{cases} \quad (4)$$

ここで  $(x_c, y_c)$  は渦糸対の中心の座標、 $l, \theta$  はそれぞれ渦糸間の距離の半値、 $x$  軸正方向から測った角度、そして  $\eta$  は初期の北側の渦の規格化ポテンシャル渦度、 $\eta = (\zeta_i/\nu) + y_i$  (ただし  $\zeta_i, y_i$  は初期の渦度と渦糸の位置) である。(図 1) 速度  $U$  で進む解に対して、時間は  $U/l(\eta - l)$  によって規格化されている。この系には  $y_c$  と  $\theta$  に関する Hamiltonian

$$H(y_c, \theta) = \frac{1}{2}y_c^2 - l\eta \sin \theta - \frac{1}{4}l^2 \cos 2\theta, \quad (5)$$

が存在する。(相図は図 2) 相図より  $|\eta| < l$  の場合には、不自然な解 (一定の角度で傾いたまま進行する解) が存在するので、以下  $|\eta| > l$  を仮定する。

渦糸対の運動について議論する前に、モード解と渦糸対のパラメーターとの間の対応をはっきりとさせておこう。 $\eta$  および  $l$  は、次式によって定義するのが最も自然であろう。

$$\eta - l = \frac{2 \int_{D_+} \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\nu S}, \quad l = \frac{\int_{D_+} r \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int_{D_+} \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}. \quad (6)$$

ここで  $D_+$  は  $\zeta$  の符号が正になる領域、 $S$  は規格化のための「双極型構造の占める面積」である。

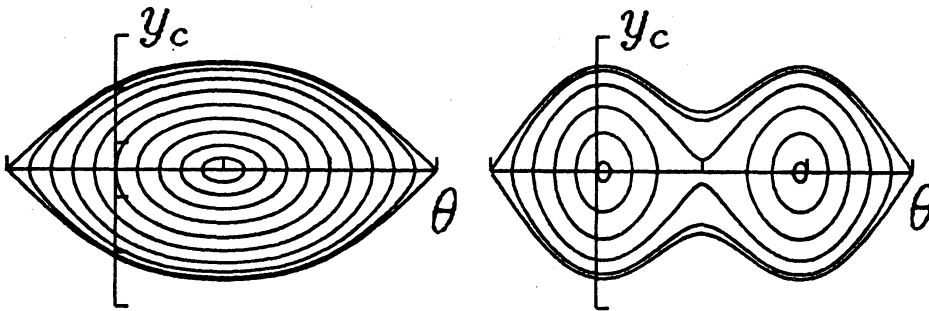


図 2. 渦糸モデルの Hamiltonian の相図:  $-\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$  で、セパトリクス内部の軌道のみを描いてある。(a)  $l = 1, \eta = 2$ . 安定平衡点は  $(\pi/2, 0)$  (b)  $l = 1, \eta = 0.1$ . 傾斜した渦対が安定。 $U$  が負の相図は  $\theta$  の位相が  $\pi$  ずれたものになる。

さて、この渦糸対モデルを用いて定常解のまわりでの解の振舞いを調べよう。定常進行渦解は  $y_c = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  によって表される。これを微小角  $\delta$  だけ傾けたとき、方程式を  $\delta$  の 2 次まで展開して、

$$\begin{cases} \dot{y}_c = \delta l(\eta - l) \\ \dot{\delta} = -y_c \\ \dot{x}_c = (1 - \frac{1}{2}\delta^2)l\eta - (1 - \delta^2)l^2, \end{cases} \quad (7)$$

$$H = \frac{1}{2}y_c^2 + \frac{1}{2}l(\eta - l)\delta^2 - l\eta + \frac{1}{4}l^2, \quad (8)$$

