

A^2 の rational ruled surfaces

への埋め込みについて

京大 理数 森 重 文

§1. 序

Morrow [1] において、 A^2_C の minimal normal compactification (の boundary の configuration) が決定されているが、これから得られる標数 p の場合の結果 (c.f. Lemma 4) を参考にして次の問題を考える。

問題: k を代数的閉体 (標数 ≥ 0) とし、non-sing. algebraic surface S 、non-sing. proj. surface F (S と F は birational) を与え、すべての embedding $S \rightarrow F$ を決定もしくは分類せよ。

しかし、これは一般的すぎるので、 $S = A^2$ 、 F としては rational ruled surfaces ($F_0, F_1, \dots$ c.f. Nagata [1]) をとる。

Morrow [1] では boundary の状態に制限が付き、この問題では boundary の状態は全く制限が (見かけ上は) 付いていないから、Morrow [1] から直ちに結論が得られるわけではない。ここでは embedding を分類し、すべての embedding を得る

方法を与えることを目標にしている。

話の進みぐあいで、一般的な comment を § 3 に持っていてしま、たので話がちぐはぐなっている所は § 3 を見て下さい。(何も書いてないかも知れないけれど。)

§ 2. 例と birational correspondences J, R, L の定義、そして結論。

Example 1. $A^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2$ を任意の embedding とする。 $l = \mathbb{P}^2 - i(A)$ は line になっている (c.f. Th. 0)。 $l \ni p$ とする。

$$A^2 \xrightarrow{\alpha_{-1}} \text{dil}_p \mathbb{P}^2 = F_1 \stackrel{\text{def}}{=} H_1 \quad \text{dil}_p(p) = s_{-1}, \quad \text{dil}_p[l] = g_{-1} \text{ とおく。}$$

$$g_{-1} - s_{-1} \ni \bar{g} \text{ について } \text{elm}_{\bar{g}} \text{ を行なえば } \text{elm}_{\bar{g}}[s_{-1}] = s_0, \quad \text{elm}_{\bar{g}}(g_{-1}) = g_0$$

$$\text{embedding } A^2 \xrightarrow{\alpha_0} H_0 \quad H_0 - \alpha_0(A^2) = s_0 \cup g_0, \quad (s_0^2) = 0, \quad (g_0^2) = 0$$

更に $g_0 - s_0 \ni \bar{g}$ をとり同様の事をくりかえして、 $n \geq 0$ について

$$\text{embedding } A^2 \xrightarrow{\alpha_n} H_n \quad H_n - \alpha_n(A^2) = s_n \cup g_n, \quad (s_n^2) = n, \quad (g_n^2) = 0$$

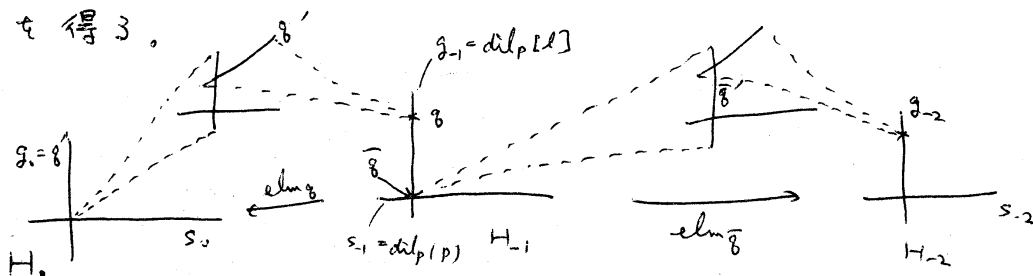
又 $g_{-1} \cap s_{-1} \ni \bar{g}$ について $\text{elm}_{\bar{g}}$ を行なえば

$$\text{embedding } A^2 \xrightarrow{\alpha_{-2}} H_{-2} \quad H_{-2} - \alpha_{-2}(A^2) = s_{-2} \cup g_{-2}, \quad (s_{-2}^2) = -2, \quad (g_{-2}^2) = 0$$

これをくりかえして $n \leq -1$ についても

$$\text{embedding } A^2 \xrightarrow{\alpha_n} H_n \quad H_n - \alpha_n(A^2) = s_n \cup g_n, \quad (s_n^2) = n, \quad (g_n^2) = 0$$

を得る。



Example 2 rational ruled surface から 2 本の section を除いた残りが A^2 になっている例。

example 1 の d_n ($n \geq 1$) を用いる。

$$S_n - g_n \rightarrow \tilde{P}_1 \text{ を用いる}$$

右図を参照 (この n は int. number)

step (1) ~ step (n+1)

S_n 上の point. z の

blow-up.

step (n+2): $P_{n+1}' - (S_n \cup P_n') \rightarrow \tilde{g}_1$ を用いる

$dil \tilde{g}_1$

step (n+3): g_n を忘れて残りの curve を見る。

S_n と $\tilde{g}_1$ は 対称的 (self int., ~~self~~)

