

複素解析的バンドルの変形, 射影空間への
写像の拡張, 部分多様体の変形, 部分多様
体の *Stability* について 2 の概説

京大数理解析所 中野茂男

京大 理学部 寺田俊明記

§ 0 前書き

先ず記号の説明を兼ねて複素多様体の変形について 2 の大綱
を述べる。

$\psi \rightarrow M$ をパラコンパクト複素多様体の可微分族 (解析的
族) $\mathcal{E}$ を fibre V_t への制限が解析的 ψ の接バンドル (ψ の
解析的接バンドル), $\mathcal{F}$ を ψ の fibre V_t に沿う解析的接バン
ドル, $\mathcal{T}$ を M の (解析的) 接バンドルとすると, ベクトルバ
ンドルの exact は列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \omega^* \mathcal{T} \rightarrow 0$$

を得る。但し $\omega^* \mathcal{T}$ は写像 ω によるバンドル $\mathcal{T}$ の引き戻しであ
る。

Θ, ψ をそれぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ の可微分 (解析的) ψ の fibre V_t
への制限が正則な section の germ の層とすると

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow \psi \rightarrow \psi/\Theta \rightarrow 0$$

が exact である。さらに T_M と $\mathcal{T}$ の C^∞ -section (正則な section)
の germ の層, $\mathcal{T}$ を ω によって ψ 上に T_M より induce された層と

ありと、自然な injection により $T \subset \mathcal{Y}/\theta$ と考えられるから、 $f^{-1}(T) = \Pi$ とおくと

$$(0.1) \quad 0 \rightarrow \theta \rightarrow \Pi \xrightarrow{f} T \rightarrow 0$$

が exact である。

U を M の開集合とすると、exact 数列 (0.1) に対応して exact な cohomology の列

$$0 \rightarrow H^0(\pi^{-1}(U), \theta) \rightarrow H^0(\pi^{-1}(U), \Pi) \rightarrow H^0(\pi^{-1}(U), T) \\ \xrightarrow{f} H^1(\pi^{-1}(U), \theta) \rightarrow \dots$$

がえられ、inductive limit をとると M 上の cohomology module の germ の層の exact 数列

$$(0.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H}^0(\theta) \rightarrow \mathcal{H}^0(\Pi) \rightarrow \mathcal{H}^0(T) \xrightarrow{f} \mathcal{H}^1(\theta) \rightarrow \dots$$

が生ずる。初めから $\mathcal{Y}$ の 2 つのバンドルを $\mathcal{V}$ の fibre V_t に制限して考えると

$$0 \rightarrow \theta_t \rightarrow \Pi_t \rightarrow T_t \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^0(V_t, \theta_t) \rightarrow H^0(V_t, \Pi_t) \rightarrow H^0(V_t, T_t) \\ \xrightarrow{f_t} H^1(V_t, \theta_t) \rightarrow \dots$$

が exact, 且 $\mathcal{H}^0(T) \cong T_M$ であるから

$$\begin{array}{ccc} T_M & \xrightarrow{f} & \mathcal{H}^1(\theta) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma_t \\ (T_M)_t & \xrightarrow{f_t} & H^1(V_t, \theta_t) \end{array}$$

が可換となる。但し $(T_M)_t$ は $t \in M$ の接バンドル, γ_t は割

限写像である。

§1 複素解析的バンドルの変形

この § の定義及結果は“可微分又は C^∞ ”と“解析的”と置きかえたと定理 1.2, 定理 1.3 を除いて全く通用するので可微分族についての記述である。

定義 1.1 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ とパラコンパクト複素多様体の可微分族とする。 $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ が複素解析的バンドルの可微分族であるとは、 $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V}$ が複素 Lie 群と構造群とする C^∞ -fibre bundle であり、 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ の fibre V_t への制限 $\mathcal{B}_t \xrightarrow{\pi_t} V_t$ が複素解析的バンドルとなることである。