を得る。

東向きの解、 $\eta > 0$ ,  $U > 0$ , に対して、線形化した方程式の固有値は純虚数、 $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{l(\eta - l)}$ , であり、相図における軌道は楕円となる。時間に関する規格化を考慮すると、傾いた渦糸対の振動の周波数は

$$\omega_{\delta_0}^2 = \frac{U^2}{l(\eta - l)},$$

で与えられる。これに式 (6) を代入すると、

$$\omega_{\delta_0}^2 = \frac{U^2 \nu S}{2 \int_{D_+} r \zeta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}},$$

を得る。この結果は Nycander and Ishichenko によって得られた結果と、正確に一致しており、Makino *et al.* の数値計算の結果をうまく説明している。[9]

これに対して、西向きの解、 $\eta < 0$ ,  $U < 0$ , に対する線形化した方程式の固有値は実数、 $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{l(|\eta| + l)}$ , であり、相図における定常解近傍の軌道は双曲線となる。したがって西向きの定常解は、渦対中心の軌道と傾きの運動に関して、不安定であることが結論される。このとき軌道の不安定性の成長率は

$$\alpha_{\delta_0} = \frac{U}{\sqrt{l(|\eta| + l)}},$$

で与えられる。図 2 の (a) において西向きの渦糸対は  $\theta = -\pi/2$  に対応しているので、西向きの傾いた渦糸対は、傾斜側の渦を軸とした周期的なジグザグ運動 (tumbling) を行う。これは数値的にも確かめられている。[7]

以上の考察により、渦糸対による近似モデルは、定性的な考察に基づいた議論の結果をよく再現していると言えよう。ただし、ひとつ注意すべき点は、この不安定性が、渦対の中心の軌道に関するものであることである。これまでの安定性の定性的な議論においては、ときおり渦対の軌道の不安定性と双極型構造自身の不安定性 (渦対の崩壊) との混同が見受けられる。上記の議論では、数値計算によって示唆されているような、渦対構造自身の不安定性に対するいかなる結論も引き出せない。なぜなら、渦対の構造を決めるパラメーターである、渦糸対の間隔  $l$  と規格化ポテンシャル渦度  $\eta$  は、このモデルの保存量であるのに対して、式 (6) で与えられる量は時間発展において変化し得るからである。

渦糸対の間隔  $l$  と規格化ポテンシャル渦度  $\eta$  が、保存量であるために、このモデルは、モーメント  $P_x$  を保存しないという大きな欠陥がある。これは次の例を考えることによって容易に判る。CHM 方程式系において  $P_x$  は、

$$\begin{aligned} P_x(\phi) &= \int_D x \phi dr \\ &= \int_D x(1 - \Delta) \phi dr \\ &= -P_x(\zeta), \end{aligned}$$

であるので、渦度に対するモーメントでもある。モード解は  $\Gamma(\phi) = 0$  を満たすので、渦度のモーメントは運動の保存量である。一方、渦糸対近似モデルでは、傾いた渦対の運動において、振動の半周期後に渦対の傾き  $\theta$  は完全に逆転する。これによって渦糸対のモーメント、 $\tilde{P}_x = \zeta(x_+ - x_-)$ 、の符号も逆転することになり、元の系の性質と矛盾してしまう。(図 3)

