

岩沢類数公式の一般化 II

東大・教養 片岡 俊孝

§ 0. Introduction.

p を素数, m を有理数とする. $\{ \sqrt[p^n]{m} \}_{n=0}^{\infty}$ と, $(\sqrt[p^n]{m})^p = \sqrt[p^{n-1}]{m}$, $n=1, 2, \dots$, とおきようにえらんでおく. 拡大
 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[p]{m}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[p^2]{m}) \subset \dots \subset \mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{m}) \subset \dots \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{m})$
 を考える. $m=1$, $\sqrt[p]{m}$ を 1 の原始 p 乗根とすると, これは
 $\mathbb{Q}(\sqrt[p^q]{m})$ ($q = \begin{cases} p & p \neq 2 \text{ or } 4 \\ 4 & p=2 \text{ or } 4 \end{cases}$) 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大となっている. この
 とき, 整数 λ, μ, ν が存在して, 十分大きな n に対して,
 $\mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{m})$ の類数の p -part は, p^{e_n} , $e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$, とかけ
 ることが知られている (岩沢の類数公式). ここでは,
 $m \neq 1$, 0 の case への類数公式を, 拡張することを考
 える.

ところで, 上の岩沢の類数公式の証明は, $\mathbb{Z}_p$ 上の一次形式
 的の中級数環上の加群の話に還元される. それは, 任意の有
 限次代数体上の $\mathbb{Z}_p$ -拡大の場合でも, 全く同一である. 我々

の場合でも、適当な分岐にかんする条件をみたしてやすれば、他の場合についても同じようにあうことができる。

さて、片岡 [7] を、一般化した次のような有限次代教体 k 上の無限次代教拡大 K を考えよう。

(*)_p: k 上の拡大 L で次の i) ~ iii) をみたすものが存在する。

i) L/k : Galois 拡大,

ii) $L \cap K = k$,

iii) KL/L : $\mathbb{Z}_p$ -拡大。

この拡大 K/k の中間体は、片岡 [7] と同じようにかける。

(α) 整数 $n \geq 0$ に対して、 k 上の拡大次数が、 p^n である K/k の中間体 k_n が唯一存在する。

(β) $k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \dots \subset k_n \subset \dots \subset K$

(γ) $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} k_n$

i) ~ iii) をみたす L に対して、 KL/k は、Galois 拡大となり、そのようなものの中で最小のものが存在する。以後、 L はつねにそのようなものをあらわすとしよう。このとき、 $\text{Gal}(L/k)$ は、自然に $\mathbb{Z}_p^\times$ の closed subgroup と identify

することが出来る。ここで2つの case にわけれる。

$$(A) [L:k] < +\infty$$

$$(B) [L:k] = \infty$$

(A) の case は、すでに片田 [7] であがっている。この case では、拡大 K/k の片田 [8] §1 の意味での Galois 群の作用全体のなす環 " R " によって中間体の p -class group の一様な記述が得られ、 $\mathbb{Q}_p$ -拡大のときと同様の方針で、岩沢類数公式の成立することが示される。ところが、(B) の場合では、(A) のとき " R " にあたらずのが $\mathbb{Q}_p$ となってしまって、 $\mathbb{Q}_p$ -拡大のときと同じ方針で類数公式をもとめることは、全く不可能になってしまう。したがって、拡大 KL/k を考えることが必然的になってくる。冒頭にあげた拡大は、 $(*)_p$ をみたし、(B) の case にあたる。以後、(B) が成立することを仮定する。

このような問題に対して、今のところ特殊な場合しかわかっていない。この報告では、一般の方針をのみ、わかりやすい場合に限定して、結果を説明することにする。大雑把にいうと、考察は、次の3つの部分に分かれる。

- (1) 中間体の p -class group の一様な記述,
- (2) 分類問題,
- (3) index の計算.

以後, (1), (2) 及び L/k が cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大を, S とするの
拡大 K/k の記述のみを限定する. (2) の特殊な case で "の
explicit な記述", (3), p -rank にかんする結果 及び "例" など
は割愛する.

記号

- (1) $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大 M に対して, C_M で $\varprojlim_{M' \subset M} C_{M'}$ をあらわす.
ただし, M' は M の $\mathbb{Q}$ 上有限次である部分体をめたり, $C_{M'}$
は M' の p -class group をあらわす.

