

Transformation groups on Z_2 -cohomology spheres

with a codimension one orbit

東北大 教養 麻生 透

M を n 次元連結閉多様体, G をコンパクト連結リイ群とし, G の M への可微分作用 $G \times M \rightarrow M$ が与えられ次の条件を満たしているとして仮定する。

(AI) ある軌道 $G \cdot x$ ($x \in M$) が存在して, $\dim G \cdot x = n-1$.

この仮定 (AI) をみたす作用 (G, M) の分類問題については, M が球面 S^n (n : 偶数 ≥ 4 または n : 奇数 > 3), ユホモロジー複素射影空間, ユホモロジー四元数射影空間の場合に, それぞれ Wang [5], 内田 [4], 岩田 [3] によって行なわれている。

本稿では, M が Z_2 -ユホモロジー球面, すなわち

(AII) M は単連結かつ $H^*(M; Z_2) \cong H^*(S^n; Z_2)$

の場合について, (AI) をみたす作用 (G, M) の分類を行なうのが目的である。

§1. G 分解

作用 (G, M) が (AI) をみたし, M は単連結と仮定する。 G/K を主軌道とすると $\dim G/K = n-1$ ($n = \dim M$) で, かつ丁度2つの特異軌道 $G/K_1, G/K_2$ が存在して, $K \subset K_1 \cap K_2$ と選ぶことができる。さらに可微分スライス定理を用いると, M を G 多様体として次の様に分解できる。

$$(*) \quad M = M(\alpha) = X_1 \cup_{\alpha} X_2, \quad X_s = G \times_{K_s} D^{k_s},$$

$$k_s = n - \dim G/K_s \geq 2 \quad (s=1, 2).$$

ここで, K_s は k_s 次元球体 D^{k_s} 上にスライス表現 $\rho_s: K_s \rightarrow O(k_s)$ によって作用し, 境界 ∂D^{k_s} 上に推移的に作用している。また, $\alpha \in N(K, G)$ ($: K$ の G における正規化群) に対して, G 同変微分同相写像 $\alpha: \alpha X_1 = G/K \rightarrow G/K = \alpha X_2$ ($\alpha X_s = G \times_{K_s} \partial D^{k_s} = G/K$) を $\alpha(gK) = g\alpha^{-1}K$ ($g \in G$) と与え, αX_1 と αX_2 を同一視している。

§2. 例

(AI) と (AII) をみたす G 作用 (G, M) として, $M = S^n$ で G がある表現 $\psi: G \rightarrow SO(n+1)$ によって作用する線型作用 (G, S^n, ψ) のうちで (AI) をみたすものが考えられる。(例えば, $n+1 = n_1 + n_2$ に対して $(SO(n_1) \times SO(n_2), S^n, \rho_{n_1} \oplus \rho_{n_2})$ 等がある。) また W.C. Hsiang と W.Y. Hsiang [2] により次の例が知られている。

例1. 奇数 $r \geq 1$ に対して, $(2m-1)$ 次元多様体

$$W^{2m-1}(r) = \{ (z_0, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1}; z_0^r + z_1^2 + \dots + z_m^2 = 0, \\ |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_m|^2 = 2 \}$$

を考えると, W はホモロジー球面である。 $SO(m) \times S^1$ の部分群 G に対して, $W^{2m-1}(r)$ 上の G 作用を

$$(X, \chi) \cdot (z_0, z_1, \dots, z_m) = (\chi^2 z_0, (\chi^r z_1, \dots, \chi^r z_m)^t X)$$

$$((X, \chi) \in G \subset SO(m) \times S^1, (z_0, z_1, \dots, z_m) \in W^{2m-1}(r))$$

と定義する。この G 作用 $(G, W^{2m-1}(r))$ は

$$G = SO(m) \times S^1, \text{ Spin}(7) \times S^1 (m=8) \text{ または } G_2 \times S^1 (m=7)$$

のとき (AI) を満たす。特に $(G, W^{2m-1}(r))$ が線型作用である為、
の必要十分条件は $r=1$ である。

例2. $G = S^3 \times S^3 (= \text{Spin}(4))$ の部分群

$$S^1(l, m) = \{ (z^l, z^m) \in G = S^3 \times S^3; z \in S^1 \subset \mathbb{C} \},$$

$$U(l, m) = S^1(l, m) \cup S^1(l, m)(j, j) \quad (l+m \text{ は偶数}),$$

$$D^*(8) = \{ (X, \chi) \in G; \chi = \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$$