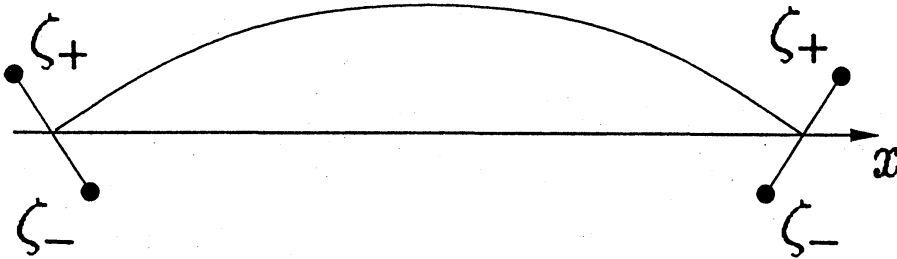


図 3. 渦糸モデルによるモーメントの非保存：渦糸モデルでは振動の半周期後にモーメントが逆転する。

この矛盾の原因は、連続的な渦度の分布を渦糸で置き換えることにより、保存式を導くための部分積分に関する条件が成り立たなくなることにある。このことは、モード解の運動を考える際に、その双極型構造 (1 次のモーメント) のみに注目するだけでは十分でないことを示唆している。以下で、われわれは多重極展開解析を導入し、モード解の分布の高次のモーメントのダイナミクスを考慮することにより、この解の双極型構造自身の安定性を考察する。

### 3 多重極展開解析

渦糸対のモデルによるモードの振舞いへのアプローチは、傾斜モードの運動を定性的によく再現しているものの、渦糸対の強さと大きさは変化せず、1 次のモーメントを保存しないので、モードの双極型構造そのものの安定性を評価することはできない。モードの構造安定性を評価するためには、系の保存則をふまえた上で、高次のモーメントを考慮する必要がある。この節ではモードの双極型構造の時間発展を記述するために、流れ関数の多重極展開を導入し、モーメントの時間発展を調べる。

流れ関数  $\phi(\mathbf{r}, t)$  は、渦度  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  を用いて次のように表される。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \zeta(\mathbf{r}', t) K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \quad (9)$$

ここで  $-(1/2\pi)K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  は Helmholtz 作用素、 $\Delta - 1$ 、の Green 関数である。

この式の右辺を形式的に以下のように多重極展開する。

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = & -\frac{K_0(r)}{2\pi}\Gamma(\zeta) + \frac{K_1(r)n_\alpha}{2\pi}P_\alpha(\zeta) \\ & -\frac{K_2(r)n_\alpha n_\beta}{4\pi}Q_{\alpha\beta}^{(1)}(\zeta) + \frac{K_1(r)n_\alpha n_\beta}{4\pi r}Q_{\alpha\beta}^{(2)}(\zeta) \\ & +(\text{higher order moment terms}).\end{aligned}\quad (10)$$

ここで $\Gamma$ ,  $P_\alpha$ ,  $Q_{\alpha\beta}^{(1)}$ ,  $Q_{\alpha\beta}^{(2)}$ はそれぞれ0次、1次および2次のモーメントであり、次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}\Gamma(\zeta) &= \int_D \zeta(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', & P_\alpha(\zeta) &= \int_D x'_\alpha \zeta(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \\ Q_{\alpha\beta}^{(1)}(\zeta) &= \int_D x'_\alpha x'_\beta \zeta(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', & Q_{\alpha\beta}^{(2)}(\zeta) &= \delta_{\alpha\beta} \int_D r'^2 \zeta(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'.\end{aligned}\quad (11)$$

この展開において、展開の各次のモーメントの係数は変形 Bessel 関数、 $K_n(r)$ 、で与えられているので、 $r$ の大きい領域では各項とも指数関数的に減衰している。ゆえに通常の電磁気学における多重極展開のような、 $r$ の次数による項の大きさの評価を単純に持ち込めない点において、通常の展開とは異なっている。ここでは、展開を2次まででやめているが、これはやや恣意的である。しかし後に見るように、傾斜モードの構造安定性を評価するためには、これで十分である。

モードの中心まわりの対称性を評価するために、モーメント積分を極座標系の2<sup>l</sup>重極展開の形に書き直す。式(10)に $n_x = \cos\theta$ ,  $n_y = \sin\theta$ を代入して、

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) = & -\frac{K_0(r)}{2\pi}q_0^0(\zeta) + \frac{K_1(r)}{2\pi}e^{\pm i\theta}q_1^{\pm 1}(\zeta) \\ & +\frac{K_0(r)}{4\pi}q_2^0(\zeta) - \frac{K_2(r)}{4\pi}e^{\pm 2i\theta}q_2^{\pm 2}(\zeta) \\ & +(\text{higher order moment terms}),\end{aligned}\quad (12)$$

