

双曲型方程式のエネルギー不等式について

京大 数理解 萬代 武史

§ 1 序

次のような偏微分作用素を考える。

$$P(t, x; D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|j|+|\alpha| \leq m \\ j \leq m-1}} a_{j,\alpha}(t, x) D_t^j D_x^\alpha \quad \dots \dots \dots (1)$$

但し、ここで、係数 $a_{j,\alpha} \in B^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ ($T > 0$)

$$D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_{x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{etc.}$$

さて、このような作用素に於する $\{t=0\}$ を初期面とする

Cauchy 問題について、次のことはよく知られている。

P が *regularly strictly hyperbolic* のとき、

$$\text{すなわち、} P_m(t, x; \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{\substack{|j|+|\alpha| \leq m \\ j \leq m-1}} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j(t, x; \xi))$$

とすると、 $\lambda_j(t, x; \xi)$ は *real* - かつ

$$\inf_{\substack{(t,x) \\ \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ |\xi|=1}} |\lambda_j(t, x; \xi) - \lambda_k(t, x; \xi)| > 0 \quad (j \neq k)$$

とすると、 P に於する Cauchy 問題は C^∞ -well-posed であり、

次の不等式が成立する。

$$\sum_{|H| \leq m-1} \|D_t^H D_x^\alpha u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \int_0^t \|Pu(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau + \sum_{|H| \leq m-1} \|D_t^H D_x^\alpha u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

for $0 \leq t \leq T, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

通に (2) の不等式を仮定すると、 P は *regularly strictly hyperbolic* でなくてはならないことがわっている。この事実
は、エネルギー不等式における微分の *order* の下がり具合が
 P の特性根の重複度に対応しているといえることができる。こ
のように、エネルギー不等式における微分の *order* の下がり
具合がどのようにまわってくるかを調べるのがここでの目標
である。

§.2 では、 P の主部が定数係数か、又は P の特性根の重複
度が一定の場合を考える。この場合には、*strictly hyperbolic* の
場合と同様に、丁度 P の特性根の重複度でまわってしまう。

§.3 では、一般の場合について、特性根の重複度との関係
を調べる。一般の場合には、§.2 のようなまっさらとした対
応はなく、実際、次の §.4 でみるように、特性根の重複度の
みではまわらない。

§.4 では、近接項が大きく影響する現象を、特にある種の
2 階の作用素について調べる。

なお、ここでは、 $P_m(t, x, \xi, \zeta) = 0$ をこの方程式とみたとき
の根を (t, x, ξ) における P の特性根と呼び、その重複度の最

大を $(t, x; \xi)$ における P の特性根の重複度と呼んでいる。

§.2 主部が定数係数もしくは特性根の重複度一定の場合

このセクションでは、次の2つの場合を考える。

(i) $a_{j,k}(t, x)$ ($j+k=m$) が定数の場合

(ii) real-valued $\lambda_j(t, x; \xi) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ($j=1, \dots, S$)

と正の整数 r_j ($j=1, \dots, S$) があって、

$$P_m(t, x; \tau, \xi) = \prod_{j=1}^S (\tau - \lambda_j(t, x; \xi))^{r_j}$$

$$\pm \text{に } \inf_{\substack{(t,x) \\ \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ |\xi|=1}} |\lambda_j(t, x; \xi) - \lambda_k(t, x; \xi)| > 0 \quad (j \neq k) \quad \dots\dots (3)$$

これらの場合には、 $\{t=0\}$ を初期面とする Cauchy 問題が

$[0, T] \times \mathbb{R}^n$ で C^∞ -well-posed かつ有限伝播速度をもつための必要十分条件が知られている。すなわち

(i) の場合 (J.L. Dunn [8], S. Wakabayashi [9])

(A-1) $P(t, x; \tau, \xi)$ が $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ を固定するごとに (τ, ξ) の τ 項式として、hyperbolic polynomial

(ii) の場合 (S. Mizohata - Y. Ohyu [2, 4], H. Flaschka - G. Strang [5], V. Ya. Ivrii - V.M. Petkov [7], J. Chazarain [6])

