

対流における1つの混合境界値問題

名大 工学部 桑原 真二

§ 1. 物理的問題設定

原子炉あるいは工業用熱交換機には、図1(a)に示すような冷却塔が附属している。このような冷却塔の構造は図1(b)に示すように、その底部に熱交換機があり、こゝで生じた熱による浮力を起動力として自然対流が起る。この論文では、適当な物理的モデルをつくらせて問題を簡単化して、数学的解析を行う。

われわれは図1(b)に示すように、塔の上部と底部で限られた塔の内部の流れのみに着目し、まず次のような近似を行う。

i) 内部の流れについては、密度変化の効果は浮力の項のみ考慮し (Boussinesq 近似)、粘性、熱伝導性は無視する。

ii) 底部の充填層 (= 熱交換装置) における仮定:

a) 充填層通過後の状態は、通過直前の圧力 p_0 と温度 T_0 によらず、通過前の流れの影響はうけない。

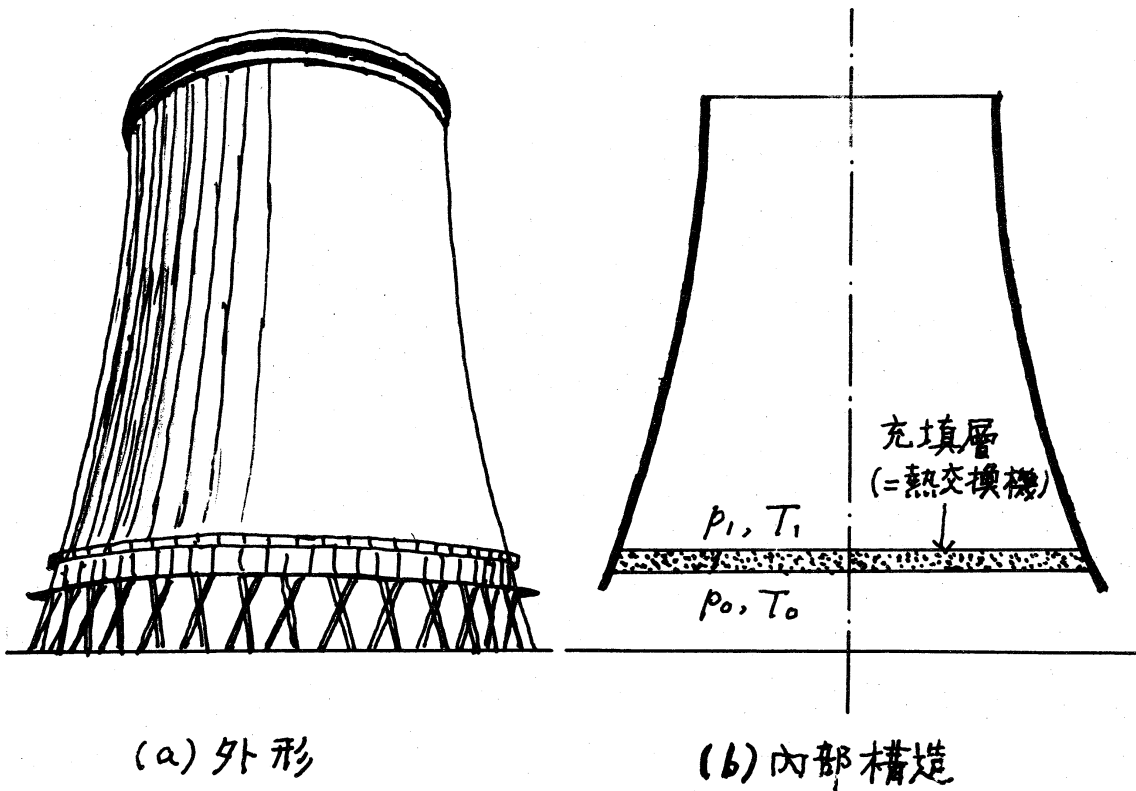


図1 冷却塔の概念図

b) 充填層通過後の流注の法線成分 w_1 は層前後の圧力差 $p_0 - p_1$ により、前後の温度差は w_1 により決まる。

この論文では

$$w_1 = C(p_0 - p_1)^k \quad 0.5 \leq k \leq 1.5 \quad (1.1)$$

$$T_1 - T_0 = (T_m - T_0) w_0 / (w_1 + w_0) \quad (1.2)$$

という形を採用する。ここで C, k, T_m, w_0 は定数、 p_1, T_1 は通過直後の圧力、温度である。 T_m の意味は

$$w_1 \rightarrow 0 \text{ に対して} \quad T_1 = T_m \text{ (最高)} \quad (1.3a)$$

$$w_1 \rightarrow \infty \text{ に対して } T_1 = T_0 \quad (1.36)$$

である。

iv) 塔の上部での境界条件。塔の上部は半径 a の円形の水平面とし、その面上で圧力 p 及び速度の接線成分 u, v が与えられているものとする。この論文では冷却塔が風にさらされているとし、軸対称流を仮定して、