P を $\mathcal{B}$ の主バンドルとし $P \rightarrow \mathcal{V}$ の射影を p と表わす事にする。 $E(P)$ を fibre V_t に沿った解析的接バンドル、 $\mathcal{F}(P/M)$, $\mathcal{F}(P/\mathcal{V})$ をそれぞれ $P \xrightarrow{\pi} M$, $P \xrightarrow{p} \mathcal{V}$ の fibre $\mathcal{B}_t$, V_t に沿う解析的接バンドルとすると、

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(P/\mathcal{V}) & \rightarrow & \mathcal{F}(P/\mathcal{V}) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (1.1) \quad 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(P/M) & \rightarrow & E(P) & \rightarrow & (\omega \circ p)^* \tau \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & p^* \mathcal{F} & \rightarrow & p^* E & \rightarrow & (\omega \circ p)^* \tau \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

が exact, 可換である。 P は G を構造群とする主バンドルである。

るから, G は P に右から, $P \xrightarrow{E} V$ の fibre 上で推移的に,
作用している。 $z = z' \in E(P) \ni (x, u) \quad (x \in P, u \text{ は } x \text{ 上の接ベクトル})$ に対し,

$$(x, u) \sim (xg, g_*u)$$

(g_*u は g の作用に伴う接空間の写像) により, 同値関係を入れると, これにより, 商空間 $\pi = E(P)/G$ は V 上のベクトルバンドルとなる。 $\mathcal{L} = \mathcal{F}(P/V)/G$ $\mathcal{M} = \mathcal{F}(P/M)/G$ も同様に定義する。 例えば $\mathcal{L}$ は P 上の V の fibre 上の右不変ベクトル野を fibre とする V 上のバンドルである。 図式 (1.1) の G による商をとると, exact が交換図式

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{L} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M} & \rightarrow & \omega_*\tau \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \omega_*\tau \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

を得る。

$\equiv, \Sigma, \phi$ をそれぞれ $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \pi$ の可微分かつ fibre V_t に沿って正則な section の germ の層とすると

$$0 \rightarrow \equiv \rightarrow \phi \xrightarrow{\mathcal{R}} \psi \rightarrow 0$$

が exact, $\psi \simeq \pi^*\psi^*$ から $\Gamma = \mathcal{R}^+(\pi)$ とおくと

$$(1.3) \quad 0 \rightarrow \equiv \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi \rightarrow 0$$

が exact とはる。列 (1.3) 及 α 図式 (1.2) より exact な可換図式

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Xi & \rightarrow & \Xi & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Sigma & \rightarrow & \Gamma & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Theta & \rightarrow & \Pi & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

を得る。中央の水平列は $0 \rightarrow \Sigma \rightarrow \phi \xrightarrow{\mathbb{R}} \mathcal{V}/\Theta \rightarrow 0$, $k^{-1}(T) = \Gamma$ より生ずる。

この図式 (1.4) より, 列 (0.1) から列 (0.2) を作, π のと同じ方法で, M 上の層 α exact な可換図式

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Xi) & \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Xi) & \rightarrow & 0 \rightarrow \mathcal{H}^1(\Xi) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Sigma) & \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Gamma) & \rightarrow & T_M \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathcal{H}^1(\Sigma) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Theta) & \rightarrow & \mathcal{H}^0(\Pi) & \rightarrow & T_M \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathcal{H}^1(\Theta) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}^1(\Xi) & \rightarrow & \mathcal{H}^1(\Xi) & \rightarrow & 0 \rightarrow \mathcal{H}^2(\Xi) \rightarrow \dots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

を得る。

各バンドルを fibre V_t に制限し π ものを考えることにすると § 0 と同様に V_t 上の exact な可換な cohomology の図式

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & \downarrow & & \downarrow & \vdots \\
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & H^1(V_t, \Xi_t) \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \rightarrow & (T_M)_t & \xrightarrow{\eta_t} & H^1(V_t, \Sigma_t) \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \rightarrow & (T_M)_t & \xrightarrow{\rho_t} & H^1(V_t, \Theta_t) \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

及び可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 T_M & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{H}^1(\Sigma) \\
 \downarrow r_t & & \downarrow r_t \\
 (T_M)_t & \xrightarrow{\eta_t} & H^1(V_t, \Sigma_t)
 \end{array}$$

