

境界値問題の積分方程式による解法

日大 理工 林 嘉男

1. この報告では, Helmholtz 方程式の境界値問題の解法と, 対数特異核をもつ Fredholm 積分方程式の解法とについて述べる。ここで境界値問題というのは次のものをいう。

「 S を与えられた二次元領域, C を区分的滑らかな曲線弧の和からなる S の境界とする。 $u \in C^2(S)$, $u \in C^1(S^+C)$ として,

$$(1) \quad \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in S$$

$$(2) \quad u(x) = \gamma(x) \quad \text{又は} \quad (3) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \gamma(x), \quad x \in C$$

を満足するものを求めよ。ただし, Δ は二次元の Laplacian, k は複素定数, n は C 上の S の外向法線, $\gamma(x)$ は C 上に与えられた Hölder 連続な函数とする。もし S が無限遠点を含むならば, そこで u は次の輻射条件, 即ち, r を原点からの距りとして

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + ik u \right\} = 0,$$

を満足するものとする。」

周知のように, (1) は平面 S での二次元調和振動の基本方程式であつて, C が閉曲線の場合には, 数理物理学の古典的な問題であり, Weyl^[1] 等による, C 上の Fredholm 方程式による一般論がある。しかしながら, C が互に共通点をもたぬ, 有限長又は半無限長の曲線弧 L を含む場合には, 特にその端点における解の特異性まで考慮した理論は未だないよう思われ

れるので、こゝではこのような場合の一般論を考察する。結論として、解が explicit な形で求められ、解の存在や一意性も同時に論ぜられる。

筆者がこの種の問題をはじめた発端は、NASA から依頼された宇宙船との通信障害に関するある実際問題の解決のためであつて^[2]、このときは L が開口をもつ一つの円である場合を解いた。^[3] これは L が任意個の任意中の開口をもつ任意個の同心円の場合^[4]、任意の開口をもつ平行直線の場合^[5]、更に一般に任意の曲線弧の場合^[6] に拡張され、そして各領域での parameter k が必ずしも等しくはない場合も論じられた。

2. では任意の曲線弧の和と境界とする領域での境界値問題が、ある一つの、対数的特異核をもつヤーク種 Fredholm 積分方程式と解く問題と同値なることを示し、3. では、この積分方程式の解法理論を述べる。従来、ヤーク種積分方程式については詳しく論ぜられているのに反し、ヤーク種方程式はあまり顧みられなかつたように思われるが、3 は境界値問題の解析とは独立に積分方程式それ自身の問題として興味があると思われる。こゝでは対数的特異性

のある核をもつヤー種方程式の解で、積分路 L の端点において指定された特異性をもつものが、ある連立一次方程式をとくことによつて explicitly に求まり、従つてその解の存在一意性も同時に論じられることが示される。このことは境界値問題も結局は、連立一次方程式の解法に帰せられることを示し、しかもこのようにして求まつた解が S のすべての点で (1) と、 L 上の点で境界条件を L の端点で端点条件と、そして無限遠で (4) と、すべて満足する所要の解であることを証明出来る。[実際には積分方程式の核の regular part とその展開式の部分和で近似するという意味で近似解である。しかしこの近似解は iterationによつて真の解に収束する。]

2. 境界値問題の積分方程式への変換

まず領域 S が閉曲線 C で囲まれている場合を考える。

$v(x, y)$ を (1) の素解, 即ち

$$v(x, y) = \frac{1}{4\pi} H_0^{(2)}(k|x-y|)$$

とする。 $H_0^{(2)}$ はヤー種 Hankel 函数である。 S で (1) を満足し無限遠点で (4) を満足する函数 u の存在を仮定すると

Green の公式によつて、よく知られてゐるやうに $x \in S$ における $u(x)$ が、

$$(5) \quad u(x) = - \int_C \left\{ u(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial n(y)} - v(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} ds_y, \quad x \in S$$

と表される。こゝに ds_y は C の線素である。更に $u(x)$ が (2) を満足するとすれば (5) から

$$(6) \quad u(x) = \int_C \sigma(y) v(x, y) ds_y - u^*(x), \quad x \in S$$

$$\text{ただし } \sigma(y) = \frac{\partial u}{\partial n}(y), \quad u^*(x) = \int_C \gamma(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial n(y)} ds_y. \quad \text{とする。}$$