$$p = p_0 \quad (1.4)$$

$$u = v = 0 \quad (1.5)$$

とおく。ここで p_0 は遠くでの圧力とする。

Boussinesq 近似の方程式は

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho_0 \frac{Dv}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \frac{\rho_0 g}{T_0} (T - T_0) e_z \quad (1.7)$$

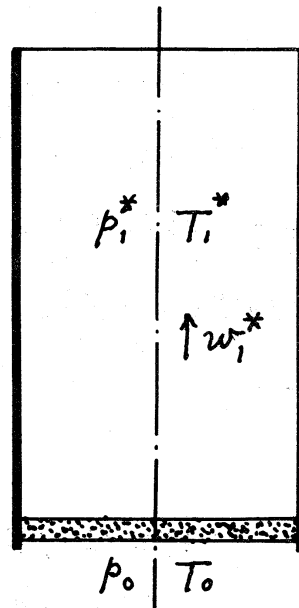
で与えられる。ここで $v = (u, v, w)$ は流速, p, T は圧力と温度, ρ_0 は密度 (一定), e_z は垂直上方に与えられた方向の単位ベクトルである。 ρ_0, T_0, g は $\rho_0 = R \rho_0 T_0$ (R は気体定数) を満たす基準の圧力, 温度, 密度で、ここでは冷却塔の外部に与えられた一定値である。

自然対流においては、境界条件から与えられる明確な代表的速度はない。そこで最も簡単な円筒形の塔の中の自然対流を考え、このばあいには与えられる一定の上昇流速を代表値としてとる (図 2 図)。

冷却塔の底部の充填層で一様に
 温められた空気は、一定の温度
 T_i^* ($T_i^* > T_o$, $T_i^* - T_o = \Delta T$,
 (1-2)) となり、熱伝導を仮定
 しているから、上昇しても同じ
 値を保つと考えられる。また流
 れは平行流を仮定し

$$u = v = 0$$

$$w = w(z)$$



※2図 円筒形冷却塔

とおくと、(1-6), (1-7) は

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho_o g}{T_o} (T_i^* - T_o) \quad (1-9)$$

となる。(1-8) を境界条件 (1-1), (1-9) を境界条件 (1-4) の
 もとに解くと

$$w = w_i^*, \quad p - p_o = \frac{\rho_o g}{T_o} \Delta T (z - h) \quad (1-10)$$

を用いる。(1-10) の第2式から p_i^* が求まる:

$$p_o - p_i^* = \frac{\rho_o g}{T_o} \Delta T h \quad (1-11)$$

(1-1), (1-2) (w_i, T_i, p_i 等には $*$ をつける), (1-11) は
 未知数 w_i^*, T_i^*, p_i^* あるいは $w_i^*, \Delta T (= T_i^* - T_o), \Delta p$
 $= p_o - p_i^*$ に対する連立代数方程式となる:

$$w_i^* = C (\Delta p)^k$$

$$\Delta T = \Delta T_m w_0 / (w_1^* + w_0) \quad \Delta T_m \equiv T_m - T_0 \quad \left. \vphantom{\Delta T = \Delta T_m w_0 / (w_1^* + w_0)} \right\} (1-12)$$

$$\Delta p = \rho_0 g \Delta T h / T_0$$

これから代表的速度 w_1^* が求まる。(1-11) から w_1^* , Δp を消去すると

$$C (\rho_0 g h / T_0)^k (\Delta T)^{k+1} + w_0 \Delta T - \Delta T_m w_0 = 0 \quad (1-13)$$

とす。

§ 2. 一般斜交座標系

こゝでは、境界条件を完全に満足しうるような一般斜交座標系を導入する。3次元 Euclid 空間のデカルト座標を

$$\begin{aligned} x^1, x^2, x^3 &: \text{位置座標} \\ e_1, e_2, e_3 &: \text{基本(単位)ベクトル} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{x^1, x^2, x^3} \right\} (2-1)$$