を得る。

この η 及び η_t は §0 の ρ, ρ_t に対応するもの η 、同様の事柄が成り立つ。

定義 1.2 複素バンドルの可微分族 $B \xrightarrow{\pi} V \xrightarrow{\omega} M$ が *locally trivial* であるとは、 M の任意の点 0 に対し適当な 0 の近傍 U があつて、 B の $\omega^{-1}(U)$ への制限 $B|_{\omega^{-1}(U)}$ と $B \times U$ とより $(\pi\omega)^{-1}(0) \times U$ が C^∞ -bundle として同型、しかも $B|_{\omega^{-1}(U)} \rightarrow B \times U$ の C^∞ -同型写像が fibre V_t 上では *biregular bundle map* となることである。

定理 1.1a [34.I] $B \xrightarrow{\pi} V \xrightarrow{\omega} M$ が複素バンドルの可微分族とする。 $V \xrightarrow{\omega} M$ の fibre V_t がコンパクトならば、 $B \xrightarrow{\pi} V \xrightarrow{\omega} M$ が *locally trivial* であるための必要十分条件は $\eta = 0$ とは等しいことである。ただし η は B の Ξ -バンドルより得られる図式 (1.5) で定義されたものである。

定理 1.16 [34.I] $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ の fibre V_t がコンパクトとする。
 $\dim H^1(V_t, \Sigma_t)$ が定数の時任意の t に対し $\eta_t = 0$ ならば
 $\eta = 0$ である。

系 $H^1(V_0, \Sigma_0) = 0$ ($0 \in M$) ならば 0 の適当な近傍 U があ
 z , $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ の U への制限が *locally trivial* である。

この系は $\mathcal{B}_0 \xrightarrow{\pi_0} V_0$ のみの構造による *locally trivial* の判定
を可能にする。 M の複素構造及び複素バンドルの可微分族が
複素解析的族になるための条件については次のようなことが
言える。

定理 1.2 [47] $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ が複素バンドルの可微分族,
 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ の fibre はコンパクト, $\dim H^1(V_t, \Sigma_t)$ が定数の時,
 $\eta_t: (TM)_t \rightarrow H^1(V_t, \Sigma_t)$ が injective かつ $\eta_t((TM)_t)$ が $H^1(V_t, \mathbb{C})$
の複素部分空間であるならば, M に複素構造があり, 任意
の解析的局所座標 $(\tau^1, \dots, \tau^p, \dots, \tau^m)$ に対し $\eta_t(\frac{\partial}{\partial \tau^p}) = 0$ と
なる。このような複素構造は唯一つ定まる。

定理 1.3 [47] $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ が複素バンドルの可微分族,
 $\mathcal{V} \rightarrow M$ の fibre はコンパクト, $\dim H^1(V_t, \Sigma_t)$ が定数であ
るとする。 M が複素構造をもつ, γ の解析的局所座標 $(\tau^1, \dots,$
 $\tau^p, \dots, \tau^m)$ に対し $\eta_t(\frac{\partial}{\partial \tau^p}) = 0$ ($t \in M$) ならば M の任意の
点に対し, 適当な近傍 U があ, z $\mathcal{B}$ の U への制限 $\mathcal{B}|_{\pi^{-1}(U)}$
 $\xrightarrow{\pi} \mathcal{V}|_U \xrightarrow{\pi} U$ が解析的族となる。

$\mathcal{V} \rightarrow V \times M$ の時は $\rho=0$ だから図式(1.5)により $\gamma(T_M) \subset \mathcal{H}'(\Xi)$ である。従ってこの時 γ は $T_M \rightarrow \mathcal{H}'(\Xi)$ の写像 τ に引き上げられ、この τ について定理 1.1, 定理 1.2, 定理 1.3 と同様のことが成り立つ。

§ 2. 射影空間への写像の拡張

$\mathcal{V} \rightarrow M$ をコンパクトな複素多様体の可微分族, $\phi \in V_0 = \mathcal{V}^{-1}(0)$ ($0 \in M$) から ℓ 次元射影空間 $P = P_\ell(\mathbb{C})$ への正則写像 z , その像は P の超平面には含まれていないものとする。この時ある種の条件の下で $0 \in M$ の近傍 U が存在して ϕ が $\mathcal{V}|_U = \mathcal{V}^{-1}(U)$ から P への可微分族 ϕ の各 fibre V_t への制限が解析的な写像に拡張出来ることを示す。

