

仮想特異性定理 by 三種グラフとの遭遇

東大 理 飯高 茂

1. 以下, C 上定義された代数多様体を考察する.

最近 (1978 年 1 月), 若林功氏はこの定理を証明した.

定理 (若林 [5]). $C \subset \mathbb{P}^2$ の d 次既約曲線とする. $d \geq 4$ を仮定しておくとき, ($g(C)$ は C の正規化の種数)

i) $g(C) > 0$, 又は,

ii) $g(C) = 0$, $\# \text{Sing}(C) \geq 2$, かつ C のどの点も特異点
尖点でない, 又は, $C: \text{R}$

iii) $g(C) = 0$, C の特異点は皆尖点であり, $\# \text{Sing} C \geq 3$
とする. このとき $C: \text{M}$

$$\pi(\mathbb{P}^2 - C) = 2.$$

iv) $g(C) = 0$, $\# \text{Sing}(C) = 1$, $\sigma_p \geq 3$ のとき $\overline{\pi}(\mathbb{P}^2 - C) = \sigma_p - 1 \geq 2$.

ここで, $\pi(V)$ は V の 小平次元 (対数的) [logarithmic Kodaira dimension] とさす. $\pi(V) = n (= \dim V)$ のとき, V は (対数的) 双曲型 の多様体という. D. Mumford は, このとき, V を 対数的一般型 とよぶことを提案している.
② 特異点 $p \in C$ の解析的分枝の数.

しかし、これはな人とも無神経で不愉快なよゐ方ではないだろうか。対数的に一般！ そんな一般性に文学的な意味などありはしない。又、 $\log \kappa$ では $\pi = -\infty$ と定義されているのに、不細工な $\pi = -1$ ^{彼は}を再提案している。それは、不見識という他あるまい。DMへ、八当りはこの位にして、先に進もう。

i), ii), iii) とまとめて言うには、特異小平次元を使うとよい。一般に、代数多様体 W の非特異点全体を $\text{Reg } W$ で示す。その π を $\pi^\#(W)$ で示し、 W の特異小平次元というのである、
 た、*i.e.*, $\pi^\#(W) = \pi(\text{Reg } W)$. [1]

i), ii), iii) iv) ($d \geq 4$) をいいかえすと、 $\pi^\#(C) = 1$ 即ち、

$$\left[\pi^\#(C) = 1 \quad \text{なら} \quad \pi(\mathbb{P}^2 - C) = 2 \quad \text{又は iv)} \right]$$

といいかえられた。

さらに、 $\left[\pi^\#(C) \geq 0 \quad \text{なら} \quad \pi(\mathbb{P}^2 - C) \geq 0 \right]$ も、若林は示している。

若林の原証明は、正確なものにはあるが、計算的であって、その本質を捉え難い。彼の証明の簡易化が、この小論の目的である。そして、才了種境界とその P_m, π, π , 才一般、才2般補題が有効に働く。

2. V を非特異代数多様体とし, その非特異完備化を $\bar{V}$ とする. $F = \bar{V} - V$ を V の 代数的境界 という. さて, F に中心をもつ 2 次変換をくり返し, 代数的境界を単純化する. 即ち, 非特異代数多様体 $\bar{V}^\#$ と, 固有双有理正則写像 $\mu: \bar{V}^\# \rightarrow \bar{V}$ とがあり, $D^\# = \mu^{-1}(F)$ は正規交叉型, とみたすようにできる. $(\bar{V}^\#, D^\#)$ を V の, 非特異境界 $D^\#$ をもつ 2 多様体, という. さて, $m \geq 1$ につき,

$$\dim |m(K(\bar{V}^\#) + D^\#)| + 1$$

は, V のみに依存することと容易にわかる. これを $\bar{P}_m(V)$ と示し, V の, 対数的 m 種数 という. とくに $\bar{P}_1(V)$ と $\bar{P}_2(V)$ でかく.

さて, $\bar{V}^\#$ の $K(\bar{V}^\#) + D^\#$ - 次元 $\kappa(K(\bar{V}^\#) + D^\#, \bar{V}^\#)$ を V の, 対数的小平次元 といい $\kappa(V)$ と示す. これは, 勿論 V のみに依存する. 即ち, $\bar{P}_{m_0}(V) \neq 0$ となる $m_0 > 0$ のあるとき, $\alpha, \beta > 0$ が存在し, $m \gg 0$ について,

$$\alpha m \kappa(V) \leq \bar{P}_{m m_0}(V) \leq \beta m \kappa(V)$$

が成立するのである.

$\kappa(V)$ は $-\infty, 0, 1, \dots, n$ のいずれかの値をとり, この値が, V の基本的部類分けをする.

