

C^* -接合積上のトレースについて

岡大教養 梶原 毅
(Tsuyoshi Kajimara)

§ 0. Introduction.

局所コンパクト群 G が I 型でないときには既約ユニタリ表現全体を分類することは不可能とされており, 別の対象を考えることが必要になる。 G に対して群環 $C^*(G)$ または $C_r^*(G)$ を考えて, その原始イデアル空間の分類またその位相の研究は Effros, Hahn, Gootman, Rosenberg 等によって進展した。群 G が正規部分群 N によって群拡大の形になっていて G/N が amenable のときには Mackey 型の定理が成立することが知られている。[1]。

一方, 因子表現の中でもトレースを持つ表現は正規表現と呼ばれて特別の意味を持っており, また正規表現全体がスタンダード Brel 空間になることも知られている。ところが G が必ずしも離散でない場合にはトレースは有界な汎関数ではなくなってしまう。そのために $C_r^*(G)$ のトレースを N まで置換して議論することが容易でなくなり, これがトレースの理論がイデアル論ほどに完結されていない一つの理由である。

そこで、この問題に対する 1 ステップとして $C_r^*(G)$ 上のトレースで N から来ているものをいかに特徴づけるか、ということが考察の対象になる。 N が G の閉正規部分群とすると、 $C_r^*(N)$ 上の適当なトレースは $C_r^*(G)$ まで誘導することができ、表現論的には Mackey の誘導表現 [4] に対応している。この誘導されたトレースを $C_r^*(G)$ と N によって決まる代数的なあるものによって規定することが本講演の目的である。ただし、 $C_r^*(G)$ のかわりに C^* -接合積 $C_r^*(A, G, \alpha)$ を考えて少し一般化しても本質的には変わらないので、接合積の方を考察の対象とする。

§ 1. 主定理

(A, G, α) を C^* -カテゴリーとし、 N を G の閉正規部分群とする。 C^* -接合積 $C = C_r^*(A, G, \alpha)$ と $D = C_r^*(A, N, \alpha)$ を考える。 φ_0 は D 上の下半連続半有限 (以下略) なトレースで、 G の作用によって $\Delta_{G/N}$ (G/N のモジュラー関数) - 相対不変であるとする。

補題 1. [6]

φ_0 を C まで誘導することができ、対応する G/N の表現は誘導表現である。

次にこの誘導されたトレース ($\text{Ind}_{N \cap G_0} \varphi_0$ とかく) を特徴づける代数的手段について説明する。 A はある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上に忠実に表現されているとする。このとき C は $L^2(\mathcal{H}, G)$ 上に自然に表現される。 $L^2(\mathcal{H}, G)$ の $L^2(G/N)$ 上の $\mathbb{C}$ -タリ作用素 W を

$$(W\xi)(s, t) = \xi(s, \tilde{s} \cdot t)$$

によって定義する。 $\alpha \in C$ に対して $S(\alpha) = W^*(\alpha \otimes 1)W$ とおく。 S は G/N の C 上の標準的な co-action を与える。また、 λ は G/N の左正則表現を表すとき、 $\delta(\lambda(\tilde{x})) = \lambda(\tilde{x}^{-1})$ は $C_r^*(G/N)$ の対合 (同じ δ で表す) を与える。

定義 2 [6]

C 上のトレース φ が (S, δ) 不変であるとは、

$$\langle S(\alpha), \varphi \otimes w \rangle = \langle \alpha \otimes 1, \varphi \otimes w \rangle \quad \forall \alpha \in C^+, \quad \forall w \in C_r^*(G/N)_+$$

$$\begin{aligned} \langle (\varphi^* \otimes 1) S(\alpha), \varphi \otimes R \rangle &= \langle S(\varphi^*)(\alpha \otimes 1), \varphi \otimes (R \circ \delta) \rangle \\ &\quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{N}_\varphi, \quad \forall R \in A(G/N). \end{aligned}$$

が成り立つことである。ここで $\mathcal{N}_\varphi$ は φ の L^2 -元全体、 $A(G/N)$ は G/N の Fourier 環を表す。

以上の準備のもとで主定理をのべることができる。

定理

C 上のトレース φ が N から誘導されているための必要十分条件は、 φ が (S, δ) 不変なことである。

注意

G が可換で N が自明な部分群であるときには (δ, α) 不変性は $\hat{G}$ による対作用による不変性に対応し、このとき定理は、 N 、 V 、Pedersen の結果 [5] になる。

§ 2. 証明の概略

上の定理は Mackey-Takesaki の Imprimitivity 定理のトレース版と考えられ、証明もこれを用いて行なわれる。証明の際の問題点は C^* -環の状況と W^* -環の状況をつなぐところである。

$\mathcal{H}$ を $C = C_r^*(A, G, \alpha)$ のトレースで (δ, α) 不変なものとする。 $\mathcal{H}_\mathcal{G}$ を $\mathcal{H}$ による G N S 表現の Hilbert 空間を表す。 $k \in A(G/\Gamma)$ に対して δ_k を $\delta_k(f)(g) = k(g)f(g)$ ($f \in C_c(A, G)$) によって定義する。 δ_k は C 上の線型写像に拡張できる。明らかに $k \rightarrow \delta_k$ は代数的な準同型を与えている。

補題 3.

$k \rightarrow \delta_k$ は $A(G/\Gamma)$ の $\mathcal{H}_\mathcal{G}$ 上の有界な $*$ 表現になる。さらに $C_0(G/\Gamma)$ の有界な $*$ 表現に拡張することができる。

δ_k の定義から直ちに、この表現が G N S 表現 $\pi_\mathcal{G}$ に対して G/Γ を底とする imprimitivity 系をなすことがわかる。

Mackey-Takesaki の定理により、次のことがわかる。

補題4.