とかく。Euclid 空間の中に3つの独立な面の族を設定する:

$$\begin{aligned} f^\alpha(x) &= \xi^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3 \\ x &= x^\alpha e_\alpha \equiv x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \\ \partial(f_1, f_2, f_3) / \partial(x^1, x^2, x^3) &\neq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{f^\alpha(x)} \right\} (2-2)$$

この式は Jacobian である。 $\xi^\alpha = \text{const.}$ は1つの曲面に対応し、しながって ξ^1, ξ^2, ξ^3 に適当な値を与えたと、

Euclid 空間中の1点が決まる。そこで (ξ^1, ξ^2, ξ^3) ($\equiv \xi$ と略記する) は座標の意味をもつ。(2-2) を解いて

$$x^\alpha = g^\alpha(\xi) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2-3)$$

と置く。

$$x = x^\alpha e_\alpha = g^\alpha(\xi) e_\alpha = x(\xi) \quad (2-4)$$

をうる。ここで、 ξ 座標についての基本ベクトルを定義する：

$$a_\alpha = \partial x / \partial \xi^\alpha \quad (2-5)$$

a_1 は $\xi^2 = \text{const}$, $\xi^3 = \text{const}$ の曲線の方法, ξ^1 の増加する向きに向いている。

ベクトル (dx^1, dx^2, dx^3) はまた ξ 座標で $(d\xi^1, d\xi^2, d\xi^3)$ であらうから：

$$dx = dx^\alpha e_\alpha = d\xi^\alpha a_\alpha \quad (2-6)$$

これから

$$a_\alpha = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} e_\lambda, \quad e_\alpha = \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\alpha} a_\lambda \quad (2-7)$$

の関係がえられた。

逆基本ベクトル a^1, a^2, a^3 を

$$a^\alpha = a_\beta \times a_\gamma / (a_1, a_2, a_3) \quad (\alpha, \beta, \gamma) \text{ は } (1, 2, 3) \text{ の循環的な置換} \quad (2-8)$$

で定義する。ここで

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1 \cdot (a_2 \times a_3) \quad (2-9)$$

は a_1, a_2, a_3 の作る平行六面体の体積である。また

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_\alpha \cdot a_\beta = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\beta} \\ g^{\alpha\beta} &= a^\alpha \cdot a^\beta = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

を定義すると

$$a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta, \quad a^\alpha = g^{\alpha\lambda} a_\lambda \quad (2-11)$$

の関係がえられる。基本ベクトル, 逆基本ベクトルの間には
直交関係:

$$a_\alpha \cdot a^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (2-12)$$

があることが容易にわかる。

位置変化: $\xi \rightarrow \xi + d\xi$ による a_α の変化はテンソル $T_{\alpha\lambda}^\mu$ であらわされる:

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha(\xi + d\xi) &= a_\alpha(\xi) + \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\lambda} d\xi^\lambda + O(d\xi^2) \\ \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\lambda} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\alpha} = T_{\alpha\lambda}^\mu a_\mu \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

ベクトル場 $W = W(x) = W(\xi)$ は a_λ, a^λ でおおきく

$$\left. \begin{aligned} W &= v^\lambda a_\lambda = v_\lambda a^\lambda \\ v^\lambda &= W \cdot a^\lambda \quad v_\lambda = W \cdot a_\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

の表現が可能である。 v^λ は反変成分, v_λ は共変成分とい
う。 $\text{grad}, \text{div}, \text{rot}$ 等は

$$\left. \begin{aligned} \text{grad} &= a^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \\ \text{div } W &= \frac{\partial v^\lambda}{\partial \xi^\lambda} + T_{\mu\lambda}^\lambda v^\mu \\ (\text{rot } W)^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{g_0}} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi^\beta} \right) \quad (\alpha, \beta, \gamma): \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

であらわされる。こゝで

$$g_0 = \det(g_{\alpha\beta}) = (a_1, a_2, a_3)^2 \quad (2-16)$$

である。

$$(2-15) \text{ は } a^\alpha \cdot \left[\frac{D}{Dt} (v^\lambda a_\lambda) + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - K \right] = 0 \text{ である}$$

行うことによって基礎方程式(1.6), (1.7)は

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial \xi^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda v^\mu = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + v^\lambda \frac{\partial v^\alpha}{\partial \xi^\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha v^\lambda v^\mu = -\frac{1}{\rho_0} g^{\alpha\lambda} \frac{\partial p}{\partial \xi^\lambda} + K_\alpha^x \quad (2.13)$$