他の curve との intersection e.t.c. について

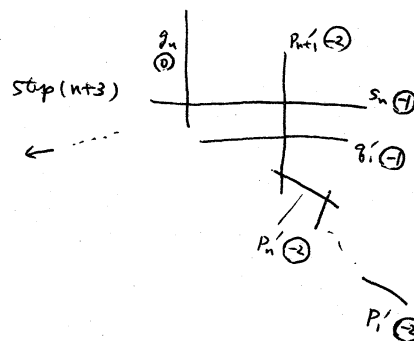
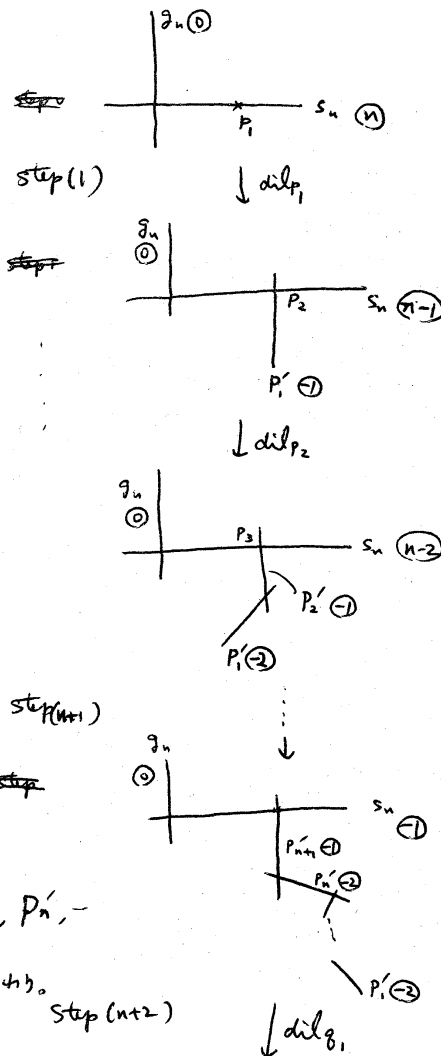
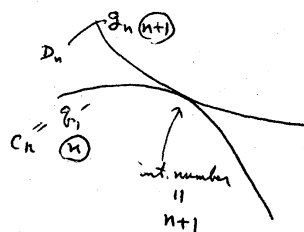
だから、今までの逆操作で $S_n, P_{n+1}', P_n',$

..., P_1' と順に contract して step (n+3) へ行く。

従って下図の embedding を得る。

$$A^2 \xrightarrow{P_n} G_n \quad G_n - P_n(A^2) = C_n \cup D_n$$

$$\begin{cases} C_n^2 = n \\ D_n^2 = n+1 \\ C_n \cdot D_n = n+1 \end{cases}$$



[注] G_n が ruled surface になることは §3 参照.

G_n が γ の type (F_2 になるか) はわからない (point P_1, P_2 のとり方で異なる type になり得る.)

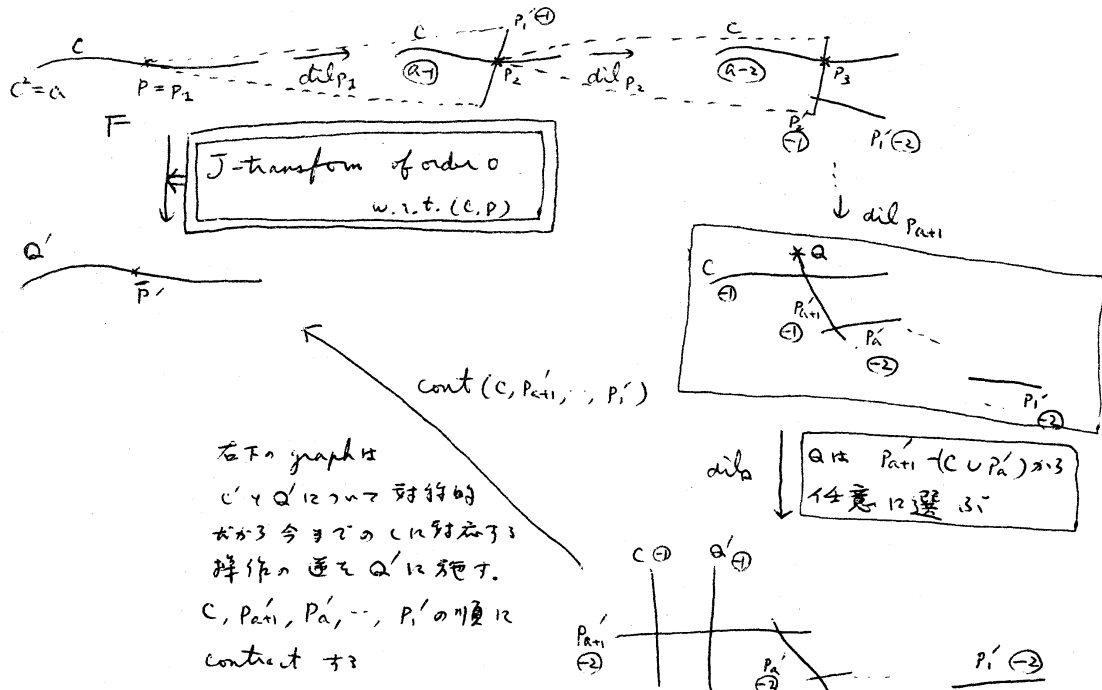
example 1 の d_n から p_n を作る birat. con. $F_n \xrightarrow{p_n \circ d_n} G_n$ は J-transform ((S_n, R) に使う.) である. (c.t. 定義 1)

定義 1. complete non-singular surface F 上の curve C が $(*)_2$

$$(*)_2: C \cong \mathbb{P}^1 \text{ (isom.) } C^2 \geq 0$$

を満たす時, C 上の point P について (C, P) に使う order n の J-transform なる birat. con. を次のように定義する. $n \geq 0$

(order n を明記しなかつたり, P を略したりして, J-transform w.r.t. C , 又は単に J-transform と呼ぶこともある.)



定義 1. から 直ちに次の事がわかる.

Lemma 1 complete non-singular surface F 上の curve C が $(*)$ を満たすとする. $F \xrightarrow{\kappa} F'$ が birat. con. の J-transform of order n w.r.t. (C, p) となる時. $C' = \kappa(C)$ ($\leftarrow$ total transform) とおくと.

(1) ~~$\kappa|_{F-C}$~~ $\kappa|_{F-C} : F-C \xrightarrow{\sim} F'-C'$ は isom. $\tau(C'-C) = (C \cdot C)$

(2) κ' の fundamental pt. は $1 \leq p' (\in C')$ だけあり

C' は $(*)$ を満たし, κ' は J-transform of order n w.r.t. (C', p')

(3) $\varphi : F' \rightarrow F''$ が bir. con. の J-transform ~~of order n~~ w.r.t. (C', p') なら

$\varphi \circ \kappa : F \rightarrow F''$ は J-transform w.r.t. (C, p)

[例] $F = \mathbb{P}^2$ $C = \text{line} \Rightarrow P = (0, 0, 1)$ とおくと

$(x_0 : x_1 : x_2) \quad \begin{cases} x_0 = 0 \end{cases}$

J-transform of order n w.r.t. (C, p) は

degree $(n+2)$ の Jonquier transformation に対応する.