- (2) $\eta \in \text{Hom}(\text{Gal}(L/k), \mathbb{Z}_p^\times)$ を.

$$\begin{array}{ccc} \eta; \text{Gal}(L/k) & \longrightarrow & \text{Aut}(\text{Gal}(KL/L)) = \mathbb{Z}_p^\times \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \sigma & \longrightarrow & (\sigma \mapsto \tilde{\sigma} \circ \sigma \tilde{\sigma}) \end{array}$$

で定める. ただし $\tilde{\sigma}$ は σ の kL の automorphism への拡張である.

- (3) $G = \text{Gal}(KL/k)$, $H = \text{Gal}(KL/k)$, $N = \text{Gal}(KL/L)$
と置く.

- (4) $\Lambda_G = \mathbb{Z}_p[[G]]$, $\Lambda_H = \mathbb{Z}_p[[H]]$, $\Lambda_N = \mathbb{Z}_p[[N]] = \Lambda$ と置く.

- (5) L/k は、仮定より、 k 上の $\mathbb{Z}_p$ -拡大を唯一つ含むが、
 それと k 上 linearly disjoint な極大な部分体 α 一つを
 L_0 とかく。 $p=2$, $\text{Im } \gamma \neq -1$ のときには、このような L_0 は
 2つ存在し、それ以外の場合は unique に定まる。
- (6) $\text{Gal}(KL/L_0) = G_0$ とかく。

§1. 分岐.

まず、類数公式が成立するためには、最低階次が必要と思
 われる。

(R-1); K/k で分岐する k の素点は有限個。

さらに強い条件として次のようなものが考えられる。

(R-2); K/k で分岐する k の素点は有限個であり、
 KL/L_0 で分岐する KL の素点の inertia field は、 L
 あるいは L_0 上の有限次拡大である。

(R-3); (R-2) とみたし、拡大 KL/k での inertia field が
 k_n ($n \in \mathbb{Z}, \geq 0$) である KL の素点が存在する。

(R-2), (R-3) に、さらに条件

“ KL/L_0 で分岐する KL の素点の decomposition field は、 L_0
 上の有限次である。”

を追加したものをそれぞれ、(R-2)', (R-3)' と呼ぶことにする。

以上の準備のもとで、

命題 1.1 p odd とする. $(R-3)$ を仮定する. n_0 次のような性しつてみたる非負整数とする.

" $k_{n_0}L$ の素点から $kL/k_{n_0}L$ で分岐するものは", τ で "完全分岐する".

このとき.

(1) 整数 $n \geq n_0$ に対して, $C_n \cong C_{kL}/C_0 C_1^{\omega_{n_0, n}}$ が成り立つ.

ただし, $C_0 = \text{Ker}(C_{kL} \rightarrow C_k)$, $C_1 = \text{Ker}(C_{kL} \rightarrow C_{k_{n_0}L})$ で

ある. 整数 $0 \leq m \leq n$ に対して, $\omega_{m, n} \in \frac{\sigma^{p^n} - 1}{\sigma^{p^m} - 1} \in \Lambda_N$ で定

める. ここに σ は N の topological generator である.

(2) C_0 は, $[C_{kL}, H] (= \langle c^{h-1} \mid c \in C_{kL}, h \in H \rangle)$ を示し,

$C_0/[C_{kL}, H]$ は $\mathbb{Z}_p$ -加群として, 有限生成で, generator

の数は, " kL/kL_0 で分岐する k の素点の数 $- 1$ " である.

また, $\tau \in H$ の topological generator とすると, $[C_{kL}, H] = C_{kL}^{\tau}$ である.

(3) C_1 は, $C_{kL}^{\omega_{n_0}}$ を示す. もし拡大 k/k_{n_0} が $(R-3)'$ をみた

せば, $C_1/C_{kL}^{\omega_{n_0}}$ は, $\mathbb{Z}_p$ -加群として, 有限生成で,

generator の数は, " $kL/k_{n_0}L$ で分岐する $k_{n_0}L$ の素点の数

$- 1$ " である. ω_{n_0} は, $\sigma^{p^{n_0}} - 1, (\in \Lambda)$ である.