と3つ。ただし

$$K = \frac{\rho_0}{T_0} (T - T_0) e_z$$

とおいである。

§3. 数学的問題設定

第3図(a)にその断面を示す回転双曲面で囲まれた高さ h , 上面の半径 a , 下面の半径 b の冷却塔を考える。回転双曲面は円柱座標 (r, θ, z) によって

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 + (z-h)^2/c^2)^{1/2}, \quad c = ah/\sqrt{b^2 - a^2} \\ 0 &\leq z \leq h \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

で表わされるとする。そこで

$$\left. \begin{aligned} \xi^1 &= (1 + (z-h)^2/c^2)^{-1/2} r \\ \xi^2 &= \theta, \quad \xi^3 = z \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

のように斜交座標をえらべば

$$\xi^1 = a, \quad \xi^3 = 0, \quad h \quad (3-3)$$

が筒の側面, 下面, 上面に対応する。

そこで次のような無次元化を行い, 無次元の量について同じ記号をもちいる:

$$\left. \begin{aligned} x/a \rightarrow x, \quad t/(a/w_1^*) \rightarrow t, \quad w/w_1^* \rightarrow w \\ p'/\Delta p \rightarrow p', \quad T'/\Delta T \rightarrow T' \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

ξ^1, ξ^2, ξ^3 については

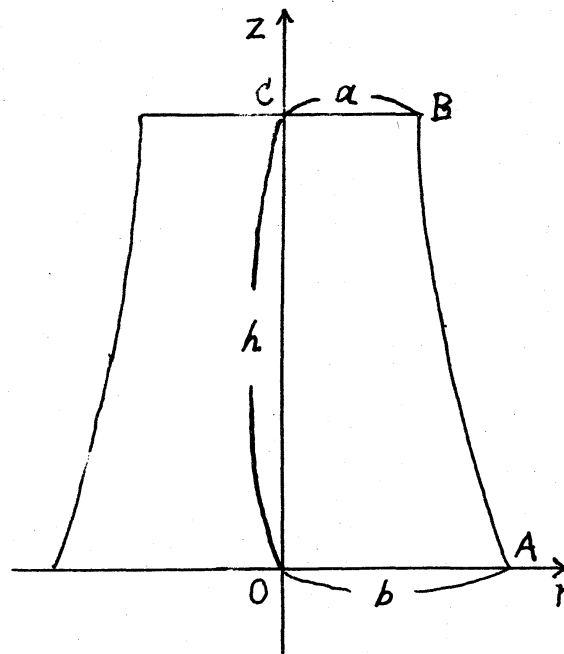
$$\xi^1/a \rightarrow \xi^1, \quad \xi^2 \rightarrow \xi^2, \quad \xi^3/a \rightarrow \xi^3 \quad (3-5)$$

a, b, c, h は

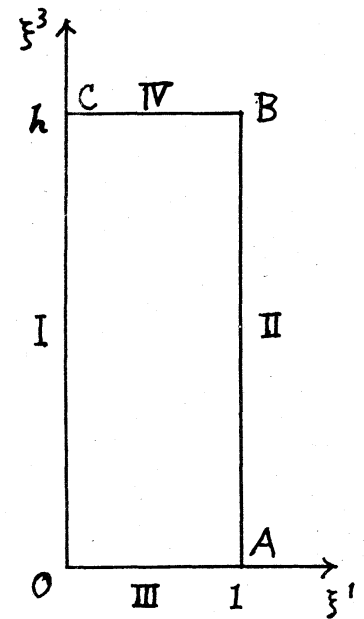
$$a/a \rightarrow 1, \quad b/a \rightarrow b, \quad c/a \rightarrow h/\sqrt{b^2-1}, \quad h/a \rightarrow h \quad (3-6)$$

~~ξ^1, ξ^2~~ が対応する。

こゝで



(a) デカルト座標系



(b) 斜交座標系

※3図 回転双曲面壁で囲まれた冷却塔

$$\left.
 \begin{aligned}
 e_x &= \cos \theta e_x + \sin \theta e_y \\
 e_y &= -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y \\
 H(\xi^3) &= 1 + (\xi^3 - h)^2 / c^2 \\
 I(\xi^2) &= (\xi^3 - h) / c^2
 \end{aligned}
 \right\} \quad (3-7)$$