例. $\dim V = 1$ のとき,

型	$\bar{\kappa}(V)$	完備	非完備
I	$-\infty$	$\mathbb{P}^1$	A^1
II	0	楕円曲線	$\mathbb{C}^*$
III	1	$\chi \neq 0$	

例2. 有理関数 $y = f(x)/g(x)$ のグラフを考える.

i) $\deg g + 1 \leq \deg f$ のとき,

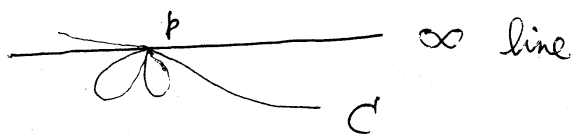
$$x_2^{-\alpha} G(x_0, x_1) = F(x_0, x_1), \quad t \geq 1, \quad G(1, x) = g(x), \quad F(1, x) = f(x), \quad -\alpha = \deg g + 1 - \deg f \quad \text{と表わす.}$$

す. $u = x_0/x_2, \quad v = x_1/x_2$ とおけば,

$$u^\alpha G(u, v) = F(u, v).$$

$$\chi = r \quad g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{e_j} \quad \text{とおくと,} \quad G(u, v) = \prod_{j=1}^r (u - \lambda_j v)^{e_j}.$$

$\alpha > 0$ ならば, $C = \overline{\Gamma}_p$ は, p を $r+1$ 個の解析的分枝



をもつ. $\alpha = 0$ ならば, $C = \overline{\Gamma}_p$ は, p を r 個の分枝をもつ. 従って, ループの数は $r-1$ 個.

$\alpha < 0$ のときを考えよう. $\beta = -\alpha > 0$ とおくと,

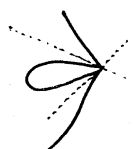
$$x_2 G(x_0, x_1) = x_0^\beta F(x_0, x_1).$$

$x_0 = 0$ は $x_2 = 0$ と $x_1 = 0$ と根に持つ. G は $d = \deg \overline{\Gamma}_p$

今度は $\pi(A^2 - \Gamma_\varphi) \leq 0$ としみる。すると、

$\pi(A^2 - \Gamma_\varphi) = 0$ となるのは、次のときに限る

ⅴ) $\alpha > 0, r = 1$. 即ち, $y = f(x)/x^m, \deg f > m+1$.



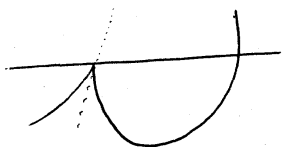
このとき $A^2 - \Gamma_\varphi - V(x) = S^0$ である。
すなわち、

$$\Gamma(S^0, 0) = k[x, y, 1/x^m y - f, \bar{x}']$$

$$\simeq k[x, y, 1/y - f \cdot \bar{x}', \bar{x}'] \simeq k[\bar{x}, \eta, \eta', \bar{f}']$$

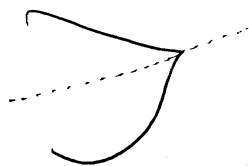
即ち, $S^0 \simeq \mathbb{C}^{*2}$ より, $\tau_1 = \overline{P}_m(P^2 - \Gamma_\varphi) \leq \overline{P}_m(A^2 - \Gamma_\varphi) \leq \overline{P}_m(S^0) = 1$ となる。また $\alpha > 0$ かつ $r = 1$ となる。

ⅵ) $\alpha \leq 0, r = 1$. 即ち, $y = f(x)/x^m, \deg f \leq m+1$.



このときも同様に $S^0 \subset \mathbb{C}^{*2}$ になる。

$\pi(A^2 - \Gamma_\varphi) = -\infty$ となるのは、ⅶ) $\alpha > 0, r = 0$ のとき。即ち, $y = f(x)$ 。多項式のようであるが A^2 より小さくなる。



すなわち、このときに限る。

3. $\bar{V}$ を非特異完備とし, D を $\bar{V}$ 上の複素因子とする. $\mu:$

$\bar{V}^\# \rightarrow \bar{V}$ を 2. のようにとる. すると,

$$\overline{\pi}_m(V) \leq \dim |m(K(\bar{V}) + D)| + 1,$$

$$\kappa(V) \leq \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

が成立つ. この不等式の差は, D の特異性に起因するもので

あって, 同じような式は Plücker, Clebsch により示さ

れた. 即ち, C を完備曲線とし, その位相種数を $\pi(C)$, 幾何種数 (有効種数, ... ともいふ) を $g(C)$ とするとき,

$$g(C) \leq \pi(C). \quad \text{そして}$$

$$\pi(C) - g(C) = \sum_{p \in \text{Sing } C} \delta_p, \quad \delta_p = \dim(\mathcal{O}_p' / \mathcal{O}_p), \quad \mathcal{O}_p' \text{ は } \mathcal{O}_p \text{ の}$$

正規化.

$\kappa = 2$, $\pi_m(V; \bar{V}, D) = \dim |m(K(\bar{V}) + D)| + 1$ とおき,
位相対数的 m 種数 とよぶことにしよう.

$\dim V = 2$ のとき, $\pi_m - \overline{\pi}_m$ は, どのような量で表示されるのだろうか?