Remark. $(R-2)$ の下でも同様のことが成立すると思われる.

§ 2. 拡大の記述 (Cyclotomic Case).

この § では, L/k に は け ら れ る $\mathbb{Z}_p$ -拡大 L/k を cyclotomic と
 する拡大 L/k を 決 定 する. p は 奇 素 数 で あ る と し, 有 限 次 代
 数 体 k , k 上 の 無 限 次 $\mathbb{Z}_p$ -バ ー レ ー 拡 大 L , 及 び $\text{Gal}(L/k)$ が S
 $\mathbb{Z}_p^\times$ へ の injective cont. hom. η を 固 定 する. $k(\mu_{p^\infty}) \subset L(\mu_p)$
 を 仮 定 する. 次 の よ う に 記 号 を 定 め る.

記号

- (1) $\mu_{p^\infty} = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^{p^n} = 1\}$, $\mu_p = \{x \mid x^p = 1\}$.
- (2) $\chi : L(\mu_p)/k$ の cyclotomic character i.e.
 $\chi : \text{Gal}(L(\mu_p)/k) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ s.t. $\zeta^\sigma = \zeta^{\chi(\sigma)}$, $\forall \sigma \in \text{Gal}(L(\mu_p)/k)$, $\forall \zeta \in \mu_{p^\infty}$
- (3) $\eta_0 : \text{Gal}(L_0(\mu_p)/k) \rightarrow \text{Gal}(L_0/k) \rightarrow \text{Gal}(L/k) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_p^\times$.
- (4) $\alpha_0 : \text{Gal}(L_0(\mu_p)/k) \rightarrow \mu_{p-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ s.t. $\zeta^\sigma = \zeta^{\alpha_0(\sigma)}$,
 $\forall \sigma \in \text{Gal}(L_0(\mu_p)/k)$, $\forall \zeta \in \mu_p$.
- (5) $\theta = \alpha_0 \eta_0^{-1} \in X(\text{Gal}(L_0(\mu_p)/k)) = \text{Hom}(\text{Gal}(L_0(\mu_p)/k), \mathbb{Z}_p^\times)$.
- (6) $K_\eta : k \in \theta$ の 固 定 体.
- (7) $\alpha_1 : \text{Gal}(kQ_\infty/k) \hookrightarrow \text{Gal}(L(\mu_p)/k) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}_p^\times$,
 $\eta_1 : \text{Gal}(kQ_\infty/k) \hookrightarrow \text{Gal}(L(\mu_p)/k) \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}_p^\times$.
 同 様 し, Q_∞ は $\mathbb{Q}$ 上 の $\mathbb{Z}_p$ -拡 大 で あ る.
- (8) $S : p$ 上 の 素 点 を す べ て, S は k の 素 点 の 有 限 集 合.
- (9) $E_{*,S} : k$ の 有 限 次 拡 大 M の S -units 全 体.
- (10) $e_\theta : \theta$ に 対 応 する $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(L_0(\mu_p)/k)]$ の idempotent.

定理 2.1. 上の仮定の下で,

(1) $\chi_1 \neq \eta_1$ ならば,

$$"K/k : \text{s-ramified} \Rightarrow K/k : \text{p-ramified}"$$

が成り立つ.

(2) L_0 のみにより定まる $\text{Gal}(k\mathbb{Q}_p/k)$ の $\mathbb{Q}_p$ -valued character よりなる有限集合があって, η_1 がこれに属すわけではない.

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}_p} \text{Gal}(K_\eta/L) = r_2(k).$$

ここに, K_η は, 対応する $\text{Gal}(L/k)$ の character が η となる $(*)_p$ をみたす k 上の拡大 K すべて合成体, $r_2(k)$ は, k の虚数単位の数でもある. したがって, $r_2(k) = 0$ のときは, L は, 対応する character が η となる $(*)_p$ をみたす拡大 K が存在しないことを意味する.