(l, m は互いに素な整数) を考える。条件

$$l_s, m_s \equiv 1 \pmod{4} \quad (s=1, 2), \quad 0 < l_1 - m_1 \equiv 4 \pmod{8},$$

$$l_2 - m_2 \equiv 0 \pmod{8}$$

をみたす互いに素な整数 l_s, m_s ($s=1, 2$) に対して

$$K_1 = U(l_1, m_1), \quad K_2 = U(l_2, m_2), \quad K = D^*(8),$$

とおくとスライス表現 $\phi_s: K_s \rightarrow O(2)$ ($s=1, 2$) が唯一つ定まり,
 (*)を用いて7次元 G 多様体を次の様に構成できる。

$$M = M(\alpha_0) = G \times_{K_1} D^2 \cup_{\alpha_0} G \times_{K_2} D^2,$$

$$\alpha_0 = (\alpha'_0, \alpha''_0), \quad \alpha'_0 = (1+i+j+k)/2.$$

このとき, この G 作用 (G, M) は (AI) と (AII) をみたし, 効果的な作用 $(SO(4), M)$ を誘導する。とくに $(l_1, m_1, l_2, m_2) = (1, -3, 1, 1)$ のとき, (G, M) は線型作用 $(S^3 \times S^3, S^7, S^3 \mu_2^{(1)} \otimes \mu_2^{(2)})$ である。

§3. 主定理

我々は次の主定理を得た。

主定理. (G, M) が効果的な G 作用で (AI) と (AII) を満たすとき, $k_s = n - \dim G/K_s \geq 2$ ($s=1, 2$) で次の5つの場合 (CI) - (CV) を得る:

(CI) $k_1 + k_2$ は奇数で, (e) $n = k_1 + k_2 - 1$ または (o) $n = 2k_1 + 2k_2 - 3$;

(CII) k_1 と k_2 は共に偶数で, (e) $n = k_1 = k_2$ または (o) $n = k_1 + k_2 - 1$;

(CIII) $k_s = 2$, k_{3-s} は偶数 ($s=1$ または 2) で, $n = 2k_1 + 2k_2 - 3$;

(CIV) $k_1 = k_2 = 2$ で, (e) $n = 4$ または (o) $n = 7$;

(CV) k_1 と k_2 は共に奇数で, $n = \chi(k_1 + k_2 - 2)/2 + 1$ ($\chi = \chi(G/K_1) = \chi(G/K_2) = 1, 2, 3, 4$ または 6).

さらに, (CI)(0)で $k_1=2$ または $k_2=2$ の場合と (CII) の場合には, (G, M) は例 1 における G 作用から誘導される効果的な作用と同型である。(CIV)(0) の場合には, $G=SO(4)$ で例 2 における作用であり, その他の場合には (G, M) は線型作用である。

§4. 主定理の証明の概略

この節では, 主定理の証明の方針と, とくに (CIV)(0) の場合の証明の概略を述べる。

リー群 U の部分群 H が U において non-homologous to zero のとき $H \neq 0$ in U と表わす。 U^0 を単位元を含む U の連結成分とし, $P(X) = \sum_i \dim H^i(X; \mathbb{Q}) t^i$ を空間 X の Poincaré 多項式とする。

M が $\mathbb{Z}_2$ コホモロジー球面のとき, M の G 分解(*) (§1) において (M, X_1, X_2) の Mayer-Vietoris 完全系列を用いると, 次の命題を得る。

命題 1. (CI) k_1 が奇数で k_2 が偶数ならば, G/K_2 は単連結, G/K_1 は orientable かつ $K_1^0 \neq 0$ in G , さらに

$$(e) \ n = k_1 + k_2 - 1, \quad P(G/K_{3-s}^0) = 1 + t^{k_s-1} \quad (s=1, 2),$$

$$(o) \ n = 2k+1 \quad (k = k_1 + k_2 - 2), \quad P(G/K_{3-s}^0) = (1+t^{k_s-1})(1+t^k)$$