をもちいると (2-5), (2-9) により

$$\left.
 \begin{aligned}
 a_1 &= \sqrt{H} e_x, \quad a_2 = \xi' \sqrt{H} e_y, \quad a_3 = \frac{\xi' I}{\sqrt{H}} e_x + e_z \\
 a_1' &= \frac{1}{\sqrt{H}} (e_x - \frac{\xi' I}{\sqrt{H}} e_z), \quad a_2' = \frac{e_y}{\xi' \sqrt{H}}, \quad a_3' = e_z
 \end{aligned}
 \right\} \quad (3-8)$$

がえられる。 e_x, e_y は x, y の単位ベクトルであり

$$x = z \cos \theta, \quad y = z \sin \theta \quad (3-9)$$

である。

軸対称の流れのみを考えると (2-10), (2-18) は

$$\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial v^3}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\xi^1} v^1 + \frac{2I}{H} v^3 = 0 \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial \xi^3} + \frac{2I}{H} v^1 v^3 + \frac{\xi'}{c^2 H} v^3 v^3 \\
 = -\frac{A}{H} \left\{ 1 + (\xi' I)^2 / H \right\} \frac{\partial P'}{\partial \xi^1} + \frac{A \xi' I}{H} \frac{\partial P'}{\partial \xi^3} - \frac{A \xi' I}{h H} T'
 \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial v^3}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^3}{\partial \xi^1} + v^3 \frac{\partial v^3}{\partial \xi^3} = \frac{A \xi' I}{H} \frac{\partial P'}{\partial \xi^1} - A \frac{\partial P'}{\partial \xi^3} + \frac{A}{h} T' \quad (3-12)$$

こゝで

$$A = \frac{2h \Delta T}{T_0 w_1^{*2}} \quad (3-13)$$

は無次元の定数である。更に I, ξ を次の式 (= 積分場方程式) は

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v^1 \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} + v^3 \frac{\partial T'}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3-14)$$

となる。

軸対称の流れでは、流れの関数 Ψ を導入し、その渦度 ω は ω_2 (ω は ω_2) のみで表わされる :

$$v' = \frac{1}{\xi'H} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^3}, \quad v^3 = -\frac{1}{\xi'H} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^1} \quad (3-15)$$

$$\omega = \omega_2 \quad (3-16)$$

もちろん, (3-15) は (3-10) を自動的に満足している。 $\xi' = 0$ の境界条件を考慮して, われわれは

$$\bar{\Psi} = \Psi / \xi', \quad \Omega = \omega \xi' \quad (3-17)$$

を導入し, $\bar{\Psi}, \Omega, T'$ は $\rho' = \rho' + \frac{1}{2A} \Omega^2$ なる Ω の連立の方程式を導く :

$$D\bar{\Psi} = -\xi' (2C_2^2 + C_3) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\xi'H} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} - \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \right) + 2C_3 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} - (C_3 + C_2^2) \bar{\Psi} + H\Omega \quad (3-18)$$

$$DP = -\left(\frac{1}{\xi'} C_1 + \xi' C_3 \right) \frac{\partial P}{\partial \xi^1} + \frac{1}{A} \left[\left\{ D\bar{\Psi} + (2C_1/\xi' + \xi' C_3) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} - C_2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} + C_3 \bar{\Psi} \right\} \Omega + \left\{ C_1 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} + \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \right) - \xi' C_2 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^1} + \left\{ -\xi' C_2 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} + \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \right) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^3} \right] + \frac{1}{h} \left(-\xi' C_2 \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} + \frac{\partial T'}{\partial \xi^3} \right) \quad (3-19)$$

$$-H \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\Psi}, \Omega)}{\partial (\xi^1, \xi^3)} + \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^3} = -\frac{1}{\xi'} \Omega \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} + \frac{A}{h} \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} \quad (3-20)$$

$$-H \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\Psi}, T')}{\partial (\xi^1, \xi^3)} + \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \frac{\partial T'}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3-21)$$

$$P = p' + \frac{1}{2A} \left\{ C_1 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} + \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \right)^2 - 2\xi' C_2 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^1} + \frac{\bar{\Psi}}{\xi'} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} + \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right\} \quad (3-22)$$

$$D = C_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} - 2\xi' C_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^3 \partial \xi^3} \quad (3-23)$$

$$C_1(\xi', \xi^3) = \frac{1}{H} \left(1 + \frac{(\xi' I)^2}{H} \right), \quad C_2(\xi^3) = \frac{I}{H}, \quad C_3(\xi^3) = \frac{1}{H} \left(\frac{2I^2}{H} - \frac{1}{C^2} \right) \quad (3-24)$$