(c.f. Nagata [3])

bir. con. $\iota(S)$ $\begin{matrix} S & \xrightarrow{\iota} & F \\ S & \xrightarrow{\varphi} & F \end{matrix}$ $\in$ non-sing. alg. surfaces, F complete とし

$F - \varphi(S) = C \cup D$ C, D は $\neq \emptyset$ な curve

C は $(*)$ を満たすとする. $P \in C - D$ を任意にとり

$\varphi : F \rightarrow F'$ は J-transform w.r.t. (C, p) とし

$C' = \varphi(C)$, $D' = \varphi(D)$ ($\leftarrow$ proper transform) $P' = (\text{fun. pt. of } \varphi^+)$ とおくと

$S \xrightarrow{\varphi \circ \iota} F'$ は embedding とおき $F' - S = C' \cup D'$, $P' = C' \cap D'$

Lemma 2 C' は $(*)$ を満たし $(C' \cdot D') \geq (C \cdot D)$

もし $(C \cdot D) \geq 2$ ならば

D は $(*)_1, (*)_2$ も満たさる (c.f. 定義 4)

Th. 0 $A^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ を任意の embedding とする $\mathbb{P}^2 - A^2$ は line で

なり、~~任意の 2 つの embedding は~~ この ような 2 つの embedding は

J-transform w.r.t. $\mathbb{P}^2 - A^2$ を 有限回施すことにより互いに

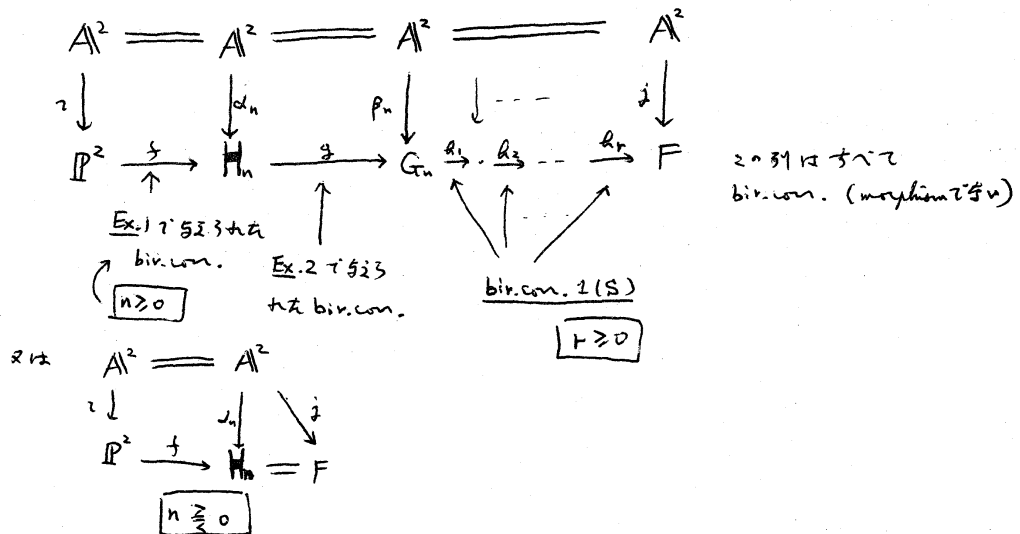
うつり得る. (c.f. Nagata [3])

Th. 1 $A^2 \xrightarrow{j} F$ を int. ruled surface F への任意の embedding とする.

もし $F - A^2$ の component のうち一方が non-singular ならば

~~ならば~~, A^2 の $\mathbb{P}^2$ への適当な embedding i で $\mathbb{P}^2 - i(A^2) = \infty$ -line

とすることがとれて、次の diagram が可換になる。



このような分解 $j = h_r \circ \dots \circ h_1 \circ g \circ f \circ i$ を standard な分解と呼ぶ。

(下の場合は $g = \text{id}$, $r=0$ と思う。)

Th. 2 Th. 1 において j が与えられた時、~~ならば~~

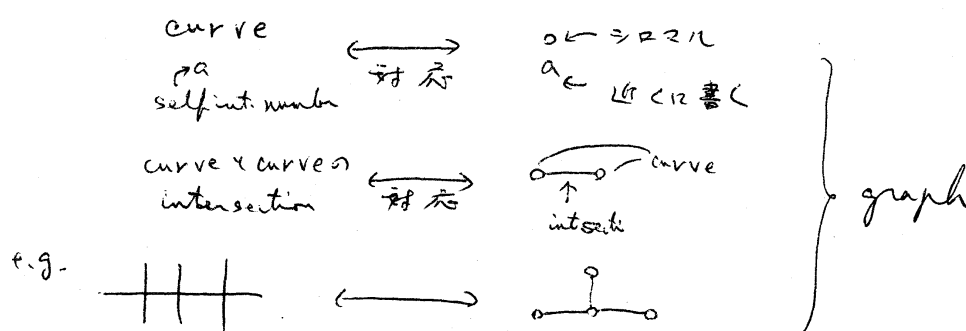
$\forall$ 2 つの standard な分解 $j = h'_r \circ \dots \circ h'_1 \circ g' \circ f' \circ i' = h_r \circ \dots \circ h_1 \circ g \circ f \circ i$

について、 $r=r'$, $n=n'$ (n は $f \circ i$ に対応する $d_{\text{nc}} + 2$)

そして、もし $n \geq 0$ なら $i=i'$, $f=f'$, $k_i=k'_i$ $1 \leq i \leq r$

である。

以上で $F-A^2$ の 2 つの component のうち、一方が non-sing. の時には片付いた事になるが、実際は $F-A^2$ の component が 2 つとも sing. pt. をもつことがある。そのまゝに normal crossing の reducible curve の "graph" を定義する。(c.f. Morrow [13])