逆に、もし $\sigma(x)$ が C 上のヤ一種積分方程式

$$(7) \quad \int_C \sigma(y) v(x, y) ds_y = f(x), \quad x \in C$$

$$f(x) = u^*(x) + \gamma(x)/2$$

の解であるならば、それから作られる $u(x)$ は (2) および (4) を満足する (1) の解であることがわかる。

このやうに S における Dirichlet 問題 (1) (2) の解は (6) のやうに一重層ポテンシャルで表され、その密度函数 σ はヤ一種方程式 (7) の解であり、逆も真である。

一方 Weyl は Kellogg 以来のやう方によつて、解 $u(x)$ を C 上の二重層ポテンシャル

$$(8) \quad u(x) = \int_C \mu(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial n(y)} ds_y, \quad x \in S$$

であると仮定してその密度函数 μ を決定すべきものとして次の二種方程式を導いた。

$$(9) \quad \frac{1}{2} \mu(x) = \int_C \mu(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial n(y)} dy - \gamma(x), \quad x \in C$$

このやり方はよく知られている二種方程式の理論と直ちに適用しうる利点はあるが、(1)の解が(8)で表されるという必然性がない。そのために別に解の一意性の証明を必要とした。更に注目すべきことは、この方法が、境界 C が閉曲線弧 L である場合には適用出来ないことである。すなわち(8)で定義される $u(x)$ が、 L 上で、その正負いづれの側から近づくときも常に境界値 $\gamma(x)$ をとることが要求されるとすれば μ は(9)ではなくて、

$$(10) \quad \pm \frac{1}{2} \mu(x) = \int_L \mu(y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial n(y)} dy - \gamma(x)$$

を満足せねばならぬであろう。これは $\mu(x) \equiv 0$ 従って $u(x) = 0$ を導いて一般に $\gamma(x) \neq 0$ のときに(2)を満足し得ないことは明かである。

L を n 個の、滑かな、互に共通点をもたぬ曲線弧の和とする。 $C^\pm$ を L に平行で L に充分近い曲線弧、 C^0 を L の端

点を中心とする円弧で, $C = C^0 + C^+ + C^-$ が L を囲む閉曲線となるようにとる。 $C^\pm$ と L に近づく極限をとれば (5) から

$$(11) \quad u(x) = \int_L \tau(y) v(x, y) ds_y, \quad x \in S$$

が導かれる。ただし τ は, $\frac{\partial u}{\partial n}$ の L の正負の側からの極限値をそれぞれ $(\frac{\partial u}{\partial n})^+$, $(\frac{\partial u}{\partial n})^-$ としたときその差である:

$$\tau(y) = (\frac{\partial u}{\partial n})^- - (\frac{\partial u}{\partial n})^+.$$

(11) を導くとき C^0 上の積分が消滅するものと仮定した。これは, ρ を L の端点からの距離として, u および $\frac{\partial u}{\partial n}$ が $\rho \rightarrow 0$ のとき $\rho^{\alpha-1}$ ($\alpha > 0$) の量であることを要請したことであつて, 物理的には端点の近傍でのエネルギーが有限なことを意味し, Lord Rayleigh の素のいわゆる edge condition に相当するものである。これから更に $\tau(y)$ が L の端点 y_j ($j=1, 2, \dots, 2N$) の近傍で

$$(12) \quad \tau(y) = \tau_j(y) / \sqrt{|y - y_j|}$$

の形であることを示される。ここに $\tau_j(y)$ は L 上 Hölder 連続な函数とする。

(11) から $\tau(y)$ の満足すべき方程式として

$$(13) \quad \int_L \tau(y) v(xy) dy = f(x), \quad x \in L$$

が導かれる。

逆に τ の L 上のヤーク種分方程式 (13) の解 τ 、端点条件 (12) を満足するもの τ があれば、それを用いて (11) で定義される函数 $u(x)$ は (1), (2), (4) のすべてを満足する所要の解 τ であることが証明出来る。このようにして Dirichlet 問題は積分方程式 (12) (13) と同値 τ であることがわかった。

Neumann 問題 (3) についても、 L^c を、 $L+L^c$ が一つの単純閉曲線となるように選び、 $L+L^c$ で囲まれる領域 D の Neumann Green 函数をとれば、積分路を L の代りに L^c として (13) と同じ形の積分方程式が導かれ、これがもとの境界値問題と同値なことが示される。

