

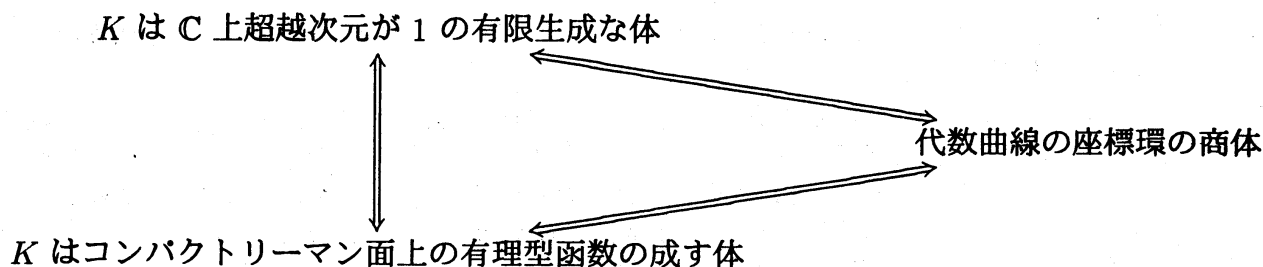
函数体上のディオファントス幾何

京都大学・大学院理学研究科数学教室 森脇 淳 (Atsushi Moriwaki)
Department of Mathematics,
Kyoto University

函数体上のディオファントス幾何を考えると、基本的に二つの場合に分けられる。すなわち、(A) 幾何学的な場合と (B) 算術的な場合である。大雑把に言って、(A) は代数閉体（または有限体）上有限生成な体上でのディオファントス幾何であり、(B) は有理数体上有限生成な体上でのディオファントス幾何である。(B) は、通常、(A) の場合に較べて圧倒的に難しい。しかし、後で論ずるマンフォード・マニン予想の一般化であるボゴモロフ予想については、(B) の場合解決しているが、(A) の場合については未だに一般的に解決されていない。このようなことはあるものの、その取り扱いについては圧倒的に (B) の場合が難しい。そこで、ここでは (A) の場合について主に解説し、(B) の場合は、すこしのコメントを述べるにとどめておく。詳しいことは、2002年の春季号の「数学」での解説を参考にしていただくとありがたい。その意味で、この解説は「数学」での論説の入門編になればと思っている。

A. 幾何学的な場合

A.1. 幾何学的高さ函数. K を $\mathbb{C}$ 上有限生成な体で、 $\mathbb{C}$ 上の超越次元が 1 である体を考える。この体には、次の三位一体があり、数学的に豊かな構造を持っている。



このことを念頭に置いて、以下のことを考える。すなわち、 C をそれ上の有理型函数の成す体が K となるコンパクトリーマン面とする。

X を K 上の射影多様体、 L を X 上の豊富な直線束とする。ここで、次を満たす対 (X, L) を考える。

- (1) X は射影多様体で、 L は X 上の直線束である。
- (2) X から C への射 $f: X \rightarrow C$ がある。
- (3) L はネフな直線束である（つまり、 $(L \cdot l) \geq 0 \forall l: \text{既約曲線}$ ）。
- (4) f の生成ファイバーが X で、 X 上への L の制限が L である。

この対を (X, L) のモデルと呼ぶ。モデルは一意的ではないが、存在することに注意しておく。

さて、このモデルを利用して、高さ函数を定義しよう。 $\bar{K}$ で K の代数閉包を表すことにする。 $x \in X(\bar{K})$, すなわち, K 上の射 $\text{Spec}(\bar{K}) \xrightarrow{x} X$ に対して, $\text{Spec}(\bar{K}) \xrightarrow{x} X \hookrightarrow \mathcal{X}$ の像のザリスキ位相での閉包を Δ_x と表すことにする。このとき, モデル $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に関する x の高さ $h_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})}(x)$ を

$$h_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})}(x) = \frac{(\mathcal{L} \cdot \Delta_x)}{\deg(\Delta_x \rightarrow \mathcal{C})}$$

で定義する。もちろん, 別の (X, L) のモデル $(\mathcal{X}', \mathcal{L}')$ を取れば, 一般的には, 高さの値は異なる。しかしながら, ある定数 C が存在して,

$$|h_{(\mathcal{X}, \mathcal{L})}(x) - h_{(\mathcal{X}', \mathcal{L}')}(\bar{x})| \leq C$$