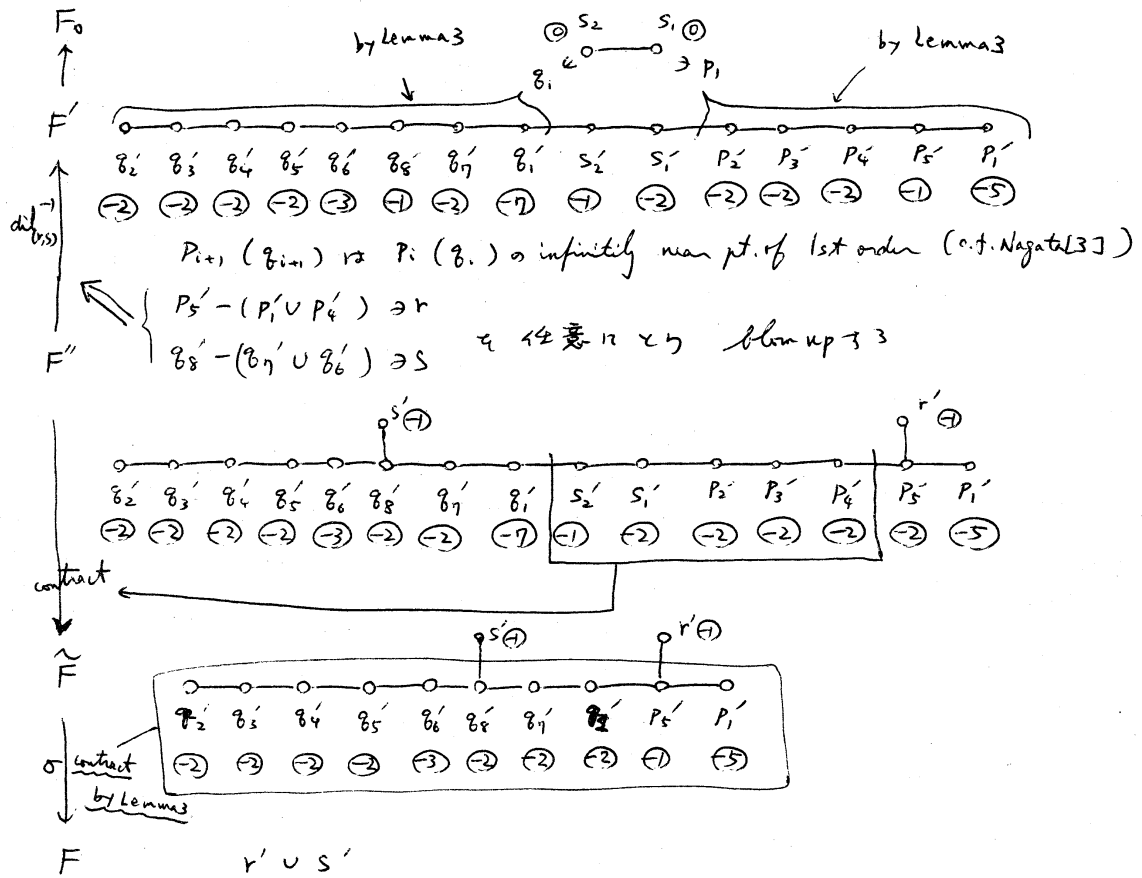


Lemma 3 $S, S' \in \text{non-sing. alg. surfaces}$. $S' \xrightarrow{\pi} S$ is

proper biat. morphism $\forall \ell: S \ni p$, $S' - \pi^{-1}(p) \xrightarrow{\sim} S - p$

とする。この時、 $\pi^{-1}(p)$ は normal crossing τ の component $e \cong \mathbb{P}^1$ であるが、更に $\pi^{-1}(p)$ の graph が linear (i.e. $o-o-\dots-o-o$ の形) ならば、

(1) τ の graph は次のようになる。



$A^2 \rightarrow F$ は embedding $\tau: F \rightarrow A^2$ の component τ sing. pt. τ である。

($\odot$ map σ は Lemma 3. (2) を適用)

[注] 2 の example は Th. 3 の case (2) $s=b=1$ の場合である。

$\tilde{F}$ は $r' \cup s'$, r' 両方の minimal normal resolution である。(c.f. 定義 2)

定義 2: non-sing. proj. surface $F \supset D$ curve (may be reducible)

$F' \xrightarrow{\sigma} F$ $\S$ 3 non-sing. proj. surface $F' \ni s$ の h.r. nor. φ が D の normal resol.

φ は $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} (1) F' - \varphi^*(D) \xrightarrow{\sim} F - D \\ (2) \varphi^*(D) \text{ は normal crossing} \end{array} \right.$ $\varphi \S 3 \text{ 2 } \varphi \text{ 3 3.}$

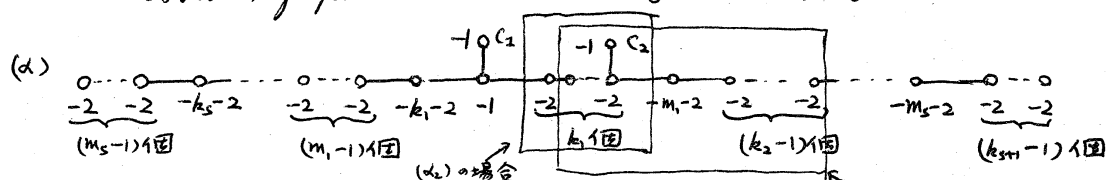
又 F, D を与え左時 D の normal resolution の σ $\S$ 12 は。

domination の意味で最小のもつ、即ち $\tilde{F} \xrightarrow{\sigma} F$ が D の normal resol. の存在して $\forall F' \xrightarrow{\varphi} F$ が D の normal resol. に対して $F' \xrightarrow{\psi} \tilde{F}$ morphism s.t. $\varphi = \sigma \circ \psi$ があつた。これは同型を除いて uniquely 定まる D の minimal normal resol. と呼ぶ。