$P = P_\ell(\mathbb{C})$ の異なる各点座標を $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell)$, $\mathcal{U}_\nu = \{\zeta : \zeta_\nu \neq 0\}$, $e_{\lambda\nu}(\zeta) = \zeta_\nu / \zeta_\lambda$ ($\zeta \in \mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\nu$) とすると $\{e_{\lambda\nu}(\zeta)\}_{\lambda, \nu=0, 1, \dots, \ell}$ は P 上の複素直線バンドル B を定める。バンドル B の ϕ による引き戻し、つまり $x \in \phi_0^{-1}(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{U}_\nu)$ に対して $e_{\lambda\nu}(x) = e_{\lambda\nu}(\phi(x))$ によって定義されるバンドル $\phi_0^*(B)$ を B_0 とする。

V_0 から $P = P_\ell(\mathbb{C})$ への正則写像を

$$\phi_0(x) = (\phi_{0j_0}(x), \phi_{0j_1}(x), \dots, \phi_{0j_{\ell-1}}(x), \phi_{0j_\ell}(x)) \quad (x \in \phi_0^{-1}(\mathcal{U}_{j_\ell}))$$

とすると $\phi_0^{-1}(\mathcal{U}_\lambda) \cap \phi_0^{-1}(\mathcal{U}_\nu)$ で

$$\phi_{0j_\lambda}(x) = e_{\lambda\nu}(x) \phi_{0j_\nu}(x)$$

である。従って、各 $j=0, 1, \dots, l$ に対して $\{\varphi_{0j\lambda}\}_{\lambda=0, 1, \dots, l}$ は B_0 の解析的 cross-section である。以後 ϕ_0 はこの section によって

$$\phi_0(x) = (\varphi_{00}(x), \varphi_{01}(x), \dots, \varphi_{0l}(x))$$

と書くことにする。 ϕ_0 の $\mathcal{V}|U$ への拡張 ϕ があって、 π とし、

B の $\mathcal{V}|U$ への ϕ による引き戻しを $B = \phi^*(B)$ とすると $B \rightarrow \mathcal{V}|U \rightarrow U$ は複素直線バンドルの可微分族であり、 $V_0 \subset \mathcal{V}$ への制限は B_0 と一致する。また $x \in \phi^{-1}(\mathcal{V}_j)$ に対して

$$\phi(x) = (\varphi_{j0}(x), \varphi_{j1}(x), \dots, \varphi_{jl}(x))$$

とおくと各 $j=0, 1, \dots, l$ に対して $\{\varphi_{j\lambda}\}_{\lambda=0, 1, \dots, l}$ は B の可微分、

かつ fibre V_t への制限が正則な cross-section であり、 V_0 への制限は B_0 の section $\{\varphi_{0j\lambda}(x)\}_{\lambda=0, 1, \dots, l}$ と一致する。逆に、

$0 \in M$ の近傍 U と複素直線バンドルの可微分族 $B \xrightarrow{\pi} \mathcal{V}|U \xrightarrow{\pi} U$ で V_0 への制限が $\phi_0^*(B) = B_0$ と一致するもの及び B の可微分かつ V_t への制限が正則な cross-section の組 ϕ で、 V_0 への制限が $\phi_0 = (\varphi_{00}, \dots, \varphi_{0l})$ と一致するものが存在すれば、必要ならば U を縮めると ϕ は V_0 への制限が ϕ_0 と一致する $\mathcal{V}|U$ から P への可微分かつ V_t への制限が正則な写像である。

$\mathcal{O}$ を $\mathcal{V}|U$ 上の可微分 π fibre V_t 上への制限が正則な函数の germ の層、 $\mathcal{O}^*$ を集合として $\mathcal{O}$ に属する $\mathcal{O}$ をとらないう函数の germ とすると exact な列