次節においてこれらの積分方程式の解法を考える。

3. 対数特異核をもつヤーク種 Fredholm 積分方程式の解法

ν を正整数、 b を正実数とし、 $\{a_j\}$ を

$0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{2\nu} < 2b$ なるように与えられるものとする。区間 I を

$$I = \bigcup_{j=1}^{\nu} \{s \mid a_{2j-1} < s < a_{2j}\}$$

とし, l 上で定義される 1 種 Fredholm 積分方程式

$$(14) \quad K\tau \equiv \int_l K(s, \sigma) \tau(\sigma) d\sigma = g(s), \quad s \in l$$

を考える。ここに g は $\frac{dg}{ds}$ が l 上で "Hölder 連続" である如き既知函数, $\tau(\sigma)$ は l 上で "Hölder 連続", l の端点 a_j の近傍で

$$(15) \quad \tau(\sigma) = \tau_j(\sigma) / \sqrt{\sigma - a_j}, \quad j=1, 2, \dots, 2N$$

と表されるような未知函数とし, 核 $K(s, \sigma)$ は,

$$(16) \quad K(s, \sigma) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2 - 2 \cos \beta(s - \sigma)} - k_0(s, \sigma), \quad \beta = \frac{\pi}{b}$$

とおいたとき

$$k_0(s, \sigma) \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial k_0(s, \sigma)}{\partial s} \in L^2(\Omega), \quad \Omega = [0, 2b] \times [0, 2b]$$

となる如きものとする。前節に導いた境界値問題の基本積分方程式はこの形である。

$k_0(s, \sigma)$ および $u'' \frac{\partial k_0(s, \sigma)}{\partial s}$ の Fourier 級数とそれぞれ
 $\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} k_{mn} e^{i\beta ms - i\beta n\sigma}$ および $\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} K_{mn} e^{i\beta ms - i\beta n\sigma}$ とする。

(16) の $k_0(s, \sigma)$ の代りにその N 部分和

$$(17) \quad k_N(s, \sigma) = \sum_{-N}^N \sum_{-N}^N k_{mn} e^{i\beta ms - i\beta n\sigma}$$

ととつて得られる積分方程式を

$$(18) \quad K_N \tau \equiv \int_{\ell} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1}{2-2\cos\beta(s-\sigma)} - k_N(s, \sigma) \right\} \tau(\sigma) d\sigma = g(s)$$

とする。区間 ℓ 上の点 s, σ に対し

$$(19) \quad t = e^{i\theta}, \quad t_0 = e^{i\phi}, \quad \theta = \beta\sigma, \quad \phi = \beta s$$

とおくと、区間 ℓ 上の点と複素平面上の単位円弧上の点との間に一対一の対応がつく。

$$\tau(t) = i\pi \tau(\sigma), \quad \frac{dg(s)}{ds} = f(s) = f(t_0)$$

とおき、(18) の両辺を s で微分すると

$$(20) \quad \frac{1}{i\pi} \int_{\ell} \tau(t) \left\{ \frac{1}{t-t_0} - \sum_{m=-N}^N K_{mn} t_0^m t^{-n-1} \right\} dt = f(t_0),$$

が得られる。(15) は

$$(21) \quad \tau(t) = \tau_j(t) / \sqrt{t-t_j}, \quad t_j = e^{i\beta a_j}$$

のように書き直される。(20) での ℓ は複素平面上の円弧を意味する。

(20) の解 $\tau(t)$ が存在するものと仮定して、それを用いて函数

$$(22) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \tau(t) \left\{ \frac{1}{t-z} - \sum_{m=-N}^N K_{mn} z^m t^{-n-1} \right\} dt$$

を考へる。これは次の性質をもつ。

(23) (i) $\Phi(z)$ は $z \neq 0$, $z \neq \infty$, $z \notin l$ 正則。

$$(ii) \Phi(z) = O(|z|^{-N}), \quad |z| \rightarrow 0,$$

$$\Phi(z) = O(|z|^N), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

$$(iii) \Phi(z) = O(\sqrt{|z - t_j|}), \quad z \rightarrow t_j.$$

$$(iv) \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in l.$$

$$(v) \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \tau(t_0), \quad t_0 \in l.$$

ただし $\Phi^\pm(t_0)$ は $\Phi(z)$ の, z が $t_0 \in l$ に正負の側から近づくときの極限値を表すものとする。

(23) の (v) は, (20) の解 τ が存在すれば, それは (i) ~ (iv) なる性質で規定される函数 $\Phi(z)$ の, l 上 z の極限値の差 τ 与えられねばならぬことを意味する。一方 (23) の (i) ~ (iv) なる性質をもつ函数の最も一般的な形は次式で与えられることが証明出来る。

$$(24) \quad \Phi(z) = \frac{X(z)}{2i\pi} \int_l \frac{1}{t-z} \frac{f(t)}{X(t)} dt + \frac{X(z)}{2} \sum_{n=-N}^{N+\nu} p_n z^n.$$