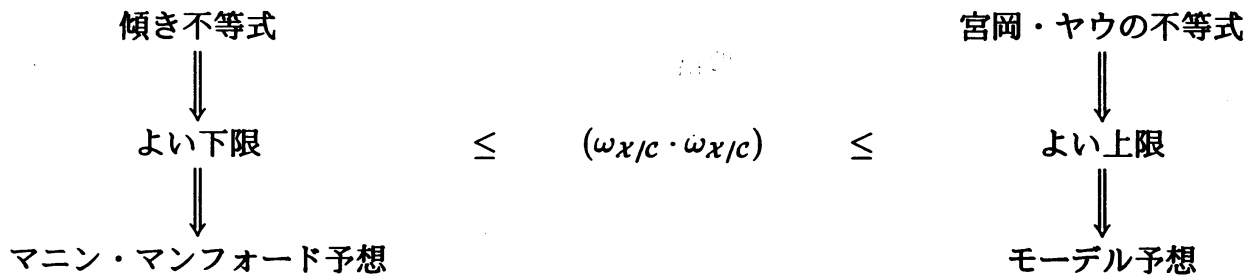
がすべての $x \in X(\bar{K})$ について成り立つ。つまり, $X(\bar{K})$ 上の有界函数をモジュローにすれば, 高さ函数は一意的に定まる。これを $h_L(x)$ と書き, 幾何学的高さ函数という。後で, 詳しく述べるが, 幾何学的高さ函数は算術的な場合に較べて, 点の状態を正確の表していない。例えば, ノースcottの定理は, 幾何学的高さ函数に対して成立しない。しかし, 次のことは, 成立する。

定理 A.1.1. $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ について, $\mathcal{X}$ は非特異であると仮定する。そこで, $\Omega_{\mathcal{X}}^1, \Omega_{\mathcal{C}}^1$ でそれぞれ $\mathcal{X}$ および $\mathcal{C}$ 上の正則1次微分形式のなす層を表すことにし, $\omega_{\mathcal{X}} = \det(\Omega_{\mathcal{X}}^1)$, $\omega_{\mathcal{C}} = \det(\Omega_{\mathcal{C}}^1)$, $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} = \omega_{\mathcal{X}} \otimes f^*(\omega_{\mathcal{C}})^{-1}$ とおく。このとき, もし, $\deg(f_*(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})) > 0$ であるなら, 任意の数 A に対して, 集合 $\{x \in X(K) \mid h_L(x) \leq A\}$ は X でザリスキ位相の意味で稠密でない。

A.2. 函数体版のモデル予想とマニン・マンフォード予想。前節の $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ について, 次を仮定する。

- (1) $\mathcal{X}$ は非特異代数曲面である。
- (2) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ のファイバーは連結である。
- (3) $\deg(f_*(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})) > 0$. (このことは, $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ のファイバーのモジュライが動いている場合正しい。)

$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ のファイバーは代数曲線であるので, その種数を g で表し, $g \geq 2$ と仮定する。そこで, 定理 A.1.1 と同様にして, $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}$ を定義する。このとき, $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}$ の自己交点数 $(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} \cdot \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})$ を評価することは, X 上の有理点の状況を知る上できわめて重要である。つまり, $(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} \cdot \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}})$ の良い上限を得ることは函数体版のモデル予想を導き, 良い下限を得ることは函数体版のマニン・マンフォード予想を導く。



まずは、良い上限、すなわち、宮岡・ヤウの不等式から考えよう。宮岡・ヤウの不等式とは、 $\mathcal{X}$ が一般型の曲面のとき、 $(c_1(\mathcal{X})^2) \leq 3c_2(\mathcal{X})$ という主張である。これをもとに、小平・パーシン被覆を用いると、 $x \in X(K)$ に対して、

$$(\omega_{\mathcal{X}/C} + \Delta_x)^2 \leq \text{位相不変量}$$

となる。ここで、 $(\omega_{\mathcal{X}/C} + \Delta_x \cdot \Delta_x) = 0$ に注意して、上の式を展開すると、

$$(\omega_{\mathcal{X}/C} \cdot \Delta_x) \leq \text{位相不変量} - (\omega_{\mathcal{X}/C}^2)$$

となる。したがって、定理 A.1.1 を用いると、 $X(K) < \infty$ がわかる。

次に今回の研究集会のメインテーマとも関係する函数体版のマニン・マンフォード予想を高さ函数の立場から考えていく。高さ函数の立場からは、函数体版のマニン・マンフォード予想の拡張である函数体版のボゴモロフ予想がある。この予想を述べるため、まずネロン・テート対から考えよう。