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

を得る. ここに i は inclusion map, e は exponential map $e:$

$f \rightarrow \exp(2\pi i f)$ である. これから exact はコホモロジー - 列

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(\mathcal{V}|_U, \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\iota^*} H^2(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) \rightarrow \cdots$$

が得られる. $H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*)$ は複素直線バンドルの可微分族 $\mathcal{V}$

$\rightarrow \mathcal{V}|_U \rightarrow U$ の同値類と同一視される. 以後 $\mathcal{F} \in H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*)$

を単に $\mathcal{V}|_U$ 上の複素直線バンドルということにする. とすると

U を $\mathcal{V}|_U$ の可微分直線 $\mathcal{V}|_U = X \times U$ となるような十分小さい

な球としておくと任意の q に対して

$$H^q(\mathcal{V}|_U, \mathbb{Z}) \cong H^q(X, \mathbb{Z})$$

となる. Ω_t を V_t 上の正則関数の germ の層, Ω_t^* を Ω_t に対応

する V_t 上の乗法的層とすると

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Omega_t \rightarrow \Omega_t^* \rightarrow 0$$

が exact かつ可換となる. $H^q(V_t, \mathbb{Z}) = H^q(X, \mathbb{Z})$ だから

cohomology が exact, 可換な図式

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^*} H^2(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) \rightarrow \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow \gamma_t & & \downarrow \gamma_t & & \downarrow \gamma_t & & \downarrow \gamma_t \\ \cdots \rightarrow H^1(V_t, \Omega_t) & \xrightarrow{\varepsilon_t^*} & H^1(V_t, \Omega_t^*) & \xrightarrow{\delta_t^*} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_t^*} & H^2(V_t, \Omega_t) \rightarrow \cdots \end{array}$$

を得る. ここに $\parallel$ は恒等写像である.

ϕ_0 を $\mathcal{V}|_U$ に拡張することば V_0 上の複素直線バンドル $\mathcal{B}$ を

$\mathcal{V}|_U$ 上の複素直線バンドル $\mathcal{B}$ に, B の cross-section の組

$\phi_0 = (\phi_{00}, \phi_{01}, \dots, \phi_{02})$ を B の cross-section の組 $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_2)$ に拡張することと同値であったから、この拡張について 2 次の命題がその鍵を与える。

命題 2.1 [34.I] $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ が定数であるとする
 と、 $C \in H^2(X, \mathbb{Z})$ に対し $\mathcal{U}$ 上の複素直線バンドル $\mathcal{F} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 2° $\delta^*(\mathcal{F}) = C$ となるものが存在するための必要十分条件は
 $\ell_t^*(C) = 0$ が全 $t \in U$ について成り立つことである。

命題 2.2 [34.I] $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ が定数であるとする。
 B_0 を V_0 上の複素直線バンドル、 $C = \delta^*(B_0)$ を B_0 の characteristic class とすると、 B_0 の $\mathcal{U}$ への拡張である複素直線バンドル $\mathcal{B} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ が存在するための必要十分条件は $\ell_t^*(C) = 0$ が全 $t \in U$ について成り立つことである。

命題 2.3 [34.I] $\mathcal{B}$ を $\mathcal{U}$ 上の複素直線バンドルとすると、もし $\dim H^1(V_t, \Omega(B_t))$ が定数ならば、 $\mathcal{B}$ の $V_0 = \omega^{-1}(0)$ ($0 \in U$) への制限 B_0 の正則な cross-section は $\mathcal{B}$ の可微分かつ $\mathcal{U} \rightarrow U$ の fibre V_t への制限が正則な cross-section に拡張される。

上の命題により、次元の上半連続性を使えば、 $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ を複素多様体の可微分族とする時コンパクトな複素多様体 $V_0 = \omega^{-1}(0)$ ($0 \in M$) から射影空間 $P = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ への正則写像 ϕ_0 を、 $\mathcal{V}/U$ から P への可微分 $\mathcal{V}/U \xrightarrow{\pi} U$ の fibre V_t への制限が正則な写像 ϕ へ拡張することに関し 2 次の定理を得る。