補題 1. $p \in D$ をとり, $m = e(p, D)$ (D の p における重複度) とおく. $\bar{S} = \bar{V}$, $\mu: \bar{S}_1 = \mathcal{O}_p(\bar{V}) \rightarrow \bar{S}$ とおくと,

$$K(\bar{S}_1) + \mu^*(D) = \mu^*(K(\bar{S}) + D) - (m-2)E,$$

$E = \mu^*(p)$ とした. $D_1 = \mu^*(D)$ とおき, さらに, $\mu^*G \in G$ と略記する.

$$\tilde{\mu}: \bar{S}_e \rightarrow \bar{S}_{e-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{S}_1 \rightarrow \bar{S}_0 = \bar{S}$$

と 2 次変換のくり返しとし $D_0 = \tilde{P}'(D)$ は、正規交叉型とする。
 とおくと

$$K(\tilde{S}_0) + D_0 = K(S) + D - \sum (m_j - 2) E_j$$

これは、 D の μ による変換を D^* とおくととき

$$K(\tilde{S}_0) + D^* = K(S) + D - \sum (\nu_j - 1) E_j$$

と似ている。但し、 ν_j と m_j は、異なる値をもつてゐる $\{\nu_j\}$

は、 D の無限に近き特異点の重複度。これに対し、 $\{m_j\}$ は、

D の無限に近き 2 種特異点の重複度 とおもふべきかもしれない。

ともあれ、 $2\pi(D) - 2 = (K(S) + D, D)$ とおくととき、
 $\tilde{S}$ が有理曲面なら、

$$\overline{P}_1(\tilde{S} - D) = \pi(D) - \sum (m_j - 2)(m_j - 1)/2 \quad [2]$$

これは有用な式である。しかし、

$\overline{P}_2(\tilde{S} - D)$ 等は複雑で、一般に $\#_2 =$ とわかるような量

ではなく、随分曖昧で、両方の性質から知られている。

注意 D を既約とし、 $t \in D$ の解析的台の数を σ_t とおくととき、
 $\tilde{S}$ が有理曲面なら、

$$\overline{P}_1(\tilde{S} - D) = g(D) + \sum (\sigma_t - 1)$$

が知られている。ゆえに、

$$\pi(D) - g(D) = \sum (\sigma_t - 1) + \sum (m_j - 2)(m_j - 1)/2$$

4. D-次元 $\kappa(D, \bar{V})$ は, 初等的だが, 有用な性質をもっている. 復習から始めよう.

$$\kappa(D, \bar{V}) = \kappa(ND, \bar{V}) \quad \kappa, N > 0 \quad \text{に} \rightarrow \text{成} \rightarrow$$

ゆえに $D = D_1 + \cdots + D_r$ ($D_i > 0$) なる $p_1, \dots, p_r > 0$ に對して, $N = \max\{p_1, \dots, p_r\}$ にとすれば

$$\kappa(D, \bar{V}) \leq \kappa(\sum p_i D_i, \bar{V}) \leq \kappa(ND, \bar{V}).$$

よって $\kappa(D, \bar{V}) = \kappa(\sum p_i D_i, \bar{V})$. 尤もに $\kappa(\mathbb{Q}, \bar{V}) \geq 0$ を仮定 (さすればよい).

補題 4. $\kappa(D_1, \bar{V}) \geq 0, \dots, \kappa(D_r, \bar{V}) \geq 0$ のとき,

$p_1, \dots, p_r > 0$ について,

$$\kappa(\sum D_i, \bar{V}) = \kappa(\sum p_i D_i, \bar{V}).$$

5. 上の補題により, 次の SVST を示す.

定理 1. $\kappa(\bar{V}) \geq 0$ とし D を $\bar{V}$ 上の縮約因子.

$\rho: \bar{V}^\# \rightarrow \bar{V}$ は双有理正則で, $\rho^*(D) = \bar{D}^\#$ は正規交叉とし, D^* を D の $\bar{D}^\#$ 内の強変換とする. このとき,

$$\kappa(\bar{V}^\# - D^*) = \kappa(\bar{V}^\# - \bar{D}^\#) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

即ち, D の特異性も, $\bar{D}^\#$ の中の例外成分すらも影響してこない. このとき, $(\bar{V}, D)$ について SVST (strong virtual singularity theorem) が成立する, という.

証明. $K(\bar{V}^\#) = K(\bar{V}) + R_\mu$ であらう. R_μ は μ の例外因子をすべて含む $\mathbb{Q}$ -divisor (であらう). 即ち $\mu^*(D) = D^* + E$ とおくと, $N \gg 0$ であるとき $E \leq N R_\mu$ になる.

さて

$$\begin{aligned} \chi(\bar{V}^\# - D^*) &= \chi(K(\bar{V}^\#) + D^*, \bar{V}^\#) \\ &= \chi(K(\bar{V}) + R_\mu + D^*, \bar{V}^\#) \\ &= \chi(K(\bar{V}) + N R_\mu + D^*, \bar{V}^\#) \\ &\geq \chi(K(\bar{V}) + E + D^*, \bar{V}^\#) = \chi(K(\bar{V}) + D, \bar{V}) \end{aligned}$$

□

定理 2. $\chi(\bar{W}) \geq 0$ であるとき, $f: \bar{V} \rightarrow \bar{W}$ は全射正則で, $\bar{V}$ の一般点 v における $F = f^{-1}(w)$ は曲線とする. このとき D は $\bar{V}$ の因子 (divisor) とすると,

$$\chi(\bar{V} - D) = \chi(K(\bar{V}) + D, \bar{V}).$$

証明. $\chi(F) \geq 0$ なら, Viehweg の定理により, $\chi(\bar{V}) \geq 0$ である. 前定理に帰着される. 即ち $F \simeq \mathbb{P}^1$ であるときを考える.