$L, M \in \text{Pic}^0(X)(\bar{K})$ とする。ここで、 K の有限次代数拡大 K' で、 $L, M \in \text{Pic}^0(X)(K')$ となるものをとる。要するに L, M を定義されている体まで落とす。前の三位一体を考えると、函数体が K' である非特異射影代数曲線 C' と有限射 $\pi: C' \rightarrow C$ が存在する。 $\mathcal{X}'$ を $\mathcal{X} \times_C C'$ の極小の特異点解消とし、 $f': \mathcal{X}' \rightarrow C'$ を自然な射とする。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_C C' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f' & \downarrow & & \downarrow f \\ & & C' & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

このとき、ザリスキの補題により、 $\mathcal{L} \in \text{Pic}(\mathcal{X}') \otimes \mathbb{Q}$ が存在して、以下が成り立つ。

(1) $\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_{K'}} = L$ である。

(2) 任意の $\mathcal{X}'$ 上の曲線 l で $f(l) = \{\text{一点}\}$ となるものについて、 $(\mathcal{L} \cdot l) = 0$ である。

このような $\mathcal{L}$ は一意的でないが、同様の $\mathcal{L}'$ があるとき、 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f^*(A)$ ($A \in \text{Pic}(C')$) と書ける。さらに、 M に対しても同様に $M \in \text{Pic}(\mathcal{X}') \otimes \mathbb{Q}$ をとる。そこで、

$$\langle L, M \rangle_{\text{NT}} := -\frac{(\mathcal{L} \cdot M)}{[K':K]}$$

と定める。容易に確かめられることだが、 $\langle L, M \rangle_{\text{NT}}$ は $K', \mathcal{L}, M$ の選び方によらない。このようにして、双線形射像

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{NT}}: \text{Pic}^0(X)(\bar{K}) \times \text{Pic}^0(X)(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

が定まる。これを幾何学的ネロン・テート対と呼ぶ。

そこで $\rho: X(\bar{K}) \rightarrow \text{Pic}^0(X)(\bar{K})$ を $\rho(x) = (2g-2)x - \omega_X$ と定め、次の予想を考える。

予想 A.2.2 (函数体版マニン・マンフォード予想). $\rho^{-1}(\text{Pic}^0(X)(\bar{K})_{\text{tor}})$ は有限集合である。ここで、 $\text{Pic}^0(X)(\bar{K})_{\text{tor}}$ は $\text{Pic}^0(X)(\bar{K})$ の捩れ元全体を表す。

予想 A.2.3 (函数体版ボゴモロフ予想). ある $\epsilon > 0$ が存在して、

$$\{x \in X(\bar{K}) \mid \langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\text{NT}} \leq \epsilon\}$$

は有限集合である。

$$\rho^{-1}(\text{Pic}^0(X)(\overline{K})_{\text{tor}}) \subseteq \{x \in X(\overline{K}) \mid \langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\text{NT}} \leq \epsilon\}$$

であるので、函数体版ボゴモロフ予想は函数体版マニン・マンフォード予想を導く。函数体版マニン・マンフォード予想は解決されているが、函数体版ボゴモロフ予想は完全に解決されていない。実際、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ の特異ファイバーの状況による。ここでは、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ がスムーズな場合について考えよう。 $x \in X(\overline{K})$ とする。 $x \in X(K')$ となる K の有限次代数拡大 K' をとり、ネロン・テート対の構成の時と同様にして、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{X} \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C} \end{array}$$

を考える。いまの場合、 f はスムーズであるので $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ である。このとき、 f' の切断 Δ' で $\pi'(\Delta') = \Delta_x$ となるものが存在する。よって、

$$\langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\text{NT}} = -\frac{((2g-2)\Delta' - \omega_{\mathcal{X}'/\mathcal{C}'})^2}{\deg(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C})}$$

になる。射影公式を使って、上を計算すると、

$$\langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{\text{NT}} = 4g(g-1) \frac{((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - aF) \cdot \Delta_x)}{\deg(\Delta_x \rightarrow \mathcal{C})}$$

となる。ここで、 F は $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ のファイバーで、

$$a = \frac{(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}^2)}{4g(g-1)}$$

である。一方、もし ϵ が $0 < \epsilon < (\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}}^2)/4g$ を満たす有理数なら、

$$(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F)^2 > 0$$

である。よって、リーマン・ロッホの定理により、

$$\dim H^0(n(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F)) + \dim H^2(n(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F)) \geq O(n^2)$$

となる。一方、

$$((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F) \cdot F) = 2g - 2 > 0$$

であるので、セールの双対定理より、

$$\dim H^2(n(\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F)) = 0$$

となる。つまり、非負の有理数の係数からなる因子 D が存在して、

$$D \sim \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F$$

となる。よって、

$$((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F) \cdot C) < 0$$

となる既約曲線 C は有限個のみである。さらに、

$$((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - (a + \epsilon)F) \cdot \Delta_x) = ((\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{C}} - aF) \cdot \Delta_x) - \epsilon \deg(\Delta_x \rightarrow \mathcal{C})$$

であるので,

$$((\omega_{\mathcal{X}/C} - (a + \epsilon)F) \cdot \Delta_x) < 0 \iff \langle \rho(x), \rho(x) \rangle_{NT} < 4g(g-1)\epsilon$$

となる. したがって, $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ がスムーズの場合の証明ができた.

