

Homeomorphism group の評価写像について

筑波大学数学科 川村 一宏 (Kazuhiko Kawamura)

Homogeneous continuum の homeomorphism group の位相的な性質と調べることは、連続体理論の重要な問題である。これを調べる上で一つの手掛りを与えるのが「評価写像 (evaluation map) が completely regular map である」という事実である (Theorem 1.3)。completely regular map は bundle map の概念を一般化したものであるから、各 fibre の性質と知ることが重要になるが、残念ながら評価写像の fibre はあまり「良い」空間とはいえない。そこで homeomorphism group を含む空間と新たに考え、その上に complete regularity を保ったまま評価写像を拡張し、なにか fibre が「良い」空間になるようにできないか? という問題を考える。

wild な空間と調べるために、その空間と多面体の inverse limit として表現する、というのは一般的な方法であるが、homeomorphism group は inverse limit に対して「うまく」振舞わない。一方 J. Kennedy により homeomorphism group とある hyperspace に埋め込む方法が得

られている。hyperspace or inverse limit に対して 'うまく' 振舞うことは古典的に知られているから、これを手掛りとすることにする。ここでの方法は、一般的な homogeneous continuum に対してはあまり有効とはいえないが、pseudo-arc に対してはある程度の情報を与えることがわかる。

§1. 定義と知られている結果

Compact connected metric space を continuum と呼ぶことにする。Continuum X に対し、 X 上の homeomorphism の全体に sup. metric を入れたものを $H(X)$ で表わし、 X の homeomorphism group といい。これは completely metrizable, separable topological group である。

Def. 1.1 (1) Continuum X が homogeneous であるとは、任意の $x, y \in X$ に対し homeomorphism $f: X \rightarrow X$ が $f(x) = y$ とみたすようにとれることである。

(2) Homogeneous continuum X の点 p を固定する。写像 $e_p: H(X) \rightarrow X$ を

$$e_p(f) = f(p) \quad (\forall f \in H(X))$$

で定義して、 X の (p にあける) 評価写像 (evaluation map) といい。

Def. 1.2. metric space の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が completely regular であるとは、 f が次の条件をみたすことである。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の様な $\delta > 0$ が存在する:

任意の $y, z \in Y$ with $d(y, z) < \delta$ に対して homeomorphism

$h: f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(z)$ が、 $d(h, \text{id}_X) < \varepsilon$ となるように出来る。

(注) 通常は f の fibre が全て compact であることも要求されるが、

ここでは J.T. Rogers に従って上の様に定義しておく。

Homogeneous continuum の評価写像はもう λ surjective だが、更に

Theorem 1.3. X は homogeneous continuum, $p \in X$ とする。このとき

$e_p: H(X) \rightarrow X$ は completely regular である。(本質的に Effros の定理)。

$H_p(X) := \{f \in H(X) \mid f(p) = p\}$ とおく。

任意の $q \in X$ に対して $e_p^{-1}(q) \approx H_p(X)$

であるのは明らかである。

Def. 1.4. X を continuum とする。

(1) $\pi_i: X \times X \rightarrow X$ を第 i 座標への射影とする ($i=1, 2$)。

(2) X の空でない subcontinuum の全体に Hausdorff metric を入れたものを $C(X)$ で表わし、 X の hyperspace と呼ぶ。

(3) $C^\pi(X) = \{K \in C(X \times X) \mid \pi_i(K) = X \quad i=1, 2\}$ とおく。

Theorem 1.5. ([Ken]). $\varphi: H(X) \rightarrow C^\pi(X \times X)$ を

$$\varphi(f) = \text{graph } f (= \{(x, f(x)) \mid x \in X\})$$

と定義すると、 φ は埋め込みである。

§2. 評価写像の拡張

Theorem 1.5 にあける埋め込みを考えた時、 $f \in H(X)$ に対して

$$f(p) = \pi_2(\text{graph } f \cap p \times X)$$

以下 $p \in X$ は固定する。

Def. 2.1. X は homogeneous continuum とする。 $C_\#^\pi(X)$ と写像

$$E_p: C_\#^\pi(X) \rightarrow X$$

$$C_\#^\pi(X) = \{K \in C^\pi(X) \mid K \cap (p \times X) \text{ は 1 点集合}\}$$

$$E_p(K) = \pi_2(K \cap p \times X)$$

と定義する。また $C_p^\pi(X)$ を

$$C_p^\pi(X) = \{K \in C_\#^\pi(X) \mid K \cap (p \times X) = \{(p, p)\}\}$$

定義から直ちに、

Prop. 2.2. $E_p: C_p^\pi(X) \rightarrow X$ は completely regular で次の図式は可換。

$$\begin{array}{ccc} C_p^\pi(X) & & \\ \uparrow \varphi & \searrow E_p & \\ H(X) & \xrightarrow{e_p} & X \end{array}$$

$$\text{或は } E_p^{-1}(q) \approx C_q^\pi(X) \quad (\forall q \in X)$$

である。

$A, B \in C_p^\pi(X)$ に対して、 $C_p^\pi(X)$ 内で A, B を結ぶ arc $\alpha(A, B)$ が、直径 $d_H(A, B)$ でとることもできる。このことを使って [Ke] の方法により、次のことが示せる。

Theorem 2.3. X が homogeneous とすると、 E_p の fibre は全て completely metrizable, separable ANR である。