定理 2.1 [34.I] $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ が定数であるとすると、もし全ての $t \in U$ に対して $L_t^*(C) = 0$, しかも $H^1(V_0, \Omega(B_0)) = 0$ ならば、 U が十分小さいとき $\phi_0: V_0 \rightarrow P_2(C)$ は上の意味で $\phi: \mathcal{V}|_U \rightarrow P_2(C)$ に拡張される。

定理 2.2 [34.I] $H^2(V_0, \Omega_0) = 0$, $H^1(V_0, \Omega(B_0)) = 0$ ならば、十分小さい U に対して $\phi_0: V_0 \rightarrow P_2(C)$ は $\phi: \mathcal{V}|_U \rightarrow P_2(C)$ に拡張される。

[34.III] によると Kähler 多様体の微小変形は又 Kähler 多様体であり、また複素多様体の可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} M$ の fibre がすべて Kähler 多様体である時 $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ は定数であるから、次の結果を得る。

定理 2.3 [34.I] $V_0 = \omega^{-1}(0)$, $0 \in M$ がコンパクト Kähler 多様体であると (I) $H^1(V_0, \Omega(B_0)) = 0$, (II) 任意の $t \in U$ に対して $L_t^*(C) = 0$ ならば、 U が十分小さい時 $\phi_0: V_0 \rightarrow P_2(C)$ は $\phi: \mathcal{V}|_U \rightarrow P_2(C)$ に拡張出来る。なお条件 (II) は B_0 の characteristic class $C = c(B_0)$ が V_0 の first Chern class C_1 の有理数倍で表される。

§3. 部分多様体の変形

この § ではパラコンパクト複素多様体のコンパクト部分多様体かどうかという微小変形と許すかという問題を扱う。今迄

は解析的同型で移るものは同一視した。以後 W の部分多様体として異なるものは違うものと考える。

定義 3.1 W をパラコンパクト複素多様体, M を複素多様体, ψ を複素多様体 $W \times M$ の解析的部分多様体とする。もしも $\psi \xrightarrow{\pi} M$ (π は $W \times M$ から M への射影 π の ψ への制限) がコンパクト複素多様体の解析的変形であるから, これは W の複素部分多様体の解析的族といふ $(W, \psi \xrightarrow{\pi} M)$ であるか有ことにする。

上の定義で $\psi \xrightarrow{\pi} M$ の fibre V_t は $W_t = \pi^{-1}(t) \in W$ と同一視して, そのまま W の部分多様体と考えられる。従って ψ は W の部分多様体の解析的族である。

$\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$ を $\psi \rightarrow M$ に対して 0 で定義されたバンドル, ψ から W への自然な射影 p による W の解析的接バンドルの ψ への引き戻し $\mathcal{L}$, $\mathcal{N} = \mathcal{L}/\mathcal{F}$, つまり $\mathcal{N}$ を W の各部分多様体 V_t の normal bundle N_t の解析的族とすると, ψ の解析的接バンドル $\mathcal{E}$ は, p によって, そのまま $\mathcal{L}$ の subbundle と考えられるから

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{T} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{N} \rightarrow 0 \end{array}$$

が exact, 可換である。

三, ψ とそれと $\mathcal{L}$ 及び $\mathcal{N}$ の正則な section の germ の層と

すると, Π, T は $\equiv, \psi$ の部分層と考えられるから

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Theta & \rightarrow & \Pi & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Theta & \xrightarrow{\iota} & \equiv & \rightarrow & \psi \rightarrow 0 \end{array}$$

が exact, 可換となる. $\S 1.2 \S 0$ と同様に $\S 2 M$ 上の cohomology の germ の層の exact な可換な図式

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & T_M & \rightarrow & \mathcal{H}'(\Theta) & \rightarrow & \mathcal{H}'(\Pi) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\ \cdots \rightarrow & \mathcal{H}^0(\psi) & \rightarrow & \mathcal{H}'(\Theta) & \xrightarrow{\iota^*} & \mathcal{H}'(\equiv) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