$$(s=1, 2).$$

(CII) k_1 と k_2 が共に偶数で G/K_1 と G/K_2 が共に orientable なら

ば, $K^0, K_1^0, K_2^0 \neq 0$ in G , であつ

$$(e) k_1 = k_2 = n, K_1 = K_2 = G,$$

$$(o) n = k_1 + k_2 - 1, P(G/K_{3-s}^0) = 1 + t^{k_s-1} \quad (s=1, 2).$$

(CIII) k_1 と k_2 が共に偶数で G/K_1 は orientable, G/K_2 は non-orientable ならば, $K^0, K_1^0 \neq 0$ in G , $k_1=2$, $n=2k_2+1$ で

$$P(G/K_1^0) = 1 + t^{2k_1-1}, \quad P(G/K_2^0) = (1+t)(1+t^{k_2}),$$

$$P(G/K_2) = 1 + t, \quad P(G/K^0) = (1+t)(1+t^{2k_2-1}).$$

(CIV) k_1 と k_2 が共に偶数で G/K_1 と G/K_2 が共に non-orientable ならば, $K^0 \neq 0$ in G , $k_1 = k_2 = 2$ で

$$(e) n=4, P(G/K_3^0) = 1 + t^2, P(G/K_s) = 1 \quad (s=1, 2), P(G/K^0) = 1 + t^3,$$

$$(o) n=7, P(G/K_3^0) = (1+t^2)(1+t^3), P(G/K_s) = 1 + t^3 \quad (s=1, 2),$$

$$P(G/K^0) = (1+t^3)^2.$$

(CV) k_1 と k_2 が共に奇数ならば, $\chi(G/K_1) = \chi(G/K_2) (= \chi)$,

$$n = \chi k / 2 - 1 \quad (k = k_1 + k_2 - 2) \text{ で}$$

$$\chi \text{ が奇数のとき, } k_1 = k_2, P(G/K_s) = (1-t^{n-1}) / (1-t^{\frac{k}{2}}) \quad (s=1, 2),$$

$$\chi \text{ が偶数のとき, } P(G/K_{3-s}) = (1+t^{k_s-1})(1-t^{n-1}) / (1-t^{\frac{k}{2}}) \quad (s=1, 2).$$

主定理の証明の方針. まず, 命題1をみたす G とその等方部分群 K, K_1, K_2 およびスライス表現 ρ_1, ρ_2 の可能性をすべて調らであげる。これは2,3の場合を除いて Wang [5] の方法をより精密化することにより行なわれる。次に, 得られた

G と等方部分群とスライス表現を用いて, (*) によって G 多様体 $M(\lambda)$ ($\lambda \in N(K, G)$) を構成し, M が (AII) をみたすか否かをその基本群と $\mathbb{Z}_2$ コホモロジー群を計算して確かめる。一方, 具体的に $\mathbb{Z}_2$ コホモロジー球面上の G 作用を与える。すなわち, 例1 と例2 以外の線型作用 (G, S^n, ψ) については, G とその表現 ψ を具体的に列挙する。これらの G 作用の等方部分群を計算することで, 最初に得た必要条件がさらに十分条件でもあることがわかり, 主定理が証明される。

以下, (CIV)(c) の場合に限って証明の概略を述べる。

準備: コンパクト連結リー群 U とその連結部分群 H に対し

$$d(U, H) = \dim U - \dim H - 3(r(U) - r(H)) \quad (r: \text{階数})$$

とおくと, 次の補題が成り立つ。

補題1. U が単純リー群で $r(U) \geq 2$ のとき, $H \subsetneq U$ ならば $d(U, H) > 0$ 。

証明. $2r(H) > r(U)$ のときは $\dim U - \dim H - r(U) + r(H) \geq 0$ (cf. [1; IV, Cor. 5.4]) より $d(U, H) > 0$ を得る。単純リー群の分類定理より単純リー群 V に対して

$$r(V)^2 + 2r(V) \leq \dim V < 4r(V)^2$$

が成り立ち, これを用いると $2r(H) \leq r(U)$ のとき $d(U, H) > 0$ が証明できる。

q.e.d.