(A-2) $U: [0, T] \times \mathbb{R}^n$ の open subset, $\varphi \in C^\infty(U)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda_j(t, x; \text{grad}_x \varphi) \text{ on } U, \quad \text{grad}_{(t,x)} \varphi \neq 0 \text{ on } U$$

ならば、

$$e^{-ip\varphi} P(e^{ip\varphi} f) = O(f^{m-r}) \quad (p \rightarrow +\infty) \quad \dots (4)$$

for $\forall f \in C^\infty(U)$

この時、次のことが成立する。

定理 2-1

(i), (ii) の場合、それぞれ (A-1), (A-2) の仮定のもとで、

<1> P の特性根の重複度が任意の $(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ において、 r 以下とすると、定数 C があって、

$$\begin{aligned} \sum_{j+|k| \leq m-r} \|D_t^j D_x^k u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq C \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{r-1} \|Pu(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j+|k| \leq m-r} \|D_t^j D_x^k u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\ell=1}^{r-1} t^\ell \sum_{j+|k| \leq m-r+\ell} \|D_t^j D_x^k u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

for $0 \leq t \leq T, \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

<2> 逆に、 $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ のある open subset $U \neq \emptyset$ に対して

$$\sum_{j+|k| \leq m-r} \|D_t^j D_x^k u\|_{L^2(U)} \leq C \|Pu\|_{L^2(U)} \quad \dots \dots \dots (6)$$

for $\forall u \in C^\infty(U)$

が成立するとすると、 P の特性根の重複度は任意の

$(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ において、 r 以下

証明は、(i) の場合は、G. Poyser [1] の方法を詳しくみることにより行ない、(ii) の場合は、主部を *strictly hyperbolic operators* の積に分解し、低階項もそれに応じた分解をすることにより行なう。

注意 2-2

① (5) の不等式の右辺の各項に t^ℓ がかかっていることは、

もが十分小のとき、 $(m-r+1)$ 次以上の微分の初期値は、
左辺に少ししか影響しないことを示している。

- ② (5) は非常に強い不等式であり、(i), (ii) の場合以外の一般の場合でも、(5) を仮定すると、特性根の重複度 $\leq r$ が出る。 $\rightarrow$ 定理 3-1

上の定理により、(i), (ii) の場合には、エネルギー不等式における微分の order の下がり具合は、丁度特性根の重複度でさまるといえる。

§.3. 一般の場合のエネルギー不等式における微分の order の下がり具合と、特性根の重複度との関係

まず、§1 で述べたことのある拡張を述べる。

定理 3-1

$U: \mathbb{R}^n$ の open set, $1 \leq r \leq m$ に対して、定数 C があって、

$$\sum_{|\alpha| \leq m-r} \int_0^t \|D_t^\alpha D_x^\alpha u(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \leq C \cdot \int_0^t (t-s)^r \|Pu(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \quad (7)$$
 for $0 \leq t \leq T, u \in C^\infty([0, T] \times U)$

が成立するならば、 P の特性根は、 $[0, T] \times U \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ において real かつその重複度は r 以下である。さらに、 P と C により depend する定数 $\delta > 0$ があって、次が成立する。

$\tau_1, \dots, \tau_p$ が $(t, x, \xi) \in [0, T] \times U \times \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi|=1\}$ における

P の相異なる特性根で、その重複度の和が $(r+1)$ 以上のものとする

$$\max_{j,k} |\tau_j - \tau_k| \geq \delta \quad \text{-----} (8)$$

証明は V. Ya. Izui - V. M. Petkov [7], Theorem 1.1 の証明の方法を使う。

注意 3-2

① (7) の不等式は、(5) の両辺を積分すると得られるの下、 $\S.2$ で扱った作用素については成立している。

② 上の定理で、 $r=1$ とすると、 $\S.1$ で述べた次の命題が得られる。

"(2) の不等式が成立すると仮定すると、

P は *regularly strictly hyperbolic* になる。"