$C_*^\pi(X)$ の定義から想像できる様に、 $H(X)$ は $C_*^\pi(X)$ の中で非常に '薄く' 埋め込まれている。実際、homogeneous continuum or the Property of Kelley ともこのことから次のことがわかる。

Prop. 2.4. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次のような ε -homotopy $H: C$
 $H: C_*^\pi(X) \times [0, 1] \rightarrow C_*^\pi(X)$ が存在する。

$$(1) H_0 = \text{id}_{C_*^\pi(X)} \quad (2) H(C_*^\pi(X) \times [0, 1]) \subseteq C_*^\pi(X) \setminus \varphi(H(X))$$

§3. pseudo-arc の応用。

Def. 3.1 (1) continuum が arc の inverse limit として表わされる時、arc-like と言う。

(2) arc-like かつ homogeneous である continuum が位相的に唯一存在し $([B_1], [B_2])$ 、それ $\in$ pseudo-arc と言う。以下 pseudo-arc を P で表わ

す。

2.2 で述べた方法を P に適用すると、

Theorem 3.1 $E_p: C_p^\pi(P) \rightarrow P$ は 2.2 ~ 2.4 に加えて次の性質をもつ。

- (1) $E_p^{-1}(q) \approx l_2 (= \{ (x_i) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ かつ } \sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty \} : \text{Hilbert space})$ ($\forall q \in P$).
- (2) $\varphi(H(P))$ は $C_p^\pi(P)$ の中で dense
- (3) 写像 $S: P \rightarrow C_p^\pi(P)$ が、 $E_p \circ S = \text{id}_P$ をみたす様にとれる。

(3) は E_p が section を持つことを主張するもので、 S の値域を $H(P)$ にとることができないことが知られている。従って (3) は空間を $C_p^\pi(P)$ まで拡張したことの利点の一つと言える。また (2) はその拡張方が「途方もなく大きいものではない」ことを示している、といえる。

(2) の証明は [S] から直ちに得られる。また (3) は (1) 及び Prop. 2.2 を Michael の selection theorem と合わせて使えばよい。(1) は次の様なステップに分けて示される。

ステップ 1. P を次の様な arc $I_n = [0_n, 1_n]$ の inverse limit として表す。

$$(i) P = \varprojlim (I_n, p_n^m: I_m \rightarrow I_n)$$

$$(ii) p_n^{m-1}(0_n) = \{0_m\} \quad \forall m \geq n \quad \text{かつ} \quad (0_n) \text{ は } p \text{ を定義する。}$$

$$\text{よって} \quad E_p^{-1}(p) = C_p^\pi(P) = \varprojlim (C_{0_n}^\pi(I_n), p_n^{m+}) \quad \text{であることがわかる。}$$

る。但し $p_n^{m*}: C_{0_n}^\pi(I_m) \rightarrow C_{0_n}^\pi(I_n)$ は、

$$p_n^{m*}(K) = p_n^m \times p_n^m(K)$$

により定義される写像。このとき $[K_a]$ により p_n^{m*} は surjection.

ステップ 2. $C_{0_n}^\pi(I_n) \approx l_2$ を示す。これを示すため、

$$\hat{C}_{0_n}^\pi(I_n) = \{K \in C^\pi(I_n) \mid K \cap 0_n \times I \ni (0_n, 0_n)\}$$

と置く。 $\hat{C}_{0_n}^\pi(I_n) \approx Q$ (= Hilbert cube) であること $[Cu-Sh]$ により分かる。 $[Cu]$ による、 Q の中の $S = (0, 1)^\infty \approx l_2$ の特徴付けを確かめることにより $C_{0_n}^\pi(I_n) \approx l_2$ となる。

ステップ 3. $[N]$ の方法を適用して、 $p_n^{m*}: C_{0_m}^\pi(I_{m+1}) \rightarrow C_{0_n}^\pi(I_n)$ は cell-like map であることがわかる。ステップ 2 から p_n^{m*} は near-homeomorphism であり、最後に $[M]$ により $C_P^\pi(P) \approx l_2$ であることがわかる。

参考文献

- [Bi₁], R.H.Bing, A homogeneous indecomposable plane continuum, Duke Math. 15 (1948), 729-742.
- [Bi₂], ———, Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, Proc. A.M.S. 10 (1959), 345-346.
- [Cu], D.W.Curtis, Boundary sets in the Hilbert cube, Top. and its Appl. 20 (1985), 201-221.
- [Cu-Sh], ——— - R.M.Shori, Hyperspaces which characterize simple homotopy type, Gen. Top. and its Appl. 6 (1976), 153-165.
- [Ka], K. Kawamura, Span zero continua and the pseudo-arc, Tsukuba J. Math. 14 (1990), 327-341.
- [Ke], J.L.Kelley, Hyperspaces of continua, Trans. A.M.S. 52 (1942), 22-36.
- [Ken], J.Kennedy, Compactifying the space of homeomorphisms, Colloq. Math. 56 (1988), 41-58.
- [N], S.B.Nadler, Induced universal maps and some hyperspaces with fixed point property, Proc. A.M.S. 100 (1987), 749-754.
- [S], M.Smith, Concerning the homeomorphisms of the pseudo-arc X as a subspace of $C(X \times X)$, Houston J. Math. 12 (1986), 431-440.
- [M], J.Mioduszewski, Mappings of inverse limits, Colloq. Math. 10 (1964), 39-44.

以上.