次の境界条件を考へる。 (ξ', ξ'') の空間ではわれわれの考へる領域は $0 \leq \xi' \leq 1$, $0 \leq \xi'' \leq h$ の長方形である。辺, 頂点と第3図(b)に示すように, I, II, III, IV, O, A, B, C と名づける。I は中心軸, II は回転双曲面の壁, III, IV は下面, 上面に対応する。

ξ' に与える仮定, 熱伝導を無視した等の物理的条件によつて, 各辺において

$$\text{I: } u=0, \quad \frac{\partial T'}{\partial \xi'}=0$$

$$\text{II: } v_n=0, \quad \frac{\partial T'}{\partial n}=0$$

$$\text{III: } w=(-p')^k, \quad T'=\frac{1+w_0}{w+w_0}$$

$$\text{IV: } p'=0, \quad u=0$$

こゝで, u は ξ' 方向の速度成分, n は回転双曲面壁への法線成分をあらわす。これらの条件は ξ' の斜交座標にほんやくできる:

$$\text{I: } a'_{11}v = v' = \frac{1}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.} \equiv 0 \quad (3-25)$$

$$a'_{11} \cdot \text{grad } T' = \frac{\partial T'}{\partial \xi'} = 0 \quad (3-26)$$

$$\text{II: } v' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \xi''} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.} \equiv \Phi_{\text{II}} \quad (3-27)$$

$$a'_{11} \cdot \text{grad } T' = g'' \frac{\partial T'}{\partial \xi''} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial \xi''} = 0 \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned} \text{III: } w &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v} = a'_{21}v = v^2 = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} + \frac{\Phi}{\xi'} \right) = (-p')^k \\ &\Rightarrow \frac{1}{\xi' H_{\text{III}}} \frac{\partial}{\partial \xi'} (\xi' \Phi) = -(-p')^k \\ &\Rightarrow \Phi = -\frac{H_{\text{III}}}{\xi'} \int_0^{\xi'} \xi' (-p')^k d\xi', \quad H_{\text{III}} = 1 + h^2/c^2 \end{aligned} \quad (3-29)$$

$$T' = (1 + w_0) / \{(-p')^k + w_0\} \quad (3-30)$$

$$IV: \quad p' = 0 \Rightarrow \quad P = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right)^2 \quad (3-31)$$

$$u = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3-32)$$

基礎方程式 (3-18) ~ (3-21) は Φ, Ω, T', P について非線形
の連立偏微分方程式である。D は Laplacian に近い演算子で
 Φ, P は Poisson 形の, Ω, T' は対流形の偏微分方程式で,
各右辺は非齊次項と考えられる。数値計算を行うには、右
辺は既知として、計算スツップの右い値で代用する。以下、
問題を定常としてとりあつかう。

Ω, T' の対流形の方程式は解析的には、底部の影響がはた
(等性曲線) にそって伝って行くという構造をしており、し
たがって、底部より上部に数値計算を行うのが適している。
それ故、境界条件として、I, II, III ~~の~~ 値を必要とする。

(3-25) ~ (3-28):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} = \frac{\partial T'}{\partial \xi^1} = 0 \quad \text{on I and II} \quad (3-33)$$

ともういへば、(3-20), (3-21) は

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \xi^3} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right) \frac{\partial T'}{\partial \xi^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{on I, II} \quad (3-34)$$

となる。(3-15), (3-17) から $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} = -H v^3$ となり、I, II
で $v^3 \neq 0$ と考えられるから (また $H \neq 0$)、一般に $\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right\}$
 $\neq 0$ (on I & II)。そこで

$$\Delta\Omega = 0, \quad T' = T_{II} \quad \text{on } I \quad (3-34)$$

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_{II} \quad T' = T_{II} \quad \text{on } II \quad (3-35)$$

とす。 (3-34) の $\Delta\Omega = 0$ は (3-18) からあきらか。

T' の III における境界条件は (3-30) で与えられており、II の III における境界条件を定める必要がある。II, 3 なるかき充填層直後の流れは

$$\begin{aligned} W &= W_{rot} + W_{is} \\ W_{rot} &= w_1 e_z \\ \text{rot } W_{is} &= 0 \quad W_{is} \cdot e_z = 0 \end{aligned} \quad (3-36)$$