③ (8) は重複度もこめて $(r+1)$ 個以上の特性根が、ある程度以上近くに集まることはないことを示している。

上の定理の不等式 (7) は非常に強い不等式なので、もう少し、弱いものも考えたい。ここでは、次の不等式を考える。

$$(B-p, L) \quad \sum_{|H| \leq m-L} \int_0^t \|D_t^j D_x^\alpha u(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\ \leq C \int_0^t (t-s)^p \|Pu(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \quad \text{----} (9)$$

$$(C-p, L) \quad \sum_{|H| \leq m-L} \int_0^t \|D_t^j D_x^\alpha u(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \\ \leq C \int_0^t (t-s)^p \|Pu(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \quad \text{----} (10)$$

for $0 \leq t \leq T$, $u \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ (p, L は非負整数)

定理 3-3

$\{t=0\}$ を初期面とする、 P に対する Cauchy 問題が $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ で C^∞ -well-posed かつ有限伝播速度をもつとし、さらに $(\hat{t}, \hat{x}; \hat{\lambda}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ で重複度 r の特性根をもつとある。このとき、

<1> $0 < \hat{t} < T$ のとき

$$(B-p, L) \text{ が成立} \Rightarrow r \leq 2L - p$$

$$(C-p, L) \text{ が成立} \Rightarrow r \leq 2L - \frac{p}{2}$$

<2> $\hat{t} = 0$ or T のとき

$$(B-p, L) \text{ が成立} \Rightarrow r \leq 3L - 2p$$

$$(C-p, L) \text{ が成立} \Rightarrow r \leq 3L - p$$

証明は、V. Ya. Ivrii - V. M. Petkov [7], Theorem 4.1 を使い、 P を asymptotic expansion して証明する。 C^∞ -well-posed かつ有限伝播性をもつという仮定はこの Theorem 4.1 を使うためのものである。

注意 3-4

- ① 上の定理で、 $p=1, L=1$ のときを考えると $(B-1, 1)$ の不等式については <1>, <2> の場合とも $r=1$ となる。これは、定理 3-1 の $r=1$ のときに対応している。一方、 $(C-1, 1)$ の不等式のほうは、<1> の場合は $r=1$ だが、<2> の場合は $r=2$ もありうる。つまり、微分の

order は 1 フシか下がらないのに、特性根が double になることがあるかもしれないということである。実際にこのことのある簡単な例は次のものである。

例 3-5 (Tricomi operator)

$$P = D_t^2 - t D_x^2 + a(t, x) D_x + c(t, x) D_t + d(t, x)$$

を考えると、 $\forall a, c, d \in B^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して、 P に対する $\{t=0\}$ を初期面とする Cauchy 問題は C^∞ -well-posed かつ有限伝播速度をもつ。さらに次の不等式が成立する。

$$\sum_{j+k \leq 1} \|D_t^j D_x^k u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \int_0^t \|Pu(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 ds$$

for $0 \leq t \leq T, \forall u \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$

なお、 P は $t=0$ で double characteristic なので、

$$\sum_{j+k \leq 1} \|D_t^j D_x^k u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \int_0^t \|Pu(s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 ds$$

for $0 \leq t \leq T, \forall u \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$

なる不等式は成立しないことが定理 3-3 よりわかる。

(これが $(B-p, L), (C-p, L)$ という二通りの不等式を考えた理由である。)

§.4 エネルギー不等式への低階項の影響

§.1 でも述べたように、一般の偏微分作用素についてはエネルギー不等式の微分の order の下がり具合は、特性根の重複度のみではまらず、低階項が大きく影響することがあ

る。まず、その典型的な例を考えよう。

例 4-1

$$P = D_t^2 - t^{2k_1} a_1(t, x) D_{x_1}^2 - t^{2k_2-1} a_2(t, x) D_{x_2}^2 - a_3(t, x) D_{x_3}^2 \\ + \sum_{j=1}^3 b_j(t, x) D_{x_j} + c(t, x) D_t + d(t, x)$$

という operator を考える。但し、ここで、 $a_j, b_j, c, d \in \mathcal{B}^\infty$,

k_1, k_2 は正整数, $a_j(t, x) \geq \delta > 0$ on $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ ($j=1, 2, 3$)

とする。このような P に対して、Cauchy 問題が C^∞ -well posed になるための必要十分条件は、

ある $\tilde{b}_j \in \mathcal{B}^\infty$ があって、 $b_j(t, x) = t^{k_j-1} \tilde{b}_j(t, x)$ ($j=1, 2$)
である。(V. Ya. Izru - V. M. Petkov [7], O. A. Oleynik [3])