を得る、ただし

$$\begin{aligned}q_0^0 &= \Gamma(\zeta), & q_1^{\pm 1} &= \frac{1}{2}\{P_x \mp iP_y\}, \\ q_2^0 &= \frac{1}{2}(Q_{xx}^{(1)} + Q_{yy}^{(1)}), & q_2^{\pm 2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(Q_{xx}^{(1)} - Q_{yy}^{(1)}) \mp iQ_{xy}^{(1)}\right],\end{aligned}\quad (13)$$

である。これ以降、 $|q_1^{\pm 1}|$ ,  $q_2^0$ ,  $|q_2^{\pm 2}|$ を、各々双極子、トレース、4重極子と呼び、 $D$ ,  $trQ$ ,  $qpQ$ と省略して書くことにする。

式(10)の両辺を時間で微分して、

$$\begin{aligned}\phi_t(\mathbf{r}) = & -\frac{K_0(r)}{2\pi}\Gamma(\zeta_t) + \frac{K_1(r)n_\alpha}{2\pi}P_\alpha(\zeta_t) \\ & -\frac{K_2(r)n_\alpha n_\beta}{4\pi}Q_{\alpha\beta}^{(1)}(\zeta_t) + \frac{K_1(r)n_\alpha n_\beta}{4\pi r}Q_{\alpha\beta}^{(2)}(\zeta_t) \\ & +(\text{higher order moment terms}),\end{aligned}\quad (14)$$

を得る。右辺の各モーメントに CHM 方程式 (1) を代入すると、おのこの

$$\Gamma(\zeta_t) = 0, \quad (15a)$$

$$P_x(\zeta_t) = \nu \Gamma(\phi), \quad (15b)$$

$$P_y(\zeta_t) = 0, \quad (15c)$$

$$Q_{xx}^{(1)}(\zeta_t) = 2\nu P_x(\phi) - 2 \int_D uv d\mathbf{r}', \quad (15d)$$

$$Q_{yy}^{(1)}(\zeta_t) = 2 \int_D uv d\mathbf{r}', \quad (15e)$$

$$Q_{xy}^{(1)}(\zeta_t) = \nu P_y(\phi) + \int_D (u^2 - v^2) d\mathbf{r}', \quad (15f)$$

$$Q_{\alpha\beta}^{(2)}(\zeta_t) = \delta_{\alpha\beta} 2\nu P_x(\phi). \quad (15g)$$

ここで、 $u, v$  は流体の速度で、 $u = -(\partial\phi/\partial y)$ ,  $v = (\partial\phi/\partial x)$  によって与えられる。これらの計算において、 $\phi$  が遠方では十分に速く 0 に近づく事を仮定した。部分積分の過程において、境界積分の被積分関数は 2 階までの導関数しか含まないので、モード解にもそのまま適用できる。

モード解の構造安定性を評価するためには、モードの中心に固定された座標系を用いて、モーメントの時間発展を追う必要がある。以下、平行移動する座標系でのモーメントの表式をまとめる。モード中心を原点とする系  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x - x_c, y - y_c)$  (ただし  $(x_c, y_c)$  は時間のみの関数) でのモーメントと元の系での表式との間には、

$$\Gamma(\phi(\tilde{\mathbf{r}})) = \Gamma(\phi(\mathbf{r})),$$

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\alpha}}(\phi) &= \int_D \tilde{x}_{\alpha} \phi(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{\mathbf{r}} \\ &= P_{\alpha}(\phi) - x_{c\alpha} \Gamma(\phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(1)}(\phi) &= \int_D \tilde{x}_{\alpha} \tilde{x}_{\beta} \phi(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{\mathbf{r}} \\ &= Q_{\alpha\beta}^{(1)}(\phi) - x_{c\alpha} P_{\beta}(\phi) - x_{c\beta} P_{\alpha}(\phi) + x_{c\alpha} x_{c\beta} \Gamma(\phi), \end{aligned}$$