を得る. 各バンドルを $\psi \xrightarrow{\omega} M$ の fibre V_t に制限しおくと.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & (T_M)_t & \xrightarrow{P_t} & H'(V_t, \Theta_t) & \rightarrow & H'(V_t, \Pi_t) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow P_{d,t} & & \parallel & & \downarrow & \\ \cdots \rightarrow & H^0(V_t, \psi_t) & \rightarrow & H'(V_t, \Theta_t) & \rightarrow & H'(V_t, \equiv_t) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

が exact, 可換な cohomology 列であり次の図式も可換となる.

$$\begin{array}{ccc} (T_M) & \xrightarrow{\gamma_t} & (T_M)_t \\ \downarrow P_d & & \downarrow P_{d,t} \\ \mathcal{H}^0(\psi) & \rightarrow & H^0(V_t, \psi_t) \end{array}$$

この P_d -写像が P, γ に対応する性質をもう. 即ち

定理 3.1a W のコンパクト部分多様体の変形族 $(W, \psi \xrightarrow{\omega} M)$ が trivial である為の, 即ち任意の $t \in M$ に対し V_t が W の部分多様体とし $V_0 = \omega^{-1}(0), (0 \in M)$ に等しいための必要十分条件は層の準同型写像とし $P_d = 0$ となることである.

定理 3.1b 全ての $t \in M$ に対し $P_{d,t} = 0$ ならば, $P_d = 0$ である. 従ってこの時 $(W, \psi \rightarrow M)$ は trivial である. $P_{d,t}$ の場合コホモロジーの次元に関する条件は要らない.

系 $H^0(V_0, \psi_0) = 0$ ($0 \in M$) はらば $(W, \psi \rightarrow M)$ は *trivial* である。つまり V_0 の *normal bundle* が正則な *cross-section* ε_0 以外にもたなければ V_0 の解析的微小変形は存在しない。

$P_{d,t}$ は明らかに M の t における接空間 $(T_M)_t$ から $H^0(V_t, \psi_t)$ への線型写像であり、その像 $P_{d,t}((T_M)_t)$ は族 $(W, \psi \rightarrow M)$ の V_t における *characteristic system* と見られる。 $P_{d,t}((T_M)_t)$ が $H^0(V_t, \psi_t)$ と一致するとき、この *characteristic system* は *complete* であるという。

族 $(W, \psi \rightarrow M)$ についてのもう一つの重要な事柄は $(W, \psi \rightarrow M)$ が他の族 $(W, \psi' \rightarrow M')$ に含まれるかどうか、つまり $(W, \psi \rightarrow M)$ が *maximal* であるかどうかである。即ち

定義 3.2 W のコンパクト部分多様体の変形 $(W, \psi \rightarrow M)$ が $t_0 \in M$ で *maximal* であるとは、 $\psi^{-1}(\delta_0) = V_{t_0}$ であるような、任意の変形 $(W, \psi' \rightarrow M')$ に対し $\delta_0 \in M'$ の近傍 U' と、 U' から M の中への解析的写像 $h: \delta \rightarrow h(\delta)$ で $h(\delta_0) = t_0$ 、 $V_{\delta} = V_{h(\delta)}$ を満たすものが存在すること、つまり $(W, \psi|_{U'} \rightarrow U')$ が $h: U' \rightarrow M$ によつて $(W, \psi \rightarrow M)$ から *induce* されたものであることをいう。ここには $V_{\delta} = V_t$ は V_{δ} と V_t が W の同じ部分多様体であることを示す。

次の定理は族が *maximal* であるための十分条件を与える。

定理 3.2 [40] $(W, \psi \rightarrow M)$ を複素多様体 W のコンパクト

コンパクト多様体の解析的族とする。 $M \ni 0$ に対し $\rho_t: (TM)_0 \rightarrow H^0(V_0, \psi_0)$ が上への同型写像ならば、族 $(W, \nu \xrightarrow{\varpi} M)$ は $t=0$ で maximal である。