$(D, F) = 0$ ならば, 証明する式は両辺は $-\infty$ になる (すなわち). よって $(D, F) \geq 2$ としてよい. さて, 定理 1 の証明に用いた $\mu: \bar{V}^\# \rightarrow \bar{V}$ を利用しよう. $\mu^*(D)$ の

$g = f \circ \mu: \bar{V}^\# \rightarrow \bar{W}$ についての水平成分を H とする. このとき $(H, F) = (D, F) \geq 2$. ゆえに, 再び定理によると, [4]

$$\kappa(\bar{V}^\# - H) \geq \kappa(F - H) + \kappa(W) \geq 0.$$

ゆえに、下で提示される補題により、

$$\kappa(\bar{V} - D) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

とえる。

QED

(このとき VST が成立する, という)

5. 2 段式補題

補題 (第 1 段)2. 上と同じ記号を用いる。即ち D は $\bar{V}$ 上の
有効因子。 $\mu^*(D) = D^* + E$ と分割するとき 次の 2 条
件を仮定する。

$$i) \kappa(\bar{V}^\# - D^*) \geq 0,$$

$$ii) N \gg 0 \text{ があり, } \mu^*(D) \leq D^* + NE.$$

このとき、

$$\kappa(\bar{V} - D) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

$$\text{証明. } \kappa(\bar{V} - D) = \kappa(K(\bar{V}^\#) + D^\#, \bar{V}^\#)$$

$$= \kappa(K(\bar{V}^\#) + D^* + E, \bar{V}^\#)$$

$$\leq \kappa(K(\bar{V}^\#) + D^* + NE, \bar{V}^\#)$$

$$\geq \kappa(K(\bar{V}^\#) + \mu^* D, \bar{V}^\#) = \kappa(\mu^*(K(\bar{V}) + D) + R_\mu, \bar{V}^\#)$$

$$= \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V}).$$

QED

補題 (第 2 段)3. 上記で、 $\mu^{-1}(D)$ は正則交又を仮定しない。

(すなわち、1) の代わりに

$$1)^\ast \quad \kappa(K(\bar{V}^\#) + D^\ast, \bar{V}^\#) \geq 0$$

と仮定し、結論も

$$\kappa(K(\bar{V}^\#) + D^\#, \bar{V}^\#) = \kappa(K(\bar{V}) + D, \bar{V})$$

にといえる。

証明は全く同じになっている

6. さて、 $\bar{V} = \bar{S}$ を曲面とする。 $\bar{S}$ が有理曲面でないとき
 VST の成立するとはわかった。況んて、 $\bar{S}$ が有理曲面
 でも、 D の成分に、非有理曲線があれば、直ちに、ホーゲン
 補題を使って VST が成立する。よって、 D は有理曲線のみ
 による、としてよい。今度は、 D の特異点の接なすグラフ的
 構造を、 $\bar{\rho}_2(\bar{S}-D)$ を定めていくのである。但し、このグラフ
 というのは、ホーゲン補題とでもいってしまってもいい、ホーゲン補
 題との関連は少々定まっているものなのである。それより、2.5
 による結論を先取りしておこう。

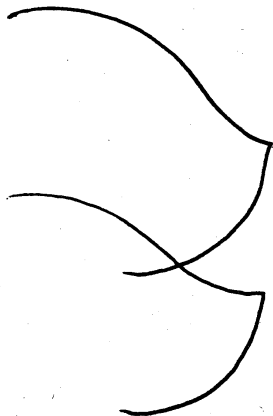
$\bar{S}$ は有理曲面、 D は有理曲線よりなる相利因子としたとき、

定理 A.

$$\bar{\rho}_2(\bar{S}-D) \geq 1,$$

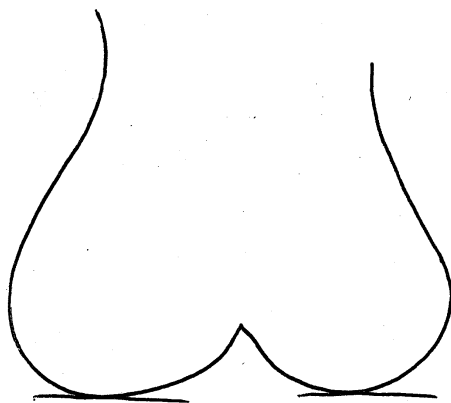


定理 (Zelphice) B.



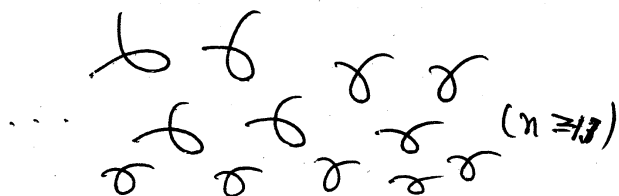
$$\text{もし } \pi(\bar{S}-D) = 2.$$

定理 C.



$$\text{もし } \pi(\bar{S}-D) = 2.$$

定理 D.



$$\text{もし } \pi(\bar{S}-D) = 2.$$

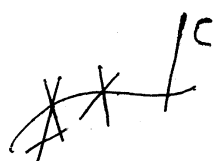
このように特異点を描くのは限りない. 簡易化のためには正則交又型, 一歩手前でやめることを望ましい解決を示す.