補題2. コンパクト連結リイ群 U の連結閉部分群 H に対し、 $r(U) = r(H) + 1$ かつ H は U の、次元が正の正規部分群を含まないと仮定する。このとき $\dim U/H = 3 - 2(c(U) - c(H))$ (c : 中心の次元) ならば、 U はいくつかの S^3 とトーラス群の essentially direct product (すなわち直積群の離散正規部分群を法とする商群) である。

証明. $r(U) = r(H) + 1$ より U と H を次の様な essentially direct product に分解できる。

$U = U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_l \circ U'$, $H = H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_l \circ H'$,
 ここで各 U_i は $r(U_i) \geq 2$ なる単純リイ群, $H_i \subset U_i$ ($1 \leq i \leq l$)
 かつ U' と H' はいくつかの S^3 とトーラス群の essentially direct product で $c(U') = c(U)$, $c(H') = c(H)$ 。さらに仮定より $H_i \subsetneq U_i$ である。したがって

$$\sum_{i=1}^l \dim(U_i, H_i) = \dim U/H - 3 + 2(c(U) - c(H))$$

となり、右辺が 0 のとき補題1より $l=0$ で補題を得る。

q.e.d.

(CIV)(o) の場合の主定理の証明. まず、作用 (G, M) の分類を行なうには次の2つを仮定してよい。

(1) M 上の G 作用はほとんど効果的である (すなわち K は G の、次元が正の正規部分群を含まない)。

(2) G は単連結単純リイ群とトーラス群の直積である。

命題2. (CIV)(0)の場合, G/k° 上に推移的に作用する G の極小連結正規部分群 $G' \cong S^3 \times S^3$ が存在する。したがって, G' の制限した M 上の作用も (AI) を満たす。

証明. V を G/k° 上に自明に作用する G の最大連結正規部分群とすると,

$$G = U \times V, \quad K_1^\circ = H \times V \quad (H \subset U)$$

となる。仮定(1)と $K_1^\circ/k^\circ = S^1$ ($k_1=2$)より $V = 1$ または S^1 。命題1 (CIV)(0)より U と H は補題2の仮定をみたし, したがって U は (故に G も) いくつかの S^3 とトーラス群の直積である (仮定(2))。さらに命題 (CIV)(0)より $K^\circ \neq 0$ in G かつ $G \cong K^\circ \times S^3 \times S^3$ 。これを用いると, G/k° 上に推移的に作用する G の $S^3 \times S^3$ と同型な正規部分群 G' を見つけることができる。 q.e.d.

命題1 (CIV)(0)と命題2より, まず

$$G = S^3 \times S^3, \quad K^\circ = 1, \quad K_1^\circ = S^1, \quad K_2^\circ = S^1$$

と仮定して考察する。以下例2で定義した記号を用いる。明らかに K_s° は $S^1(l_s, m_s)$ と共役である ($s=1, 2$)。さらに, M が $\mathbb{Z}_2$ コホモロジー球面で G/K_s が non-orientable より, $l_s, m_s \equiv 1 \pmod{4}$ かつ K_s は $U(l_s, m_s)$ と共役であることがわかる。次に, スライス表現 $\phi_s: K_s \rightarrow O(2)$ を考えると唯一つ定まり, $K = D^*(8)$ を得る。これらを用いて G 多様体を

$$M(d) = G \times_{K_1} D^2 \cup_d G \times_{K_2} D^2 \quad (d \in N(K, G))$$

と構成する。この $M(d)$ は同変微分同相を除いて丁度二つ、 $M(1)$ と $M(d_0)$ が定まり、それぞれの基本群は Van-Kampen の定理より

$$\pi_1(M(1)) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \pi_1(M(d_0)) = 1$$

である。さらに $M(d_0)$ が $\mathbb{Z}_2$ コホモロジー球面であるための必要十分条件は $(l_1 + m_1 + l_2 + m_2)/4$ が奇数であることがわかる。

最後に、この $M(d_0)$ 上の $G (= S^3 \times S^3)$ 作用は、コンパクト連結リー群 $\tilde{G} \supsetneq G$ 1 ほとんど効果的な作用として拡張できないことが確かめられ、我々は (CIV) (6) の場合の主定理を得る。

参考文献

- [1] G. E. Bredon : Introduction to Compact Transformation Groups, Pure and Applied Math. 46, Academic Press, 1972.
- [2] W. C. Hsiang and W. Y. Hsiang : Differentiable actions of compact connected classical groups I, Amer. J. Math. 89 (1967), 765-786.
- [3] K. Iwata : Classification of compact transformation groups on cohomology quaternion projective spaces with codimension one orbits, Osaka J. Math. 15 (1978), 475-508.

- [4] F. Uchida : Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits, Japan. J. Math. 3 (1977), 141-189.
- [5] H. C. Wang : Compact transformation groups on S^n with an $(n-1)$ -dimensional orbit, Amer. J. Math. 82 (1960), 698-748.