(3) $\chi_1 = \eta_1$ のとき, 次のよう自然に bijective に対応がある.

$$\left\{ K/k ; \begin{array}{l} \text{最大の } m \text{ に対して } L \subset K \\ \text{character は } \eta \end{array} \right\} \sim_{k \text{ の共役}}$$

$$\leftrightarrow \left\{ W ; (E_{k\eta} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\oplus r_2(k)} \text{ の } \mathbb{Z}_p \text{ と isomorphic な直和因子} \right\}.$$

具体的な対応は, $k \leftrightarrow W$ として,

$$\begin{aligned} k_\eta \cdot k_n &= k_\eta(\sqrt[n]{\alpha}), \text{ ただし, } \alpha \text{ は, } \text{Im}(W \rightarrow E_{k\eta, S}/E_{k\eta, S}^{p^n}) \\ &= \langle \alpha \pmod{E_{k\eta, S}^{p^n}} \rangle \text{ となる } E_{k\eta, S} \text{ の元である.} \end{aligned}$$

$$(3)^* \quad (E_{k, S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})^{\mathbb{Q}} \cong \begin{cases} 0 & k \neq L_0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/p^e \mathbb{Z} & k = L_0, \mu_{p^\infty} \cap k_1 = \mu_{p^e}, e \geq 1 \end{cases}$$

したがって、 $k \neq L_0$ のとき $(E_{k, S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p)^{\mathbb{Q}}$ の一次元部分空間といってもいいである。

(4) (分岐にかんして) $\chi_1 = \eta_1$ であるとする。

$\mathfrak{p}$ は k の p 上の素点とする。 $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ 上の k_1 の素点とする。

$$\widehat{k_{\eta, \mathfrak{p}}^{\times}} = \varprojlim_m k_{\eta, \mathfrak{p}}^{\times} / k_{\eta, \mathfrak{p}}^{\times p^m} \quad \text{とある。}$$

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : (E_{k, S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\mathbb{Q}} \longrightarrow \widehat{k_{\eta, \mathfrak{p}}^{\times}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

を $E_{k, S} \hookrightarrow k_{\eta, \mathfrak{p}}^{\times}$ より induce される homomorphism とする。

このとき、

$$\varphi_{\mathfrak{p}}(W) \neq 0 \iff \mathfrak{p} \text{ の拡大 } KL/k \text{ での慣性体は } k \text{ の有限次拡大である。}$$

Remark. 1. (3) のみは、 n によって変化するかもしれない。

Remark. 2. 証明は、Kummer 拡大の理論による。

Cor. 2.2 $p = \text{odd}$, $k = \mathbb{Q}$ とする。

(1) すべての m に対して、 k_{η} が pure field

$$\iff L = \mathbb{Q}(\mu_{p^m}), \quad \eta \text{ は cyclotomic character.}$$

(2) $L = \mathbb{Q}(\mu_p)$, η は cyclotomic character とすると、

$S = \{p, l_1, l_2, \dots, l_r\}$ ($l_1, \dots, l_r, p$ は相異なる素数) とする。

すなわち、 K/k に對して、 $IP_{\mathbb{Q}_p}^r$ の元 $x = (x_0, \dots, x_r)$ ($x_i \in \mathbb{Z}_p$,
 $\exists j, x_j \notin p\mathbb{Z}_p$) が存在して、 $k_n = \mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{x_0^{x_0^{(n)}} x_1^{x_1^{(n)}} \dots x_r^{x_r^{(n)}}})$
 $(n=0, 1, 2, \dots)$ とおける。ただし、 $x \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$ に對して、
 $x^{(n)} \in \mathbb{Z}$ 且、 $0 \leq x^{(n)} \leq p^n - 1$, $x^{(n)} \equiv x \pmod{p^n}$
 と定める。

(3) (2) と同じ仮定の下で、

$$\begin{aligned}
 K/k \text{ が (R-3) を満たす} &\iff K/k \text{ が (R-2) を満たす} \\
 &\iff x_0 \neq 0, \text{ あるいは } \prod_{i=1}^r (x_i^{p-1})^{x_i} \neq 1 \\
 &\quad \text{in } \mathbb{Q}_p
 \end{aligned}$$

Remark. (3) で、(R-3), (R-2) に “/” をつけてもいい。

§3. Iwasawa algebra 上の加群の分類.