7. D を有理由線よりなる被移因子とすると、 D の特異性は π -通性的なら、 D を次の種境界とよぶ。 D が ρ で通性的、と定義しておこう。 ρ を通る D の解析的分枝は皆 ρ で非特異、かつ、それらの接線は相異なるとき、 D は ρ で 通性的 という。次の種境界には、 Γ の ρ に対応する。さて、グラフ Γ に対応するように、 m 種数 $P_m(\Gamma)$ と 小平次元 $\kappa(\Gamma)$ を定義しよう。

$$P_m(\Gamma) = \min \{ \bar{P}_m(\bar{S}-D) ; \bar{S} \text{ は有理的}, \Gamma = \Gamma(D) \}$$

$$\kappa(\Gamma) = \min \{ \kappa(\bar{S}-D) ; \text{同上} \}$$

さて、 Γ の 端成分 とは次のような C の事である。即ち、 Γ



$= \Gamma(D)$ と表わすとき、 $D = D^* + C$ とかけ

は、 $(D^*, C) = 1$ となる C をとる。 $\Gamma_1 = \Gamma(D^*)$

を 2 次変換して Γ をえり、といういふ事

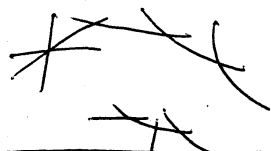
する。2 次変換してえられる Γ_2 と Γ_1 は、互いに双有理同値

といふ。更に、 Γ の孤立成分 C とは $\Gamma = \Gamma(D)$ とおき $D = D'$

+ C とすると $C \cap D' = \emptyset$ となるような C を指す。そ

して、やはり、 $\Gamma(D)$ と $\Gamma(D')$ は 双有理同値 といふ。

例



と



とは 双有理同値

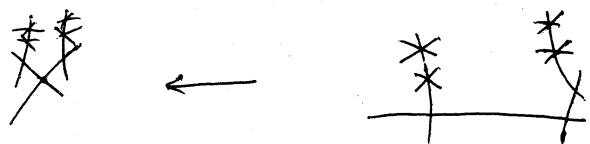
* D の各成分の交叉のみに着目して、それをグラフといふ。

定義から容易に,

命題 1. $P_m(\Gamma)$ と $h(\Gamma)$ は Γ の双有理不変量である.

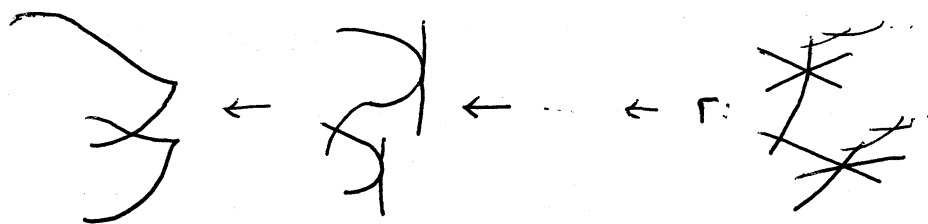
2 D の重複点を中心にする, 通常 Γ の変換では Γ の形が変りすぎるので, これはいいない. 但し, Γ の weight を考えれば, これらもとり扱えるが, 実用的には Γ の重複点を Γ の変換で入りに入ってしまう.

すなわち境界の重複点を中心に Γ を変換するとき, 例えは,

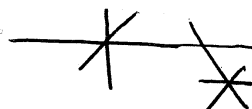


の如くである. このときも, P_m と h は不変であると考えられるが, よくわからない. 実用的には, 重複点を一つだけ, サイクルを構成しない, 或いは, 一点に縮めてよいことがわかる.

例



よって



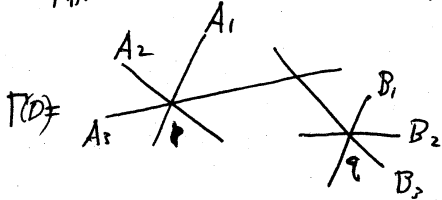
と, Γ の双有理同値類に属する. Zelfrich の定理を示

すなはち、次の補題を示せばよい。

補題 4.

左の Γ について、 $P_2(\Gamma) = 4$, $P_3(\Gamma) \geq 2$,

$$\kappa(\Gamma) = 2, \quad P_1(\Gamma) = 0.$$



証明. 図のように記号を代入して、 p, q を 2 回変換し、図の如く γ の記号を用いる. $m_p = m_q = 3$ なるので、前の補題により

$$K(\bar{S}^\#) + D^\# = K + D - E - F.$$

$$\pm 2, \quad \tilde{A} = \sum A_i, \quad \tilde{B} = \sum B_i.$$

$$\pm 1, \quad \kappa < 2$$

$$\pi(\tilde{A}) = \pi(\tilde{B}) = 1.$$

一方、 $\bar{S}$ は有理曲面上にあるから、 $\dim |K(\bar{S}) + \tilde{A}| = \pi(\tilde{A}) - 1 = 0$,
 $\dim |K(\bar{S}) + \tilde{B}| = \pi(\tilde{B}) - 1 = 0$. よって、 $X \in |K(\bar{S}) + \tilde{A}|$

$Y \in |K(\bar{S}) + \tilde{B}|$ とする.