と仮定する。充填層の中の流れは粘性流であり、一般に渦度をもつ流れである。したがって、充填層を通過して出てくる流れ $w_1 e_z$ は一般に渦度をもつ。充填層より上の流れは、圧力勾配、浮力等によって起される流れが重畳していても、この流れは渦なしと ~~仮定~~ 仮定してよいであろう。そこで IV では

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \xi' \omega = \frac{1}{H_{IV}} \left(\frac{\partial v_{rot,1}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial v_{rot,3}}{\partial \xi^1} \right) \\ &= -\frac{1}{H_{IV}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} a_3 \cdot (a^3 w_1) = -\frac{1}{H_{IV}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} (-\rho')^k \end{aligned} \quad (3-37)$$

とす。

至の境界条件は、(3-25), (3-27), (3-29), (3-32) で十分である。P の I, II, III の境界条件を定めるための運動方程式：

$$-(W \times \omega) = -A \text{grad } P + \frac{A}{h} T' a^3 \quad (3-38)$$

と与えらる。これはまた

$$-H(-v^3 a' + v' a^3) \Omega = -A \left(\frac{\partial P}{\partial \xi^1} a' + \frac{\partial P}{\partial \xi^3} a^3 \right) + \frac{A}{h} T' a^3 \quad (3-39)$$

と書ける。I, II においては $\cdot a_3$ を経て、I, II 上で積分し、III においては $\cdot a_1$ を経て III 上で積分して

$$P = P_C + \frac{1}{h} T_I (\xi^3 - h), \quad P_C = \frac{2}{A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} \right)_C^2 \quad \text{on I} \quad (3-40)$$

$$P = P_B + \frac{1}{h} T_{II} (\xi^3 - h), \quad P_B = \frac{1}{2A} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \frac{\Phi}{\xi^1} \right)_B^2 \quad \text{on II} \quad (3-41)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi^3} = \frac{1}{h} \Omega \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{1}{h} T' \quad \text{on III} \quad (3-41)$$

とする。IV の境界条件は (3-31) である。

これらの境界条件を模式的に書くと図 4 図の如くなる。

§4. 数値計算

計算の流れ図は図 5 図の如くなる。ここで始めの値として円筒形冷却塔のばあいの厳密解をもちい、 $C^2 = \text{有限}$, α を力す回転双曲面壁の冷却塔のばあいの数値計算を行う。図中 A とあるのは場の中で基礎方程式を差分形にあらためて解くことを意味する。