この条件が満たされているとき、O. A. Oleynik [3] が示したエネルギー不等式は、微分の order が、 $\sup_x \frac{|b_{1,0}(x)|}{\sqrt{a_{1,0}(x)}}$ に比例して下がっていくようなものであった。(b_2, b_3 には independent)

このセクションでは、上のようなことが、本当に起こることとをいいたい。すなわち、 $\sup_x \frac{|b_{1,0}(x)|}{\sqrt{a_{1,0}(x)}}$ が大きくなると、必然的にエネルギー不等式における微分の order も下がることをいいたい。(これに関して知られている結果は、V. Ya. Izru - V. M. Petkov [7], Theorem 3 のみであるように思われるが、この結果は上の例でいえば、 $k_1=1$ のときしか使えない。)

次のような 2 階の偏微分方程式を考えよう。

$$P = D_t^2 - 2 \sum_{j=1}^n a_j(t, x) D_t D_{x_j} + \sum_{j,k=1}^n b_{j,k}(t, x) D_{x_j} D_{x_k} \\ + \sum_{j=1}^n c_j(t, x) D_{x_j} + d(t, x) D_t + e(t, x)$$

$$a_j, b_{j,k}, c_j, d, e \in C^\infty, (b_{j,k})_{j,k} : \text{symmetric}$$

この P に対して、次のことがわかっている。

命題 4-2

P において、 $1 \leq j_0 \leq n$ に対して、

$$\begin{cases} a_{j_0}(t, x) = t^k \tilde{a}_{j_0}(t, x) \\ b_{j_0, j_0}(t, x) = t^{2k} \tilde{b}_{j_0, j_0}(t, x) \\ b_{j_0, k}(t, x) = t^k \tilde{b}_{j_0, k}(t, x) \quad (k \neq j_0) \end{cases} \quad (11)$$

但し、 k は正整数、 $\tilde{a}_{j_0}, \tilde{b}_{j_0, k} \in C^\infty$

となっているとすると、 P に対する $\{t=0\}$ を初期面とする Cauchy 問題が C^∞ -well-posed なる。

$$c_{j_0}(t, x) = t^{k-1} \tilde{c}_{j_0}(t, x), \quad \tilde{c}_{j_0} \in C^\infty \quad (12)$$

となっている。

証明は V. Ya. Izrii - V. M. Petkov [7], Theorem 4.15) したがう。

さて、(11), (12) をみたす 2 階の作用素 P に対して、上で述べた現象を調べよう。

定理 4-3

P が (11), (12) を満たしているとする。

さらに、 $\tilde{a}_{j_0}(0, 0), \tilde{b}_{j_0, j_0}(0, 0) \in \mathbb{R}$

$$\tilde{a}_{j_0}(0, 0)^2 - \tilde{b}_{j_0, j_0}(0, 0) > 0 \quad \text{とする。}$$

このとき、 p : 整数, δ : 非負整数

U : $(0,0)$ の近傍

$U_t = ([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap U$ に対して、

$$\|u\|_{H^p(U_t)} \leq C \|Pu\|_{H^\delta(U_t)} \quad (13)$$

for $0 \leq t \leq T$, $\forall u \in C_0^\infty(U_t)$

(C は t, u に independent な定数)

が成立するならば、

$$\frac{|Im \tilde{C}_{j_0}(0,0) - R \cdot \tilde{Q}_{j_0}(0,0)|}{\sqrt{\tilde{a}_{j_0}(0,0)^2 - \tilde{b}_{j_0}(0,0)}} \leq 20(k+1)^2(\delta+2-p) \quad (14)$$

但し、

$$\|\varphi\|_{H^p(\Omega)} = \begin{cases} \sum_{|H| \leq p} \|D_t^H D_x^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)} & (p \geq 0) \\ \sup_{\psi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{|(\psi, \varphi)_{L^2(\Omega)}|}{\|\psi\|_{H^{-p}(\Omega)}} & (p < 0) \end{cases}$$