$$X + Y \sim 2K + \tilde{A} + \tilde{B} \quad \pm 2,$$

$$2(K(\bar{S}^\#) + D^\#) \sim X + Y + \tilde{A} + \tilde{B} - 2E - 2F$$

$$\sim X + Y + E + F + \tilde{A}' + \tilde{B}'.$$

$$\text{よって } \bar{P}_2(\bar{S}) \geq 1. \quad (S = \bar{S} - D \text{ かつ } t_2)$$

$$\pm 3 \text{ には, } 2X + Y \sim 3K + 2\tilde{A} + \tilde{B} \text{ なるので}$$

$$3(K(\bar{S}^\#) + D^\#) \sim 2X + Y + \tilde{A} + 2\tilde{B} - 3E - 3F$$

$$\sim 2X + \tilde{A}' + Y + \tilde{B}' + \tilde{B} \geq X + \tilde{B}.$$

ゆえに

$$\overline{g}(S) \geq \dim |X + \overline{B}| + 1 = \pi(\overline{A} + \overline{B}) = 2.$$

所以, $\pi(S) = 1$ とすると矛盾することになる. 故に
 $\pi(K(\overline{S}^\#) + D^\#, \overline{S}^\#) = 1$ であり, $m \gg 0$ であり,
 $|m(K(\overline{S}^\#) + D^\#)|$ には, 1-要素 $\{\Gamma_u\}$ しかない. すると,

$$\Gamma_u^2 = 0, \quad (K(\overline{S}^\#) + D^\#, \Gamma_u) = 0. \quad \text{ゆえに}$$

$$(2X + \overline{A}' + Y + \overline{B}' + \overline{B}, \Gamma_u) = 0.$$

これにより $(E, \Gamma_u) = (F, \Gamma_u) = (A', \Gamma_u) = (B', \Gamma_u) =$
 $(K + \overline{A}, \Gamma_u) = (K + \overline{B}, \Gamma_u) = 0$ である. $K = K(\overline{S}^\#) -$
 $E - F$ 故に, $(K(\overline{S}^\#), \Gamma_u) = 0$. よって, Γ_u は楕
 円曲線であり, $(D, \Gamma_u) = (A' + E + B' + F, \Gamma_u) = 0$ とな
 るから $\Gamma_u \cap D = \emptyset$ である. 即ち, D は楕円曲面の特異
 ファイバーに入る. したがって, 小平によって分類されている
 D の形のものであることは知られる.

QED

同様にして,

補題5. $G_n' \ast \dots \ast$ (n 個の非連結和).

$$2 \leq n \leq 6 \quad \text{なら} \quad \pi(G_n') = 1,$$

$$n \geq 7 \quad \text{なら} \quad \pi(G_n') = 2.$$

これを示すには, 有理楕円曲面の特異ファイバーを調べればなる.

$\bar{S}$ を $\mathbb{P}^2$ イバー (に例外曲線のない有理橋内曲面として).

すると, Euler 数 $\chi(\bar{S}) = 12$. 一方, 特異 $\mathbb{P}^2$ イバー の正規化でないものは 2 型に限る.

C_a	$\chi(C_a)$	名前
	2	II
	3	III
	4	IV

$\hookrightarrow$ の特異 $\mathbb{P}^2$ イバー なら $2 \times 6 = 12$ 本 * 5, 高々 6 本入りうる. しかも そのような例は, basic member として容易に構成できる. (藤田氏, 水上氏に教わった).

8. 別の種がらう分類は, 正則曲面の分類と似ている.

$\bar{S}$ を 定常の曲面で, $g(\bar{S}) = 0$ で決定する (このとき, 正則曲面という).

次の定理を示されている.

定理 (Castelnuovo).

$$P_2(\bar{S}) = 0 \Rightarrow \bar{S} \text{ は有理曲面} \Rightarrow \chi(\bar{S}) = -\infty \Rightarrow P_2(\bar{S}) = 0$$

定理 (Enriques).

$$P_1 = 0, P_2 = P_\infty = 1 \Rightarrow \bar{S} \text{ は Enriques 曲面} \Rightarrow \chi(\bar{S}) = 0, P_1 = 0.$$

定理 (Enriques).

$$P_1 = P_K = 1 \Rightarrow \bar{S} \text{ は } K3 \Rightarrow \chi(\bar{S}) = 0, P_1(\bar{S}) = 1 \Rightarrow$$

次の種グラフ Γ について次のことが示される.

1. $P_2(\Gamma) = 0 \Rightarrow A_n \text{ (星型)} \Rightarrow \chi = -\infty,$
2. $P_1 = 0, P_2 = P_K = 1 \Rightarrow G_2 \text{ (2重星型)} \Rightarrow \chi = 0, P_1 = 0.$
3. $P_1 = P_K = 1 \Rightarrow \Gamma_K \text{ (2重星型)} \Rightarrow \chi = 0, P_1 = 1.$

$$B_n \text{ (2重星型)} \quad \gamma \neq 0 \quad (\gamma \geq 0)$$

このようにして、代数曲面の分類論、完全な類似性、グラフについても成立する。そのような意外性も考慮に入れて、次の種グラフとの遭遇といったのである。

9. グラフの分類は決して通用ではない。例えば、次の定理がでる。

定理3 (2種数定理). $NN(D) = \{x \mid D \text{ は } x \text{ で正規3元でない}\}$
とおく. $\#NN(D) \geq 2$ なら $\overline{P}_2(\overline{S}-D) \geq 1$.