が成り立っている。よって、両辺の時間微分を取って、

$$\dot{\Gamma}(\phi(\tilde{\mathbf{r}})) = 0, \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\tilde{x}}(\phi) &= \dot{P}_x(\phi) - \dot{x}_c \Gamma(\phi) \\ &= -(\nu + \dot{x}_c) \Gamma(\phi), \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\dot{P}_{\tilde{y}}(\phi) = -\dot{y}_c \Gamma(\phi), \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\tilde{x}\tilde{x}}^{(1)}(\phi) &= \dot{Q}_{xx}^{(1)}(\phi) - 2\dot{x}_c P_x(\phi) - 2x_c \dot{P}_x(\phi) + 2\dot{x}_c x_c \Gamma(\phi) \\ &= -2\nu P_x(\phi) + 2 \int_D uv d\mathbf{r}' - 2\dot{x}_c P_x(\phi) \\ &\quad + 2\nu x_c \Gamma(\phi) + 2\dot{x}_c x_c \Gamma(\phi), \end{aligned} \quad (16d)$$

$$\dot{Q}_{\tilde{y}\tilde{y}}^{(1)}(\phi) = \dot{Q}_{yy}^{(1)}(\phi) - 2\dot{y}_c P_y(\phi) + 2\dot{y}_c y_c \Gamma(\phi)$$

$$= -2 \int_D u v d\mathbf{r}' - 2\dot{y}_c P_y(\phi) + 2\dot{y}_c y_c \Gamma(\phi), \quad (16e)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\tilde{x}\tilde{y}}^{(1)}(\phi) &= \dot{Q}_{xy}^{(1)}(\phi) - \dot{x}_c P_y(\phi) - \dot{y}_c P_x(\phi) - y_c \dot{P}_x(\phi) \\ &\quad + (\dot{x}_c y_c + x_c \dot{y}_c) \Gamma(\phi) \\ &= -\nu P_y(\phi) - \int_D (u^2 - v^2) d\mathbf{r}' - \dot{x}_c P_y(\phi) - \dot{y}_c P_x(\phi) \\ &\quad + \nu y_c \Gamma(\phi) + (\dot{x}_c y_c + x_c \dot{y}_c) \Gamma(\phi), \end{aligned} \quad (16f)$$

を得る、ただしドットは時間微分である。

この移動する座標系においてトレースの時間微分、 $\tilde{tr}\dot{Q}$ , は

$$\begin{aligned} \tilde{tr}\dot{Q} &= -\nu P_x(\phi) - \dot{x}_c P_x(\phi) - \dot{y}_c P_y(\phi) \\ &\quad + (\nu x_c + \dot{x}_c x_c + \dot{y}_c y_c) \Gamma(\phi), \end{aligned}$$

である。 $\Gamma(\phi) = 0$  のとき、両辺を時間について積分して、移動座標系におけるトレースの式、

$$\tilde{tr}Q = -\nu P_x(\phi)t - (x_c(t) - x_c(0))P_x(\phi) - (y_c(t) - y_c(0))P_y(\phi), \quad (17)$$

を得る。

この式より、 $x$  モーメント  $P_x$  が 0 でないならば、構造の 2 次の軸対称成分  $\tilde{tr}Q$  は必ず成長する、という重要な結論が得られる。

## 4 モードン解への応用

前節の多重極展開を用いて、構造不安定を「初期に存在しない対称性が時間と共に成長すること」と定義しよう。これによって、渦糸近似モデルでは捉えきれなかった、高次モーメントのダイナミクスからの、組織構造への寄与を評価できる。