[注] $\sigma^{-1}(D)$ の graph を D の minimal normal resol. の graph と呼ぶ。

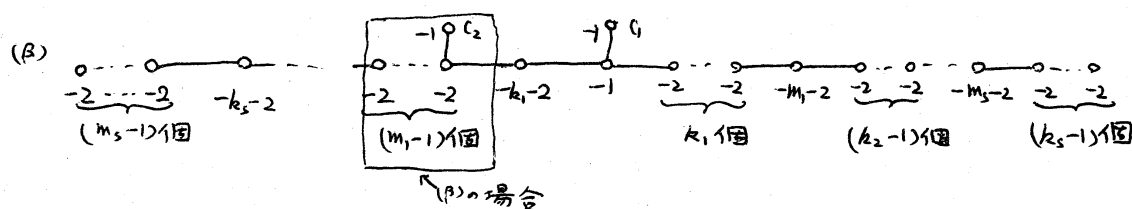
定義 3 : $A^2 \hookrightarrow F$ (F は rational ruled surface) なる embedding が normalized embedding であるとは、 $F - A^2$ の component が 2 つとも singular pt. をもち、 $F - A^2$ の minimal normal resol. $F \xrightarrow{\varphi} F$ であるとき $F \supset E(\varphi) = \{\varphi \text{ の exc. locus} \}$ の graph が linear (i.e. $\circ \cdots \circ$) なものであることを言う。

Th. 3 A^2 の normalized embedding $A^2 \hookrightarrow F$ について、 $F - A^2$ の minimal normal resol. の graph は、次のような図により与えられる。



ただし $\begin{pmatrix} s \geq 1 \\ b \geq 1 \end{pmatrix}$ (A₁) $\begin{cases} m_1 = b+1, m_2 = \dots = m_s = b \\ k_1 = b+3, k_2 = \dots = k_{s+1} = b+6 \end{cases}$

又は (A₂) $\begin{cases} m_1 = \dots = m_s = b \\ k_1 = b+2, k_2 = \dots = k_{s+1} = b+4 \end{cases}$



$$\left. \begin{array}{l} \text{ただし } \left(\begin{array}{l} s \geq 2 \\ b \geq 1 \end{array} \right) \text{ かつ } (\beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_1 = \dots = m_s = b+1 \\ k_1 = b+1, k_2 = \dots = k_s = b \end{array}$$

逆に、complete non-sing. surface F が relatively minimal 又は F_2 (c.f. Nagata [1]) として、 $F \supset E = \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$ (C_i は irr. int. curve. として E の minimal normal resol. の graph を (α) 又は (β) のような graph であれば、 $A^2 \cong F - E$ であり、これは normalized embedding である。
 [注] (α) 又は (β) の場合には、 C_1 及び $\square$ の部分を contract すると、Morrow [1] にある graph が得られる。従って、次の lemma より、Th. 3 の “逆に…” は示される。

或いは example 4 のように直接確かめることもできる。

Lemma 4. Morrow [1] の結果は $\text{char } p > 0$ でも正しい。

即ち、non-sing. ^{irr.} proj. surface F' 上に、次の性質 (1), (2) をもつ curve E があるとす。 (1) E は normal crossing. E の $\mathbb{C}$ の component も $\cong \mathbb{P}^1$.

(2) E が唯一種の例外曲線を含むなら、その curve C を contract すると $\text{cont}_C E$ は normal crossing である。

この時、 $F - E \cong A^2 \Rightarrow E$ の graph は Morrow [1] の graph となる。

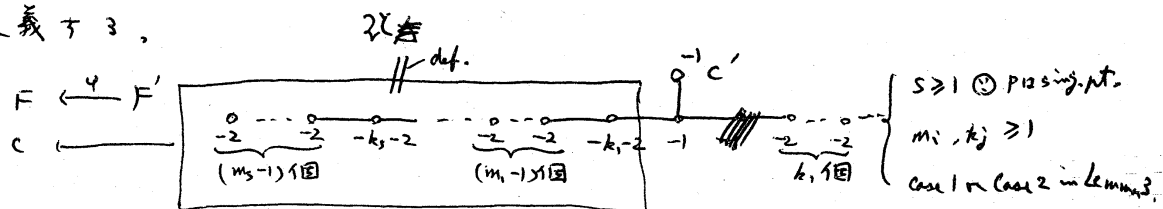
① $F \sim_{\text{bir}} \mathbb{P}_k^2$ となる。 $\mathbb{P}_k^2$ から A_k^2 の外側で blow up blow down をくりかえして、 F が得られる。それに対応する操作を $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ に行なうと、 $F/\mathbb{C}$ なる irr. surface T 、 $F_\mathbb{C} - A_\mathbb{C}^2$ の graph が E の graph と同じ形をもつものが得られる。この $F_\mathbb{C}$ に Morrow [1] を適用。