M. Harris [4] の定理より、(R-1) の仮定の下で必要な Λ_G -加群の分類問題とは、次のようなものである。

(CC-1); Λ_G -有限生成, Λ_{G_0} -Torsion 加群の分類.

しかし、§2 の結果及び Ferrero-Washington の定理 [3] により、次の分類で十分である。

(CC-2); Λ_N -有限生成, Λ_G -加群の分類.

実際、岩沢 [5] より

“ C_L の μ -invariant が 0 $\iff C_L$ が Λ_N -有限生成”

が (R-2)' の仮定の下に成立するから, L_0 が $\mathcal{A}$ -ベキ体
 L が cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -拡大を $\mathcal{A}$ 含むことは, (C-2) で十分である。
 しかし, 完全な記述は,

(C-3): Λ_N -cyclic, Λ_G -加群の分類

に限定しての $\mathcal{A}$ である。

分類問題にかんする結果をあげる前につぎのことを注意する。

命題 3.1. (M, Lazard [11] をみよ)

M は completed $\mathbb{Z}_p$ -module である。 M 上に次の三つの構造
 τ を定めることは同値である。

- (1) M 上の continuous G -module structure,
- (2) M 上の continuous $\mathbb{Z}_p[[G]]$ -module structure,
- (3) M 上の continuous Λ_N -module structure と, continuous
 semi-linear H -module structure,

ただし, M が continuous Λ -module かつ, continuous H -module
 τ であるときに, M が semi-linear τ であるとは。

$$\tau(h)(\lambda m) = \lambda^h(\tau(h)m), \quad \forall h \in H, \forall \lambda \in \Lambda, \forall m \in M$$

が成り立つことをいう。ここに $\lambda^h = h^{-1} \lambda h$ は Λ_G である。

我々は, (3) の立場をとることにする。

定理 3.2 $p \neq 2$, ある n は, $p=2$ かつ $\Gamma_n \neq 1$ を仮定す。

(1) 次のような bijective な対応がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_N\text{-有限生成, } \Lambda_G\text{-加群} \\ \text{の isomorphism classes} \end{array} \right\} \simeq \bigsqcup_M H^1(H, \text{Aut}_\Lambda(M))$$

ただし, M は, 有限生成 Λ_N -加群で, $S_R^*(M) \subseteq M$ ($\forall R \in H$)
をみたす M の isomorphism classes をわたる。

H の $\text{Aut}_\Lambda(M)$ への action は, M の Λ_N -加群の構造と compatible な Λ_G -加群の構造を λ した τ を一つ固定し, $R \in H, f \in \text{Aut}_\Lambda(M)$ に對して,

$$(R \cdot f)(x) = R(f(R^{-1}x)) \quad , \forall x \in M$$

で λ する。

$S_R^*(M) = S_R^*(\Lambda) \otimes_\Lambda M$, $S_R^*(\Lambda)$ は, isomorphism $x \mapsto R x R^{-1}$ に
よって Λ に Λ -module structure を λ した τ がある。(i.e., $x \in \Lambda$
 $y \in S_R^*(\Lambda)$ に對して, $S_R^*(\Lambda)$ の Λ -module としての作用 $*$ で $x \cdot y$
に τ する.) $x * y = (R x R^{-1}) y$ である。

(2) (1) の M は Λ -module として, τ の λ した τ である pseudo-isomorphic τ がある。

$$\Lambda^{(s)} \oplus \sum_a \Lambda / f_a \Lambda.$$

ただし, $s \geq 0$, f_a は, p である τ がある τ がある。
 $\tau_0 = \sigma - 1$, $\tau_i = \sigma^{p^i} - 1 / \sigma^{p^{i-1}} - 1$ ($i=1, 2, \dots$) $\in \Lambda$, τ がある。

(3) $\sigma \in \Lambda$ の τ である τ である。

$$\forall R \in H \quad S_R^*(\Lambda/\sigma) \simeq \Lambda/\sigma \Leftrightarrow \forall R \in H, R^\tau = \sigma.$$

(4) $\alpha^h = \alpha$, $\forall h \in H$ をみたす Λ のイデアル $\alpha \neq 0$ は, α の
おりに unique に決まる。

$$\alpha = \sum p^{e_0} \sum_{j_1}^{e_1} \cdots \sum_{j_r}^{e_r} \quad (e_0 \geq 0, e_1 \geq 0, e_1 > 0, \dots, e_r > 0)$$

α は, α^N の形のイデアルで, $\alpha \subset \alpha$ のイデアル τ に対して, $\alpha^h = \alpha$,
 $\forall h \in H$ をみたすもの。 μ は, 局所環 Λ の maximal ideal.