今までの計算では数値的不安定性が見られようである。その原因は対流項の処理にあるように思われる。

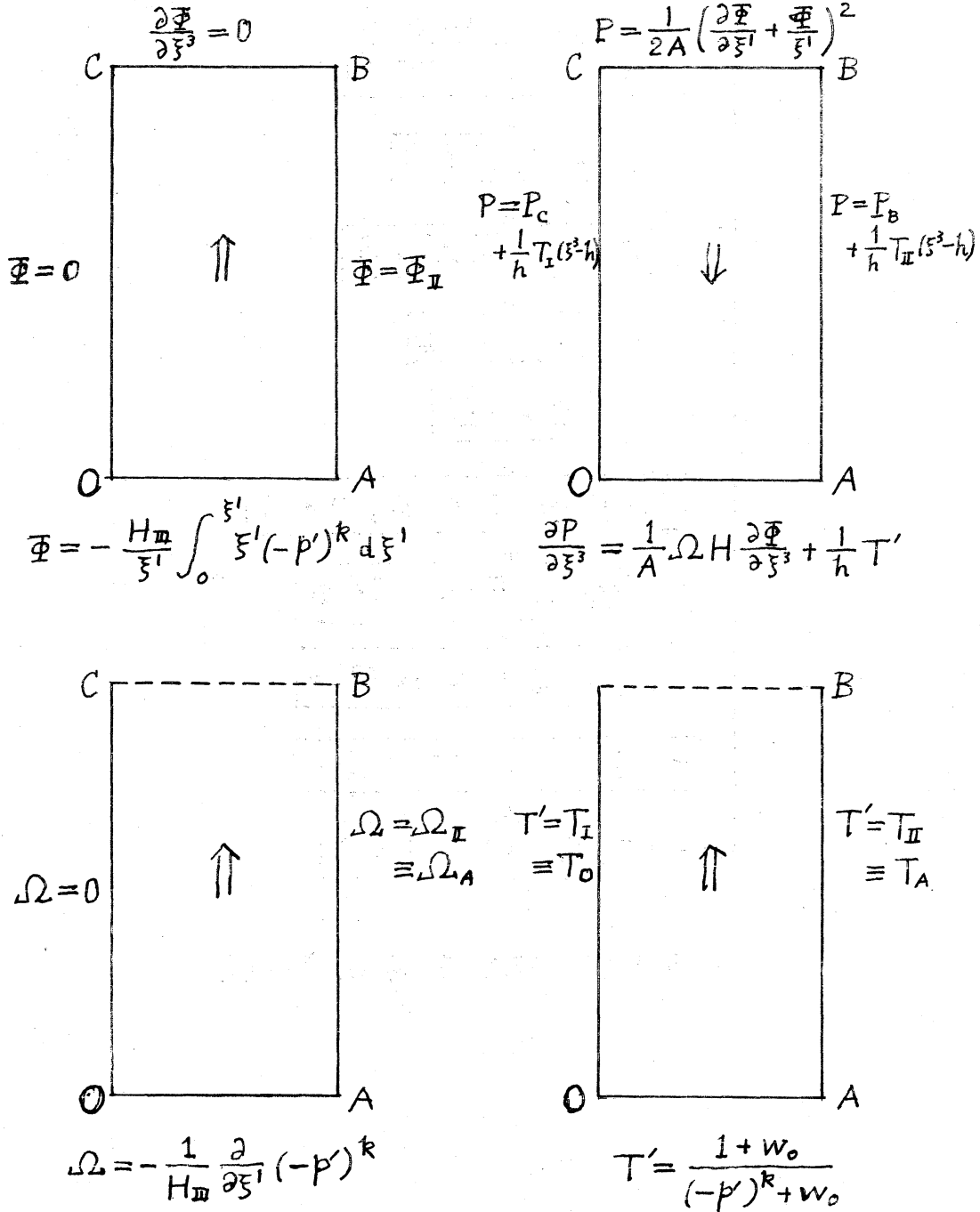


图4 境界条件

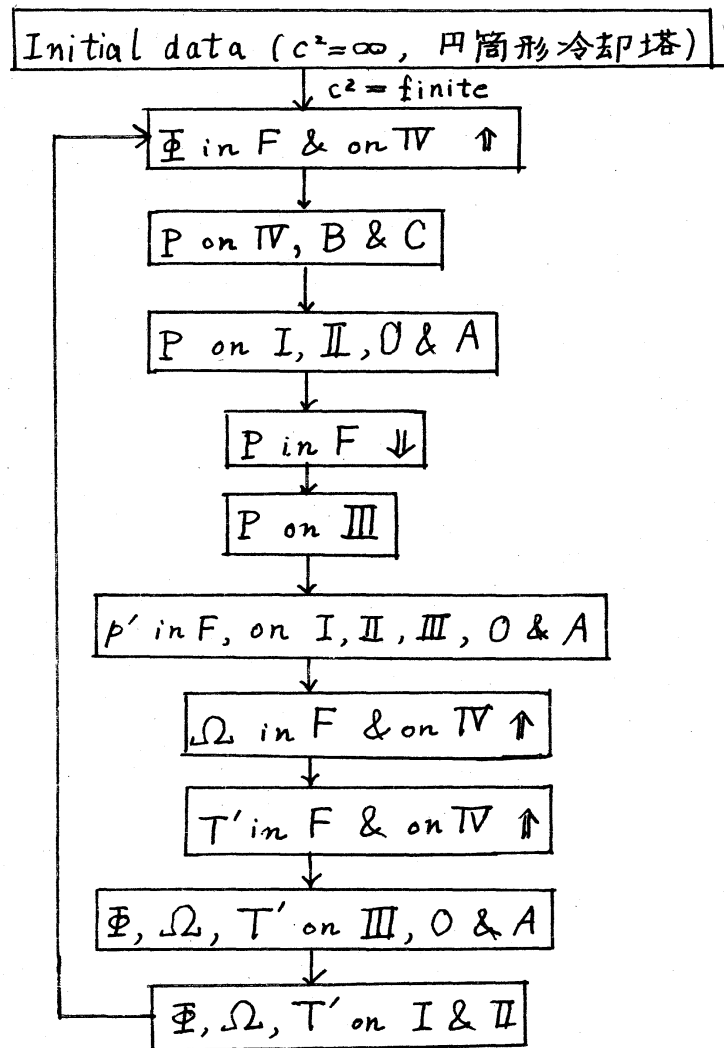


図5 数値計算の流れ図