前節で得られた結果をモードン解に適用してみよう。モードン解は式 (2a) をみただすから、モーメントは

$$\Gamma(\phi_M) = 0, \quad (18a)$$

$$P_x(\phi_M) = 0, \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} P_y(\phi_M) &= -\pi r_0 U \int f_M(r) r^2 dr \\ &\equiv P_M, \end{aligned} \quad (18c)$$

$$Q_{\alpha\beta}(\phi_M) = 0, \quad (18d)$$

となる。これらの式より、モードン解は双極型の対称性のみを持ち、軸対称あるいは 4 重極型の構造は全く持っていないということが判る。この結果を式 (17) に適用してみると、右辺の初項と第 2 項は  $P_x(\phi_M) = 0$  なので 0 になる。第 3 項はモードン解には  $y$  方向の速度が無いので、やはり 0 になる。以上よりモードン解ではトレースは 0 のままで保存される。

一方これに対して、角度 $\delta$ だけ傾けたモード解は、式(2a)の $f_M$ を用いて、

$$\begin{aligned}\phi_T(r, \theta) &= \phi_M(r, \theta - \delta) \\ &= -r_0 U f_M(r) \sin \theta \cos \delta + r_0 U f_M(r) \cos \theta \sin \delta,\end{aligned}$$

と表される。したがって、双極モーメントは

$$P_{Tx} = P_M \sin \delta, \quad P_{Ty} = P_M \cos \delta,$$

となる。また、傾斜モードは $y$ 方向の速度を持つ。ゆえに、傾斜モードのトレースは式(17)より、時間と共に単調に増加していく。

トレースが軸対称成分の大きさの指標であることより、傾斜モードでは初期に存在しない軸対称成分が時間と共に発展する。したがって傾斜モードはわれわれの定義における「構造不安定」である。この結論は $P_x \neq 0$ であることに由来するので、モード解は西向き東向き共に「有限な角度の傾斜型の摂動に対して構造不安定」である。傾斜モードにおける $P_x$ の存在が高次のモーメントの時間発展に影響を及ぼすことは、渦糸対近似モデルでは $P_x$ の時間発展が系の保存則に矛盾することと考えあわせると、自然な帰結である。

この双極型構造の崩壊と軸対称成分の成長の割合は、傾斜モードがCHM方程式の厳密解ではないので、適当な近似や数値計算等の補助的な手段を用いて評価しないと行けない。東向きの場合、 $x_c(t) \simeq Ut$ ,  $y_c \simeq 0$ によって荒く近似すると、トレースの成長は

$$\tilde{tr}Q \simeq \delta_0 P_M [(\nu + U)t],$$

と見積もることができる。

## 5 まとめ・モード解の安定性について

前節において、傾斜モードは「構造不安定」であることが示された。では軸対称成分の成長はいったい何が原因なのだろうか。

数値実験の結果を見ると、傾斜モードは東向き西向き共に、周期の安定性の違いこそあるものの、ほとんど周期的な運動をする。この周期的な運動がモードの後方に線形波を引き起こし、モードからモーメントを奪っていくという描像が考えられる。この描像にしたがえば、モードの主要な双極型構造は線形波の放射と共に衰弱するので、モード解は「構造不安定」を越えて、非線形不安定であると予想される。

## References

- [1] A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 87 (1978).
- [2] A. Hasegawa, C. G. MacLennan, and Y. Kodama, Phys. Fluids **22**, 2122 (1979).
- [3] L. I. Piterbarg and E. I. Schulman, Phys. Lett. **140A**, 29 (1989).

- [4] V. D. Larichev and G. M. Reznik, Dokl. Akad. Nauk SSSR **231**, 1077 (1976).
- [5] J. Nycander, Phys. Fluids A **4**, 467 (1992).
- [6] M. Makino, T. Kamimura, and T. Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn. **50**, 980 (1981).
- [7] M. Kono and W. Horton, Phys. Fluids B **3**, 3255 (1991).
- [8] D. D. Hobson, Phys. Fluids A **3**, 3027 (1991).
- [9] J. Nycander and M. B. Ishichenko, Phys. Fluids B **2**, 2042 (1990).