定理4 (4種数定理). $\#NN(D) \geq 2$ のとき, $NN(D) = \{p, q\}$
であれば, 次の p, q の一つの既約成分上にあるときを除く
と $\overline{P}_4(\overline{S}-D) \geq 2$. 特に $\pi(\overline{S}-D) \geq 1$.

4種数定理と3種数定理に改良するにはこの向をいく必要がある。

問

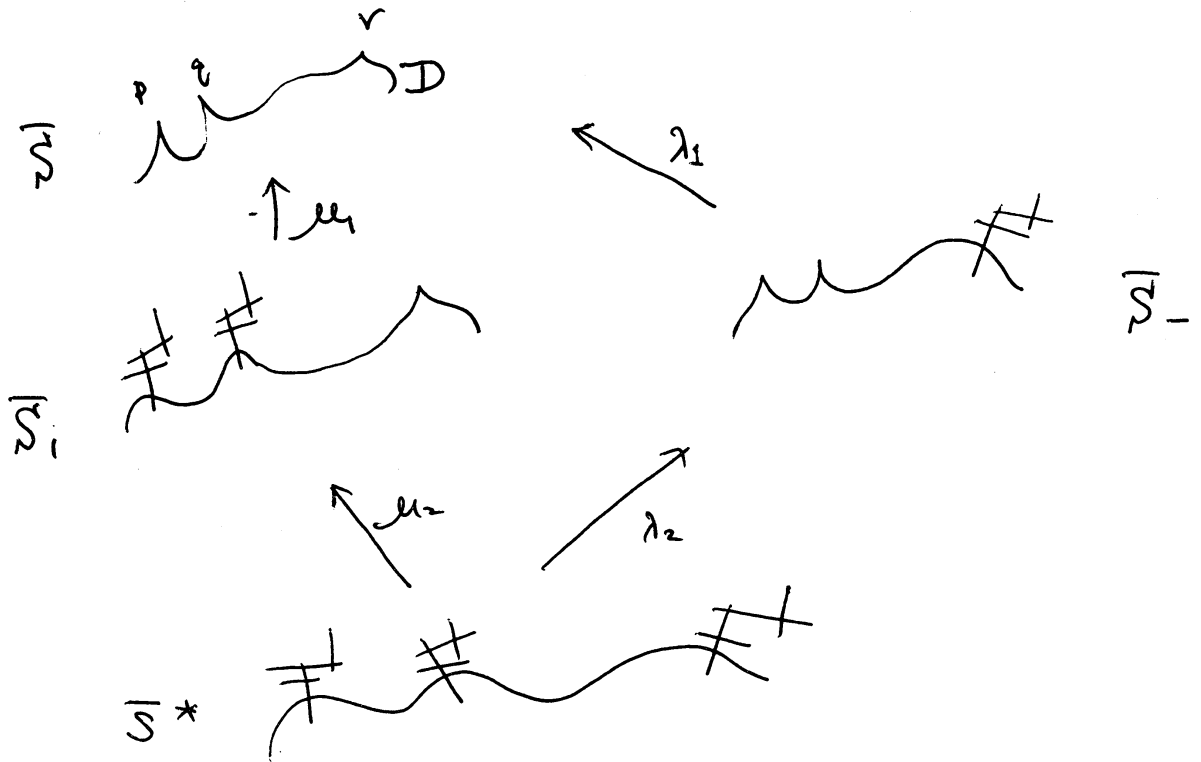
Γ :  のとき $P_3(\Gamma) \geq 2$ か?

注. $P_4(\Gamma) \geq 2$ は証明されている. 又 $\pi(\Gamma) = 1$ である.

2種数定理を応用して, 次の VST を示す.

定理5. $\#NN(D) \geq 3$ なら VST が成立.

証明. 便宜上, p, q, r の3点をこの向をなくす. 実はこのとき $\pi = 2$ ならば VST は自明. さて, $\{p, q\}, \{r, \dots\}$ と2成分交換のくり返しを2様に行なう. $E_p, E_q, E_r, \dots$ と p, q, r に依った



例升成分の和としよ。 $\lambda_1^{-1}(D) = D_1 + E_r$ とおく。
 2種補題より $\chi(\bar{S}_1 - D_1) \geq 0$ 。 $\pm 7, \vartheta = \mu_1^{-1}(D) =$
 $D_2 + E_p + E_t$ とおく。 $\pi(D_2) \geq 1$ 。 即ち $\chi(K(\bar{S}) + D_2,$
 $\bar{S}_1) \geq 0$ 。 第2段補題より

$\chi(K(\bar{S}) + D, \bar{S}) = \chi(K(\bar{S}_1) + \mu_1^{-1}(D), \bar{S}_1) \pm 5$
 1. $\mu_2^{-1}(\vartheta) = \vartheta_1 + E_r$ とおく。 $\lambda_2^{-1}(D_1) = \vartheta_1$ 。
 よ、 $\chi(\bar{S}^* - \vartheta_1, \bar{S}^*) = \chi(\bar{S}_1 - D_1) \geq 0$ 。 即ち、
 第1段補題を使て