Remark 1. $p=2$, $\text{Im } \eta \geq 1$ のときも適当に修正すれば, 同様
のことが成立する。

Remark 2. $\tau \in H$ の top. generator とすると,

$$\alpha_\tau^*(M) \subseteq M \iff \forall h \in H \quad \alpha_\tau^*(M) \subseteq M$$

Remark 3. $\alpha^h = \alpha$, $\forall h \in H$, なる Λ のイデアル α に対しては,

$x \pmod{\alpha} \mapsto x^h \pmod{\alpha}$ なる自然な $h \in H$ の action がは
いえる。

上の定理の具体的な対応は次のようになっている。

Λ_G -加群 M に対応する 1-cocycle f ,

$$f_\tau(x) = \tau(x\tau^{-1}) \quad (x \in M)$$

で定める。ただし, H に対して, 固定してある Λ_G -加群の
構造による H の action を M の元の右肩にかく。逆に,

1-cocycle $f \in Z^1(H, \text{Aut}_\Lambda(M))$ に対して,

$$h \cdot x = f_h(x^h) \quad (x \in M, h \in H)$$

で M 上の H の action を定めると, G が continuous に acts し,

したがって、 Λ_G -加群の構造がわかる。

また、 Λ_N -cyclic かつ $H' (H, \text{Aut}_\Lambda(H))$ は、次のようになる。

命題 3.3 $\alpha \in \Lambda$ の "primitivity", $\alpha^k = \alpha, \forall k \in H$ をみたすものとする。

$$(1) \quad \text{Aut}_\Lambda(\Lambda/\alpha) = (\Lambda/\alpha)^\times.$$

$$(2) \quad m > 0 \text{ とする。}$$

$$\begin{array}{ccc} H'(H, (\Lambda/\alpha)^\times) & \xrightarrow{\sim} & (1+m)/(1+\alpha) [1+m, H] \\ \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbb{F}_\alpha. \end{array}$$

ここに、 τ は、 H の top. generator, $[1+m, H] = \langle \lambda^{\tau-1} / \lambda \in 1+m, \forall \lambda \in H \rangle$ とある。

C_{kL} が Λ_N -cyclic かつ Index $C_{kL} : C_0 C_1^{v_{\text{norm}}}$ の計算のためには、 $H' (H, (\Lambda/\alpha)^\times)$ の explicit な表現が必要となるが、それは、別の機会に、譲ることにする。

文献

- [1] J. Coates-A. Wiles; On p -adic L -functions and elliptic units.
J. Australian Math. Soc., A, 25, 1-25, 1978.
- [2] R. F. Coleman; Division values in local fields, Inv. math.

, 53, 91-116, 1979

[3] B. Ferrero and L. Washington ; the Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. Math., 109, 377-395, 1979.

[4] M. Harris ; p -adic representations arising from descent on abelian varieties, Compo. Math., 39, 177-249, 1979

[5] K. Iwasawa ; On the μ -invariants of $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, Conference on number theory, algebraic geometry and commutative algebra in honor of Y. Akizuki, Tokyo, 1-11, 1973.

[6] K. Iwasawa and C.C. Sims ; Computation of invariants in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan, 18, 86-96, 1966

[7] 片岡俊孝 ; 高次類数公式の一般化, 数理解講究録 378, 47-60, 1980年2月

[8] 片岡俊孝 ; Class number relations, 数理解講究録 411, 142-161, 1981年1月

[9] 片岡俊孝 ; $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{\pm 1})$ 及び $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2} \sqrt[n]{\pm 1})$ の類数 h の 2-part, 日本数学会代數分科会予稿集, 1980年10月.

- [10] S. Lang : *Galois theory*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978
- [11] M. Lazard : *Groupes analytiques p -adiques*, *Pub. Math. I.H.E.S.*, 26, 1965