Maximal な族, ある ν は characteristic system が complete な族の存在に關しては次のようにある。

定理 3.3 [40] V_0 が W のコンパクト部分多様体で, $H^1(V_0, \psi_0) = 0$ であるとする。ここに ψ_0 は V_0 の normal bundle の解析的 section の germ の層である。この時適当な変形族 $(W, \nu \xrightarrow{\varpi} M)$ で $V_0 = \varpi^{-1}(0)$ ($0 \in M$), しかも M の全 t の奥に對して $\rho_t: (TM)_t \rightarrow H^0(V_t, \psi_t)$ が上への同型写像であるものが存在する。この族 $(W, \nu \xrightarrow{\varpi} M)$ は $t \in M$ で maximal であり、しかも ν の characteristic system は complete である。

V_0 が W の余次元 1 のコンパクト部分多様体のおとよ、 V_0 の局所的最小方程式を $S_j(w)$ $w \in U_j$, ($\{U_j\}$ は W の適当な被覆) とすると、 $g_{jk}(w) = S_j(w)/S_k(w)$ ($w \in U_j \cap U_k$) により W 上の複素直線バンドルが決定される。このバンドルを $[V_0]$, $[V_0]$ の V_0 上への制限を $[V_0]_{V_0}$ とおくと、 V_0 の normal bundle N_0 は $[V_0]_{V_0}$ と一致する。 $[V_0]$ の正則な section の germ の層を $\Omega([V_0])$, V_0 の normal bundle N の正則な section の germ の層を ψ_0 とすると、 $[V_0]_{V_0} = N_0$ 故に $\Omega([V_0])$ から ψ_0 への制限写像 γ_0 があって、 γ_0 は cohomology の写像 $\gamma_0^*: H^1(W, \Omega([V_0])) \rightarrow H^1(V_0, \psi_0)$ と

induce する.

定義 3.2 V_0 が W の部分多様体であるとき、上で定義される $\gamma_0^*: H^1(W, \Omega([V_0])) \rightarrow H^1(V_0, \psi_0)$ が C -写像ならば、 V_0 を *semi-regular* と言う.

余次元 1 の部分多様体の族については、定理 3.3 と含み次の結果が得られる.

定理 3.4 [長] W の余次元 1 のコンパクト部分多様体 V_0 が *semi-regular* ならば、 W のコンパクト部分多様体の変形族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M)$ で、 $V_0 = \pi^{-1}(0)$ ($0 \in M$)、しかも任意の $t \in M$ に対し $\rho_{X,t}: (T_n)_t$ から $H^0(V_t, \psi_t)$ の上への同型写像があるものが存在する. この族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M)$ は全ての $t \in M$ で *maximal*. しかもその *characteristic system* は *complete* である.

§ 4. 部分多様体の *stability*

複素多様体 W_0 のコンパクト部分多様体 V_0 が *stable* であるという概念は、 W_0 の複素構造の小変形は変形 ρ_t が V_0 の近傍のそれを変えないという *strong stability* と W_0 の複素構造の小変形によらず V_0 が消え去らばいいという *weak stability* (又は単に *stability*) の二つがあるが、ここでは後者の *stability* を取扱う.

定義 4. V_0 を複素多様体 W_0 の部分多様体とする. V_0 が次の条件を満たすとき、 V_0 は W_0 の *stable* な部分多様体であるとい

$\omega: W \xrightarrow{\omega} M$ と $\omega^{-1}(0) = W_0$ であるような複素多様体の任意の解析的族とすると, W の適当な部分多様体 V で, $V \cap W_0 = V_0$, しかも $V \xrightarrow{\omega} M$ がやはり複素多様体の解析的族となるようなものが存在する.

定理 4. [41] V_0 を W_0 のコンパクト部分多様体, ψ_0 を V_0 の *normal bundle* の正則な *section* の *germ* の層とするともし $H^1(V_0, \psi_0) = 0$ ならば V_0 は W_0 の *stable* な部分多様体である.

例 三次元射影空間 $P_3(\mathbb{C})$ の d 次の曲面は $d=3$ の時, 27本の直線を含むが, $d \geq 4$ の時は特別なものを除いて直線を含まない. W_0 として直線を含む特別な4次の曲面をとり V_0 をその直線とすると, V_0 は *stable* ではない. なお W_0 が3次の曲面, V_0 がそれに含まれる直線の一つの場合は $H^1(V_0, \psi_0) = 0$ であるが, V_0 は *stable* とはならない.