ただし, $\{p_n\}$ は未定数であり $X(z)$ は次の (25) で定義される函数, 又被積分函数の $X(t)$ は $X(z)$ の z が $t \in l$

に正の側から近づくときの極限值: $X(t) = X^+(t)$ である。

$$(25) \quad X(z) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2\nu} (z - t_j)}}$$

従って, (24) の, z を $t \in \ell$ に近づくときの極限値を計算することにより (20) の解 τ はもしあるとすれば

$$(26) \quad \tau(t) = \frac{X(t)}{i\pi} \int_{\ell} \frac{1}{\zeta - t} \frac{f(\zeta)}{X(\zeta)} d\zeta + X(t) \sum_{-N}^{N+\nu} p_n t^n$$

でなく τ はならぬ。逆に (26) を (20) に代入すると, (26)

が (20) の解であるために定数 $\{p_n\}$ の満足すべき必要充分条件として

$$(27) \quad - \sum_{-N}^{N+\nu} p_n H_n(t_0) + \sum_{-N}^N t_0^m \sum_{-N}^N K_{mn} \sum_{-N}^{N+\nu} p_\ell \alpha_{\ell-n} \\ = \frac{1}{i\pi} \sum_{-N}^N t_0^m \sum_{-N}^N K_{mn} \int_{\ell} \frac{f(\zeta)}{X(\zeta)} H_{-n-1}(\zeta) d\zeta + \frac{1}{i\pi} \int_{\ell} \frac{1}{\zeta - t_0} \frac{f(\zeta)}{X(\zeta)} \{H_0(t_0) - H_0(\zeta)\} d\zeta$$

が得られる。こゝに

$$(28) \quad H_n(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\ell} \frac{X(\zeta) \zeta^n}{\zeta - t} d\zeta, \quad \alpha_n = \frac{1}{i\pi} \int_{\ell} X(\zeta) \zeta^n d\zeta$$

とおいた。 (27) は t_0 についての多項式であるがこれは t_0 の如何に拘らず成立せねばならぬから両辺の t_0 の同じ中の係数がそれぞれ等しいことが必要且充分である。こゝ

で (27) を t_0 の多項式として表すために次の補題が重要な役割を果たす。

$$(29) \quad H_n(t) = \begin{cases} -\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{m-n} t^m, & (n \geq \nu \geq 0) \\ 0, & (\nu-1 \geq n \geq 0) \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{m-n} t^m, & (-1 \leq n) \end{cases}$$

ただし, $\{\beta_m\}, \{\gamma_m\}$ は $X(z)$ の Laurent 展開の係数である:

$$(30) \quad X(z) = \begin{cases} \sum_{m=-\nu}^{\infty} \beta_m z^m, & |z| \rightarrow \infty \\ \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m z^m, & |z| \rightarrow 0 \end{cases}$$

$|z| \rightarrow \infty$ は $\nu \geq 0$ 即ち L のすべての端点 z (21) が成立つていていゝから (29) も $\nu \geq 0$ に対する結果である。そうではなくて $\nu \leq -1$ の場合 (29) はすこし変る。証明は Cauchy の定理をつかつて出来るが詳しいことは省く。

(29) を代入して (27) の両辺の t_0^m の係数を等しいとおくと $\{p_n\}$ についての次の連立一次方程式が得られる。

$$(31) \quad \sum_{-N}^N p_n \sum_{-N}^N K_{m,2} \alpha_{n-2} + \begin{cases} \sum_{m+\nu}^{N+\nu} p_n \beta_{m-n} \\ \sum_{-N}^m p_n \gamma_{m-n} \end{cases} = q_m, \quad \begin{matrix} (0 \leq m \leq N) \\ (-N \leq m \leq -1) \end{matrix}$$

ただし g_m は既知定数である:

$$(32) \quad g_m = -\sum_{-N}^{-\nu-1} K_{mn} \sum_{\ell=1}^{-n-\nu} \rho_{n+\ell} f_\ell - \sum_0^N K_{mn} \sum_{-n}^0 \gamma_{n+\ell} f_\ell,$$

$$f_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{\ell} \frac{f(\sigma)}{x(\sigma)} e^{i\beta \ell \sigma} d\sigma$$