$\chi(\bar{S} - D) = \chi(K(\bar{S}_1) + \mu_1^{-1}(D), \bar{S}_1)$ 。 前より、
 とおくと、

$$\chi(\bar{S} - D) = \chi(K(\bar{S}) + D, \bar{S}) \geq 0. \quad \text{QED}$$

このようにして、2段階に分離して考えることも有用なものである。

10. 今後の問題として、面白そうなのは、高次元への一般化を試みることであろう。

V を n -次元有理多様体, W を $n-1$ -次元の素因子とする。

$$1) \chi^\#(W) \geq 0 \quad \text{なす} \quad \chi(V-W) \geq 0 \text{ か?}$$

$$2) \chi^\#(W) = n-1 \quad \text{なす} \quad \chi(V-W) \geq n-1 \text{ か?}$$

これは、 $n=2$ なら示されている。とくに、 $V = \mathbb{P}^n$ として、

2)' $\chi^\#(W) = n-1$ なす $\chi(\mathbb{P}^n - W) = n$ 又は、 $\bar{g} \geq 2$?
も問かけておこう。これは、若林の定理の一般化として申し分ない。

ついで、グロウフ爺も高次元に一般化できるだろう。

このようにして、local-global な特異点の形状も、基本的視点を失うことなく研究されていく。対数的小平次元の灯台的役割は無視できないと信ずる。

11. キャンデーヌの問題 $\mathbb{P}^2$ 内に既約曲線 C_d, C_m, C_ℓ がある。

1) $\mathbb{P}^2 - C_d \cup C_m \cup C_\ell = \mathbb{C}^{\times 2}$ とする。このとき C_d, C_m, C_ℓ を求めるのが、いわゆるキャンデーヌの問題である。

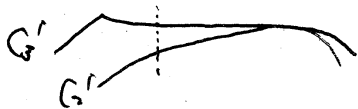
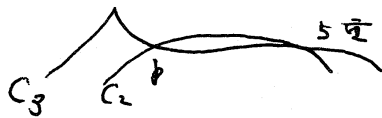
これは、有理曲線で、特異点は、あ、たとして与えらる。

個々のた。そして、この特異点は共有される。これは Zelphice の定理の系とみなされる。

C_0 が非特異 ($\deg C_0 \leq \deg C_m \leq \deg C_\ell$ と関係づけられてゐるのは当然!) のとき, $\deg C_0 = 1$ であり, 座標変換して, $\deg C_m = 1$ にできる。そして $C_\ell = \overline{T}_\varphi$, $\varphi = f(x)/x^m$ になるのである。

この問題の詳細な研究は他に発表されてゐる。

12. Ramanujan の問題



左の如き 2-重, 3-重曲線があり,

$Q_p(\mathbb{P}^2)$ の座標変換と G', G'_1 と

との, $S = Q_p(\mathbb{P}^2) - G' \cup G'_1$

を Ramanujan の曲面 とする。

$S \times \mathbb{C}^1$ は $\mathbb{C}^3$ と homeo. は知られてゐる。

しかし, $\overline{P}_{a,b,c}(\mathbb{C}^3)$

$= 0$ ならば, $\pi(S) \geq 0$ と

之(これは) $S \times \mathbb{C}^1$ と $\mathbb{C}^3$ は代数的に同型でないことを直感的にわかる。

これは、2種の定理を直接使ふ例で、 $\pi(S) \geq 0$ 。

しかし、もう少し詳しく $\pi(S) = 2$ を示してゐた (m又、藤田[1])。

$\pi(S) = 2$ のとき $\mathbb{C}^2 \rightarrow S$ への non-deg. ^{解的} 正則写像はない。

(西村の定理) ゆえに、 $S \times \mathbb{C}^1$ と $\mathbb{C}^3$ は 双正則同値 ^{解的} ではないことをわかった。

このように π は極めて有用なものである。

13. 若林の定理の逆の成否も面白い問題である。即ち

$C \subset \mathbb{P}^2$, $C - \{p\} \simeq A^1$ (至多1点の有理曲線) とする

このとき $\kappa(\mathbb{P}^2 - C) = -\infty$ とあるか?

$e(p, C) = 2$ とすると, $\deg C \leq 5$ のときは $\kappa = -\infty$,

$\deg C \geq 6$ ならば $\kappa(\mathbb{P}^2 - C) \geq 0$ (とくに2). (吉原)

$\deg C = 6$ とすると, p の近傍に近しい特異点重数は9個もある。

さらに, $\deg C = 5$ として $\kappa(\mathbb{P}^2 - C) \leq 0$ とある C ^{すいて} ~~すいて~~ があることも定まっていない。 $\kappa(\mathbb{P}^2 - C) = 0$, $\bar{g} = 0$ のときは, 中々難しい。

ともあれ, 平面有理曲線の研究も新しい観点から, 再開されるべきである。元の方法はせうかいかでも 結論は 単純明快なことがあると保証される。

[1] 飯高 茂; Some applications of logarithmic Kodaira dimension, Proc. Int. Sym. Alg. Geo. Kyoto 1977.

[2] " ; Virtual singularity theorem and logarithmic genus theorem, preprint.

[3] " ; On Kodaira dimension of graphs, P. J. A

(4) 川又雄一郎; Addition theorem of log. Kodaira dimension.

(5) 若林 功, On log Kodaira dim of complements of curves, P. J. A (4月20日)