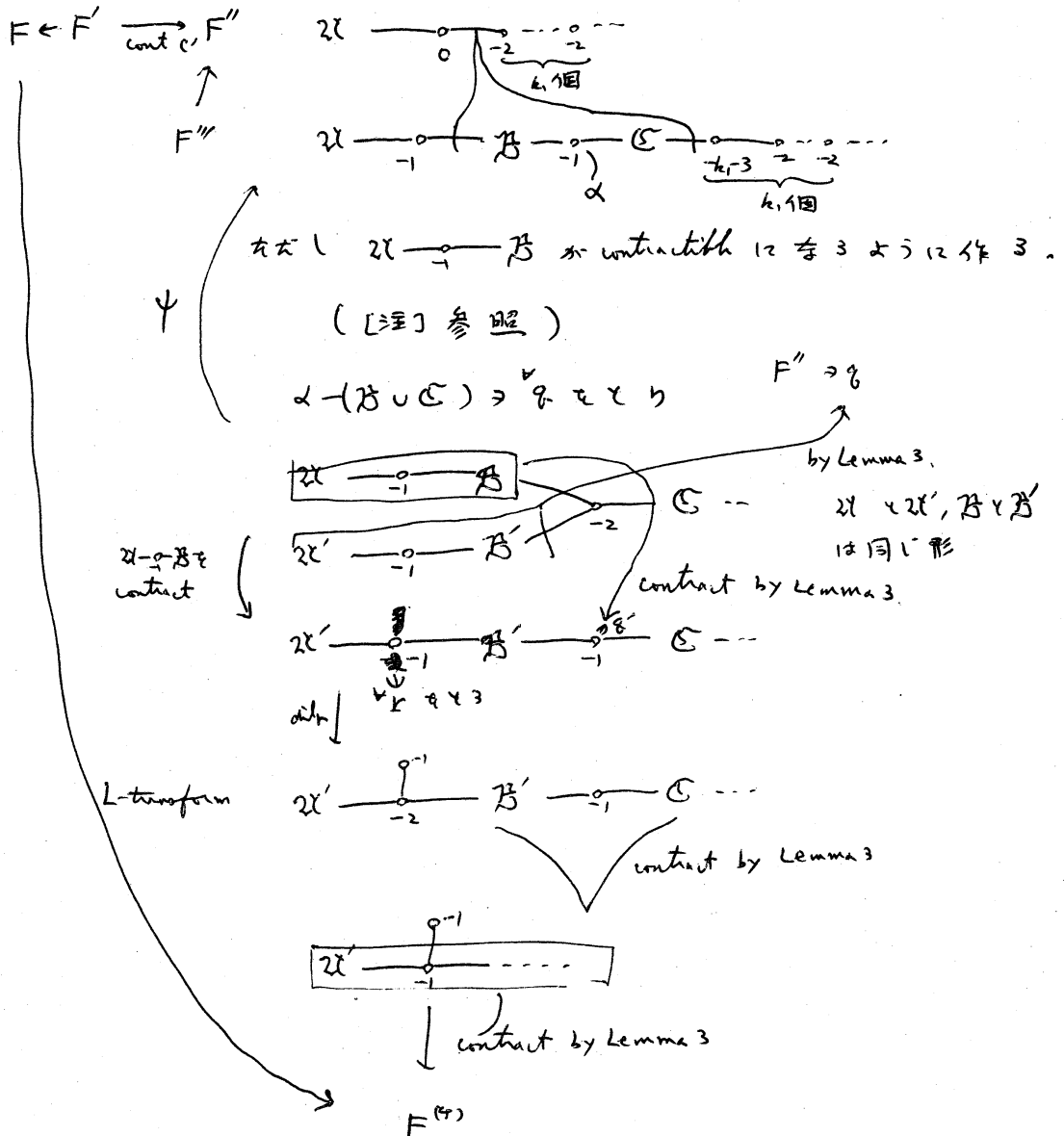
"逆に..." について: E の minimal normal resol. $F \xrightarrow{\sigma} F$ にお
いて $\sigma^*(E)$ は Y の component も $\cong \mathbb{P}^2$ である. ^{対応する} (A), (B) の diagram の $C, U, \square$
を contract して, $\text{cont } \sigma^*(E)$ の graph は Morrow [1] にある graph と
同一のものである. よって, (Morrow [1] の embedding) $\rightarrow \mathbb{P}^2$ なる
map を blow up, blow down に分解して π が $\text{cont } F'$ に適用する π
non-sing. proj. surface $G \supset L$ であり, $G-L \cong F-E$, $L \cong \mathbb{P}^1$, $L^2 = 1$
なるものが得られる. このような L を含む G は ruled (cf. Zariski [1]).
しかも, もし G が non-rat. なる G 上は self int. > 0
なる rat. curve はない. よって G 従って F は rational. よって
 $\text{Pic } F = \mathbb{Z}^v$ ($v=1$ 或 2 $v=1 \Rightarrow F=\mathbb{P}^2$, $v=2 \Rightarrow F$ rat. ruled (cf. Nagata [1]))
とかくと, $\text{Pic } G = \mathbb{Z}^{v-1} \therefore v-1 \geq 1 \therefore v=2 \therefore F$ rat. ruled,
 $G \cong \mathbb{P}^2 \therefore G-L = \mathbb{A}^2 \cong F-E$ a. E. D.

定義 4: F を proj. non-sing. surface とし, $F \supset C$ (irr. curve) が $(*)_2$
を満たすとする,
 $(*)_2 \left\{ \begin{array}{l} (1) C \text{ は rat. curve であり, 唯 1 の sing. pt. } P \text{ をもち} \\ \quad \quad \quad P \text{ は one place pt.} \\ (2) C \text{ の min. normal resol. } F' \xrightarrow{\varphi} F \text{ であり,} \\ \quad \quad \quad \varphi^*(P) \text{ の graph は linear, } \varphi^*(C) \text{ の self int. } = -1 \end{array} \right.$

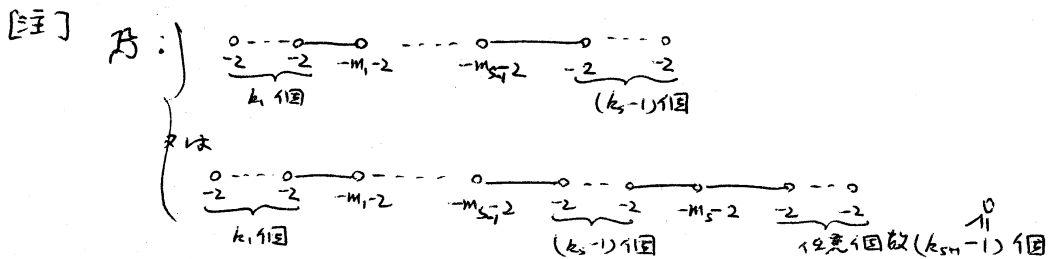
この時 R -(L)-transform w.r.t. C なる bir. con. を次のように