逆に $\{p_n\}$ が (31) を満足するものがあるならば (26) は (20) の解であることは明らかである。しかる (26) を (18) に代入した場合, すなわち $K_N \tau - g$ に代入したときこれは必ずしも 0 とはならず $K_N \tau - g = \text{const.}$ となる。この const. が 0, つまり (26) が (20) のみならず (18) の解でもあるためには (31) の他に更に次式の成立つことが必要充分である。

$$(33) \quad \sum_{-N}^N p_n \Gamma_n(s_0) = \Lambda(s_0).$$

ただし, s_0 を ℓ 上の任意の値として

$$\Gamma_n(s_0) = \int_{\ell} X(\sigma) e^{i\beta n \sigma} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1}{2-2\cos\beta(s_0-\sigma)} - \sum_{-N}^N k_{p\beta} e^{i\beta p s_0 - i\beta p \sigma} \right\} d\sigma,$$

$$\Lambda(s_0) = i\pi g(s_0) - \frac{1}{b} \int_{\ell} \frac{f(\sigma')}{x(\sigma')} d\sigma' \int_{\ell} \frac{X(\sigma) d\sigma}{1-e^{i\beta(\sigma-\sigma')}} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1}{2-2\cos\beta(s_0-\sigma)} - \sum_{-N}^N k_{p\beta} e^{i\beta p s_0 - i\beta p \sigma} \right\}$$

すなわち, (18); $K_N \tau - g = 0$ は連立一次方程式 (31), (33) を満足する $\{p_n\}$ を用いて (26) でつくられる函数 τ で与えられるこれ以外にはない。 $\{p_n\}$ は $2N+\nu+1$ 個の未知数

であり, (31) (33) は $2N+2$ 個の方程式である。 (18) の解の存在, 一意性は連立方程式 (31) (33) のそれらと同じものである。

最後に例として格子による平面波の廻折の問題を考えよう。格子は $L = \{(x, y) | x=0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ と周期 2π として $-\infty < y < \infty$ に配列したものとし, 平面波 e^{-ikx} が入射するものとする。この波動現象は L 以外の右半平面 (1) で, そして L 上 (2) で満足する函数 u によって与えられるが, 境界の周期構造を考えるとそれは

$$u(x, y) = \sum \alpha_n e^{\pm i k_n x + i n y} + e^{-ikx}, \quad (\pm \text{は } x \geq 0 \text{ に対応する})$$

である。ここに

$$k_n^2 = k^2 - n^2, \quad \Im k_n \leq 0, \quad \alpha_n = \frac{-i}{2k_n} \sum p_m \alpha_{m-n}$$

で与えられる。 $\{p_m\}$ は (31) (32) に相当する次の連立方程式により定められる定数である。

$$K_m \sum_{-N}^{N+1} p_n \alpha_{n-m} + \begin{cases} \sum_{m+N}^{N+1} p_n \beta_{m-n} \\ \sum_{-N}^m p_n \gamma_{m-n} \end{cases} = 0 \quad \begin{matrix} (0 \leq m \leq N) \\ (-N \leq m \leq -1) \end{matrix}$$

$$\text{ただし } K_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 - k^2}} \right), \quad K_{-n} = -K_n \quad (n \geq 0).$$

端点 y_j の座標は $y_j = \pm \frac{\pi}{2}$ より $X(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ となりこれから定数 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は次のように与えられる。

$$\beta_{-2p-1} = \gamma_{2p} = \frac{(-1)^p (2p)!}{(2^p p!)^2}, \quad \beta_{-2p} = \gamma_{2p+1} = 0.$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{1+e^{i2\theta}}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}.$$

最後に (33) は

$$\Gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{1+e^{i2\theta}}} \log \frac{1}{2-2\cos\theta} d\theta - \frac{i}{2k} \alpha_n - \sum_{\substack{m=-N \\ m \neq 0}}^N \frac{1}{m} K_m \alpha_{n-m}.$$

$$\Lambda = 1.$$

これは $n=0$ 。

文献

- [1] H. Weyl : Math. Z. 55 (1952) 187-198
- [2] A. Olte & Y. Hayashi : Tech. Rep. Rad. Lab. Univ. Michigan
5825-1-F (1964)
- [3] Y. Hayashi : Jour. Appl. sci. Res. (Netherlands) B12 (1955) 331-359
- [4] Y. Hayashi : Proc. Japan Acad. 42 (1966) 725-730

[5] Y. Hayashi: Proc. Japan Acad. 42 (1966) 731-736.

[6] Y. Hayashi: Proc. Japan Acad. 42 (1966) 91-94.