証明は、V. Ya. Izru - V. M. Petkov [7] の Theorem 3 の証明と同様の方針で行なう。

この結果により、例 4-1 の場合は、

$$\|u\|_{H^p([0,t] \times \mathbb{R}^n)} \leq C \|Pu\|_{H^\delta([0,t] \times \mathbb{R}^n)}$$

for $0 \leq t \leq T$, $\forall u \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$

が成立するならば、

$$\sup_x \frac{|Im b_1(0,x)|}{\sqrt{a_1(0,x)}} \leq 20(k+1)^2(\delta+2-p)$$

となり、左辺が大きくなると、 $\delta+2-p$ も大きくなり、級分の order が大きく下がる。

さて、最後に、上の様な現象が起こる例を例4-1より
もっと広い class で述べよう。

例 4-4

$$P_2 = D_t^2 - \sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(t,x) t^{k_j+k_k} D_j D_k$$

を主部にもつ偏微分作用素 P を考える。但し、

$$a_{j,k} \in \mathcal{B}^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n), \quad (a_{j,k})_{j,k} : \text{symmetric, real}$$

$$k_1, \dots, k_\nu : \text{正整数} \quad (0 \leq \nu \leq n), \quad k_{\nu+1} = \dots = k_n = 0$$

$$\sum_{j,k=1}^n a_{j,k}(t,x) \xi_j \xi_k \geq \delta |\xi|^2$$

$$\sum_{j,k=1}^n (k_j + k_k) a_{j,k}(t,x) \xi_j \xi_k \geq \delta |\xi|^2 \quad (\delta > 0)$$

$$\text{for } (t,x,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

とする。このような P に対する $\{t=0\}$ を初期面とする
Cauchy 問題が C^∞ -well-posed であるための必要十分条件は、
低階項が、

$$\sum_{j=1}^{\nu} b_j(t,x) t^{k_j-1} D_j + \sum_{j=\nu+1}^n b_j(t,x) D_j + c(t,x) D_t + d(t,x)$$

の形をしていることであり、(V. Ya. Ivrii - V. M. Petkov [7],
O. A. Olejnik [3] の結果より出る。) このとき、

$$\|u\|_{H^p([0,t] \times \mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|Pu\|_{H^2([0,t] \times \mathbb{R}^n)}$$

$$\text{for } 0 \leq t \leq T, \quad u \in C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$$

が成立するならば、

$$\sup_x \frac{|\operatorname{Im} b_j(0,x)|}{\sqrt{a_{j,j}(0,x)}} \leq 20(k_j+1)^2(j+2-p) \quad (j=1, \dots, \nu)$$

となる。($b_{\nu+1}, \dots, b_n$ は微分の order の下がり具合には影響

響せず、 $\sup_n \frac{|\operatorname{Im} b_{ij}(0, x)|}{\sqrt{a_{ij}(0, x)}}$ により depend して後者の order が下がるようなエネルギー不等式が実際に成立する。)

§ 5 文 献

- [1] G. Peyster : Energy inequalities for hyperbolic equations in several variables with multiple characteristics and constant coefficients., Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 478-490
- [2] S. Mizohata - Y. Ohya : Sur la condition de E.E. Levi concernant des équations hyperboliques., Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A., 4 (1968), 511-526
- [3] O.A. Olejnik : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations., Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 569-586
- [4] S. Mizohata - Y. Ohya : Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II", Japan J. Math. 40 (1971), 63-104.
- [5] H. Flaschka - G. Strang : The correctness of the Cauchy problem., Advances in Math., 6 (1971), 347-379
- [6] J. Chazarain : Le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques, non nécessairement stricts, qui satisfont

à la condition de Lévi. C.R. Acad. Sci., Paris.
t. 273 (1971), A 1218-1221

- [7] V. Ya. Izui - V. M. Petkov: Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed., Russian Math. Surveys 29:5, (1974), 1-70.
- [8] J. L. Dunn: A sufficient condition for hyperbolicity of partial differential operators with constant coefficient principal part., Trans. Amer. Math. Soc. 201 (1975), 315-327
- [9] 若林 誠一郎: 主部が定係数双曲型である作用素について., 数理解析研究所講究録 357 (1979), 69-85
- [10] 萬代 武史: 双曲型方程式のエネルギー不等式について., 修士論文, 京大 数理解析専攻 (1980)