定義する,





R-transform は、右半分に ~~同様に~~ 操作をしたものである。



もし $\frac{1}{-1} \in \mathbb{C}$ を作す step 7 は k_{an} の choice (高々 countable) しか

なく、 φ と dilat の FH uncountable の任意性がある。

定義から直ちに次の事が得られる。

Lemmas. F : projective non-sing. surface $\supset C$ in. curve が $(*)_2$ を
満たし、birat. con. $F \xrightarrow{\varphi} F'$ が L -(R -) transformation w.r.t. C と
 $C' = \varphi(C)$ とおくと

$$(1) \varphi|_{F-C}: F-C \xrightarrow{\sim} F'-C' \quad (C, C) = (C', C')$$

(2) C' も $(*)_2$ を満たし、 φ^{-1} は L -(R -) transform w.r.t. C'

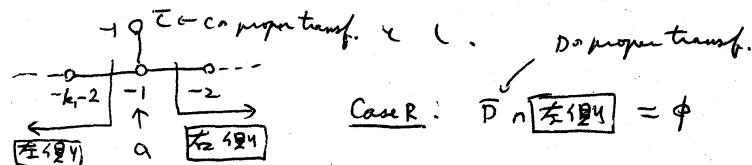
(3) $F' \xrightarrow{\psi} F''$ なる birat. con. が L -(R -) transform w.r.t. C' と

すると $\psi \circ \varphi: F \rightarrow F''$ も L -(R -) transform w.r.t. C

bir. con. 6 (§) $S \xrightarrow{i} F$ は non-sing. surface S の proj. non-sing. surface F への
embedding とし、 $F-S = C \cup D$, C, D は in. curve

C は $(*)_2$ を満たすとする。

C の min. normal ~~transform~~ resols の graph (c.f. 定義 2 [註]) を



Case R: $\bar{D} \cap \boxed{\text{左側}} = \emptyset$

$\bar{D}$ は $(\boxed{\text{右側}}) \cup \bar{C} \cup a$ のある component)

と mult. intersection mult. ≥ 2 で交わる。

Case L: $\bar{D} \cap \boxed{\text{右側}} = \emptyset$, $\bar{D}$ は $(\boxed{\text{左側}}) \cup \bar{C} \cup a$ のある component) と mult. ≥ 2

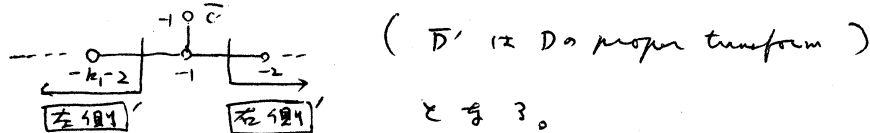
で交わる。

という 2 つの場合を考える。

$\varphi: F \rightarrow F'$ を case R (case L) とする R - (L -)transform w.r.t. C とする。

$$C' = \varphi(C), \quad D' = \varphi(D)$$

この時、 C' の min. normal resol. の graph は、いずれの場合にも



Lemma 7 (1) case R には $\overline{D'} \cap \overline{\text{右側}}' = \emptyset$ 、 $\overline{D'}$ は $(\overline{\text{左側}})' \cup \alpha'$ のある component) と mult. ≥ 2 で交わる。 D' は $(*)_1, (**)_2$ 共に満たさない。

case L " 左側 右側 "

(2) Th. 3 の case (2) の $\overset{L}{\text{transform}}$ w.r.t. (C_1, α_1) と (C_2, α_2) を行なっても、得られる embedding $A^2 \hookrightarrow F'$ はやはり normalized embedding で $F = A^2, F' = A^2$ の minimal normal resol. の graph は全く同じ形をしていて、
case (1) なら R -transf. について同様の事が言える。

Th. 4 $A^2 \xrightarrow{g_0} F$ (F は rat. ruled surface) を embedding とし、 $F = A^2$ の comp. は 2 つとも sing. pts. をもつとする。この時、次のような embeddings $A^2 \xrightarrow{g_i} F^{(i)}$ ($F^{(i)}$ は rat. ruled) $i=0, \dots, r$ が存在する。

(1) g_0 は normalized embedding (r.t. Th. 3) , $g_r = g$

(2) $A^2 \xrightarrow{g_i} F^{(i)}$ $r-1 \geq i \geq 0$, $F^{(i)} - g(A^2) = C^{(i)} \cup D^{(i)}$ とおく。
 $\begin{matrix} A^2 & \xrightarrow{g_i} & F^{(i)} \\ & \searrow \downarrow h_{i+1} & \\ & g_{i+1} & F^{(i+1)} \end{matrix}$ $C^{(i)}$ は $(*)_2$ を満足し、 h_{i+1} は $(R\text{-または } L\text{-}[(3)\text{に}あ])$ transf.

$$\text{w.r.t. } C^{(i)}, \quad h_{i+1}(C^{(i)}) = C^{(i+1)}, \quad h_{i+1}(D^{(i)}) = D^{(i+1)}$$

(3) g_0 が Th. 3 の case (2) とする $h_1, h_2, h_3, \dots$ は $R, L, R, L, \dots$

Case (B) なる $L, R, L, R, \dots$ となる。

この性質をもつ分解 $g = h_0 \circ \dots \circ h_r \circ g_0$ を standard な分解と呼ぶ。

Th. 5 Th. 4 の下で g の 2 つの standard な分解 $h_0 \circ \dots \circ h_r \circ g_0$,
(もう一つは 'とつけて表わす。') が与えられたとすると、 $r = r'$ 。

すなわち $A^2 \xrightarrow{g_i} F^{(i)}$ を考える。
 $\sim \downarrow \delta_i \text{ bir. con.}$
 $g_i \rightarrow F^{(i)}$ $\widetilde{F}^{(i)} (\widetilde{F}^{(i)})$ を $F^{(i)} - A^2 (F^{(i)} - A^2)$ の min. normal

resolution と して、 $\widetilde{C}^{(i)} (\widetilde{C}^{(i)})$ をそれ に よる proper transform とする。

すると、 $\widetilde{C}^{(i)}, \widetilde{C}^{(i')}$ は共に contractible π $\text{cont}_{\widetilde{C}^{(i)}} \widetilde{F}^{(i)} \xrightarrow{\sim} \text{cont}_{\widetilde{C}^{(i')}} \widetilde{F}^{(i')}$ は
isomorphism. 特に、 g_0 の type (この case に属するか、s, b 値)
は分解のしかたによらない。

[注] δ_i が isom. であるとは限らない。

§ 3. 一般的注意

定義 5. curve C が loop をなすとは

$\Leftrightarrow$
def.