π_g に対して $C_r^*(A, N, \alpha)$ の表現 π_0 が一意的に存在して $\pi_g \cong \text{Ind}_{N \uparrow G} \pi_0$ となる。

π_0 は G -不変な表現である保証があるので π_0 を G で平均した表現を π で表す。 $(\pi = \int_G^{\oplus} \pi_0 dg)$ このとき $\text{Ind } \pi_0$ と $\text{Ind } \pi$ は quasi-同値になるのでこれらの値域が生成する W^* 環は代数的に同型になる。この W^* 環を M で表す。 M は π によって生成されているとする方が都合が良い。 $\tilde{\varphi}$ で φ の M への正規拡張を表す。 C^* -接合積の場合と同じように、 $M = (\text{Ind } \pi(C))^{\prime\prime}$ 上に G/N の coaction を標準的に定義することができる。これに対しても同じ記号 δ を用いる。このとき KAC 環の W^* -環上への作用についての Stratila - Voiculescu - Zide の結果 [7] を用いることによって次のことがわかる。

補題5.

$\tilde{\varphi}$ は (δ, δ) 不変である。

M は必ずしも W^* -接合積にはなっていないが接合積に類似のもの (Extended covariance algebra などと呼ばれる) になっており、これに対しても W^* -接合積と同様の議論をほとんどして展開することができる。そこで Haagerup [3] の議論を借用することによって次のことがわかる。

補題6.

$P = \pi(C_r^*(A, N, \alpha))''$ とすると P 上に正規忠実半有限 (これも以下略す) トレース $\tilde{\varphi}_0$ が一意的に存在して $\tilde{\varphi} = \text{Ind}_{N \rtimes G} \tilde{\varphi}_0$ となっている。

P の中で $D = C_r^*(A, N, \alpha)$ は dense に表現されているが, $\tilde{\varphi}_0$ のそこへの制限はすべて発散する恐れがあるのでそうならないことを証明しなければならない。そのためには C, M 上の G/N の co-action による二重接合積を考え、それらの双対性を用いることが必要になる。 $\tilde{\pi} = \text{Ind}_{N \rtimes G} \pi$ とする。

補題7.

$$C^*(\tilde{\pi}(C), G/N, \delta) \cong \pi(C) \otimes \mathcal{K}(L^2(G/N))$$

$$W^*(M, G/N, \delta) \cong P \otimes \mathcal{B}(L^2(G/N))$$

であり, 上の2つの同型は同一のユニタリ作用素 U によって与えられる。 $\mathcal{K}$ はコンパクト作用素全体, $\mathcal{B}$ は有界線型作用素全体を表す。

G/N による co-action は W^* 環の状況において Haagerup の定義した作用素値重み [2] を与えるので, これを用いて, co-action によるトレースの誘導を考えることができる。 $\tilde{\varphi}$ を $W^*(M, G/N, \delta)$ に誘導したトレースを $\tilde{\varphi}_1$ と表す。

補題8.

$\tilde{\varphi}_1$ を $C^*(\tilde{\pi}(C), G/N, \delta)$ に制限すると半有限である。

そこで $\tilde{\varphi}_1$ の制限を φ_1 と表す。

補題 9.

$\tilde{\varphi}_1, \varphi_1$ を補題 7 の右側で考えるとそれぞれ $\varphi_0 \otimes \text{Tr}$ と, φ_0 の Tr の C^* -部分環 Λ の制限になっている。

φ_1, Tr が $\pi(D)$ の $\mathcal{C}(L^2(G/N))$, $\mathcal{C}(L^2(G/N))$ の半有限トレースであることから次のことがわかる。

補題 10.

$\tilde{\varphi}_0$ の $\pi(D)$ Λ の制限は半有限である。

この補題によって W^* -接合積の議論から C^* -接合積の論が導かれたことになる。

補題 11.

$\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 \circ \pi|_D$ とすると, $\varphi = \text{Ind}_{N \uparrow G} \varphi_0$ となる。

これが求める結果である。

注意. G を局所コンパクト群, K も局所コンパクト群で G の中に dense に入っているとする。 $C_r^*(C_0(G), K)$ は単純であることが知られているが K が離散でない場合にはこの C^* -環のトレースが $C_0(G)$ から誘導されたものに限るかどうかは難かしい問題である。 G が可換のときには定理を適用して一意性が得られるが, 可換でない場合に定理が適用できるかどうか今のところ, よくわからない。

参考文献

- [1] E. Gootman and J. Rosenberg, The structure of crossed product C^* -algebras, Invent. Math., 102(1979), 283-298.
- [2] U. Haagerup, Operator valued weights in von Neuman algebras, preprint.
- [3] U. Haagerup, On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras, Math., Scand., 43 (1978) 99-118.
- [4] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups, Ann. Math., 55(1952), 139-161.
- [5] N.V. Pedersen, On certain KMS weights on C^* -crossed products, Proc. London Math., 44(1982), 445-472.
- [6] L. Pukansky, Characters of connected Lie groups, Acta Math., 133(1974), 81-137.
- [7] S. Stratila, D. Voiculescu and L. Zido, On crossed products, Rev. Roumania, (1976), 1411-1449.
- [8] M. Takesaki, Covariant representations of C^* -crossed products and their locally compact automorphism groups, Acta Math., 119(1967), 273-302.