B. 算術的な場合

$K = \mathbb{C}(t)$ として, $x \in \mathbb{P}^n(K)$ について, $x = (\phi_0 : \cdots : \phi_n)$, $\phi_i \in \mathbb{C}[t]$, $\phi_0 \mathbb{C}[t] + \cdots + \phi_n \mathbb{C}[t] = \mathbb{C}[t]$ とおくと,

$$h_{\mathcal{O}(1)}(x) = \max_{i=0, \dots, n} \{\deg(\phi_i)\}$$

であることを見よう. この場合, $C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ で, $\mathcal{X} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ で, $f: \mathcal{X} \rightarrow C$ は自然な射影で与えられる. もう一つの自然な射影 $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ を q で表す. さらに, Δ_x に対応する f の切断 $C \rightarrow \mathcal{X}$ を s で表す. つまり, $s(C) = \Delta_x$ である. また, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の同次座標系を $(X_0 : \cdots : X_n)$ とする. ここでは, Δ_x 上で $X_0 \neq 0$ として計算する.

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{O}(1)}(x) &= (q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cdot \Delta_x) = \deg(s^*q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{s^*q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))}{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_0)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_0) + \cdots + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_n)}{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} s^*q^*(X_0)} \quad (\because \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} X_0 + \cdots + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} X_n) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[t]\phi_0 + \cdots + \mathbb{C}[t]\phi_n}{\mathbb{C}[t]\phi_0} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X]_{(X)}\phi_0(1/X) + \cdots + \mathbb{C}[X]_{(X)}\phi_n(1/X)}{\mathbb{C}[X]_{(X)}\phi_0(1/X)} \\ &= \deg(\phi_0) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_0)} + \cdots + \mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_n)}}{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_0)}} \\ &= \deg(\phi_0) + \frac{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\max\{\deg(\phi_0), \dots, \deg(\phi_n)\}}}{\mathbb{C}[X]_{(X)}X^{-\deg(\phi_0)}} \\ &= \deg(\phi_0) + \max\{\deg(\phi_0), \dots, \deg(\phi_n)\} - \deg(\phi_0) = \max\{\deg(\phi_0), \dots, \deg(\phi_n)\} \end{aligned}$$

一方, $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ に対して, $x = (a_0 : \cdots : a_n)$ ($a_i \in \mathbb{Z}$, $(a_0, \dots, a_n) = 1$) と置いたとき, x の算術的高さ $h(x)$ は

$$h(x) = \max_i \{|a_0|, \dots, |a_n|\}$$

で与えられる. それでは, $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}(t))$ の場合はどうであろうか? $x = (\phi_0 : \cdots : \phi_n)$ ($\phi_i \in \mathbb{Z}[t]$ で $\phi_0, \dots, \phi_n$ が互いに素) と表したとき, $\mathbb{C}(t)$ の場合と, 同様にして, $h(x) = \max\{\deg(\phi_i)\}$ とするのはあまりおもしろくない. 実際, $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ 上の算術的高さ函数の拡張になっていない. 多項式の複雑さを次数のみならず, 係数の大きさも考慮に入ればよいのである. 係数の大きさは, すこし工夫して,

$$\int_{\mathbb{C}} \log |\phi| \frac{\sqrt{-1} dt \wedge d\bar{t}}{2\pi(1 + |t|^2)^2}$$

で評価する. まとめると,

$$h(x) = \max_i \{\deg(\phi_i)\} + \int_{\mathbb{C}} \max_i \{\log |\phi_i|\} \frac{\sqrt{-1} dt \wedge d\bar{t}}{2\pi(1 + |t|^2)^2}$$

と定めればよい. こうすれば, これは $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ 上の算術的高さ函数の拡張になっており, 定理 A.1.1 にあるような複雑な条件がなしで, 固定された A に対して,

$$\{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}(t)) \mid h(x) \leq A\}$$

は有限集合になる. また, この高さ函数はアラケロフ幾何と相性が良く, それを用いることで, いろいろな応用がある, 詳しいことは, 2002年の春季号の「数学」での解説を参考にしてください.

〒606-8502 京都市左京区北白川追分町京都大学大学院理学研究科数学教室
E-mail address: moriwaki@kusm.kyoto-u.ac.jp