$C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ を ir. component への分解とすると

$n=1$ なら C_1 は one-place pt. なる sing. pt. をもつ

$n \geq 2$ なら C_i の番号を適当につけかえて、

$$C_i \cap C_{i+1} \ni \exists P_i \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-1$$

$$C_n \cap C_1 \ni \exists P_n$$

$P_1, \dots, P_n$ は互に相異なる。

Prop. 1 $S_0 \xrightarrow{\sim} F_0$ を alg. surface S_0 の non-sing. proj. surface F_0 への embedding とし $F_0 - S_0 = l_0$ を 1 種の例外曲線とする irr. curve とする。この時 " l_0 ^{rational} ~~かつ~~ $(l, l) \geq 0$ " でなければ、
 $\forall$ embedding $S_0 \xrightarrow{\sim} F$ ~~non-sing. proj. surface~~ に対して
 $F \xrightarrow{\text{blow up}} F_0$ は morphism. i.e. F は F_0 から S_0 の外側を blow-up する $\sim$ により得られる。

① $F_0 \xrightarrow{\text{blow up}} F$ birat. con. $F_0 \rightarrow F$ の excep. locus はもしあるとすれば l_0 でなければならぬ。 l_0 は 1 種でないから、才 2 種、従って rational かつ self-intersection > 0 でなければならぬ。これは不合理。
 よって excep. locus = $\emptyset$ (c.f. Zariski [1])
 $\Rightarrow F \rightarrow F_0$ は morphism Q.E.D.

Prop. 2 Prop. 1 の下で $l_0 \cong \mathbb{P}^2$ かつ $(l, l) \geq 0$ とする。

$S_0 \hookrightarrow F$ を non-sing proj. surface への任意の embedding とす

$\Rightarrow$ (1) $F - S_0$ は loop を含まない

(2) $F - S_0$ が normal crossing でない点はない

(3) $\forall$ component of $F - S_0$ は rational で高々 1 個の sing. pt. をもつのみ。しかもそれは one-plu pt.

② もし $F - S_0$ が loop を含めば、 $F - S_0$ の pt. π を blow up すると $F - S_0$ の 1 種の例外曲線をつぶして F を得たとした

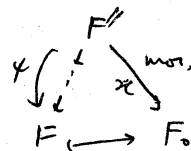
$F' - S_0$ はやはり loop を含む。

② ③ ④ 今 F と F_0 は birat. だから、 F_0 から S_0 の外側で blow up
blowdown をくり返して F_0 を得る。よってもし $F - S_0$ が loop を
含めば $F_0 - S_0$ も loop を含むことになる矛盾。① おわり

(2) $F \xrightarrow{\varphi} F_0$ なる bir. con. の fun. pt. は $F_0 - S_0 = l_0$ で dominate

される。よって fundamental pt. は高々一点。そこで F から
始めて、 F_0 への対応の fundamental pt. を blow up して F' と
 F' から F_0 を dom. するようになる。

$$\text{よって } \exists p \in F \quad F' - \varphi^{-1}(p) \xrightarrow{\sim} F - p$$



$$\text{よって } F - S_0 - p \subset \varphi^{-1}(l_0) \subset F'$$

l_0 は non-singular だから $\varphi^{-1}(l_0)$ は normal crossing (r.f. Zariski [13]).

$\therefore F - S_0$ は p 以外で normal crossing.

(3) $F - S_0$ の component は $\varphi^{-1}(l_0) \subset F'$ の component である。よ
うな rational. 残りは (1), (2) から明か。 Q.E.D.

Prop. 3 $A^2 \hookrightarrow F$ を non-sing. ^{rat.} proj. surface への埋め込みとし

$$F - A^2 = \bigcup_{i=1}^n C_i \text{ を 互いに交わる curve への分解とする.}$$

$$\text{この時 } \text{Pic } F \cong \mathbb{Z}^{\oplus n} \quad (C_i \text{ が generator})$$

$$\text{よって特に, } F \text{ が ruled surface} \iff n=2.$$

$$\textcircled{1} \quad F \text{ の divisor } D \text{ に対し } D|_{A^2} = (d)|_{A^2}$$

$$(\exists d \in K(F) \quad \textcircled{2} \quad A^2 \text{ の coord. ring は u.f.d.})$$

$$\therefore D - (d) = \sum_{i=1}^n m_i C_i$$

$$\text{逆に } (f) = \sum_{i=1}^n x_i C_i \quad f \in K(F) \text{ かつ } 3 \times$$

$$(f)|_{A^2} = 0 \quad \therefore f \text{ は } A^2 \text{ 上 } \tau \text{ unit } \therefore f = \text{constant}$$

$$\therefore (f) = 0 \quad \therefore m_i = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq n$$

後半に ついて は (c.f. Nagata [1])

文献表

J. A. Morrow : Compactifications of $\mathbb{C}^2$

Bull. of Amer. Math. Soc. Vol. 78 No. 5 1972 p813~816

M. Nagata [1] : On rational surfaces I.

Mem. of Coll. Science. Univ. of Kyoto No. 3 1960

[2] : On rational surfaces II.

Mem. of Coll. Science. Univ. of Kyoto No. 2 1960

[3] : On Automorphism group of $k[x, y]$

~~Publ.~~ Dept. of Math. Kyoto Univ.

O. Zariski : Introduction to the problem of minimal models.

Publ. Math. Soc. Japan 4 (1958)