

氏 名	うえ の こう へい 上 野 康 平
学位(専攻分野)	博 士 (人間・環境学)
学 位 記 番 号	人 博 第 412 号
学位授与の日付	平 成 20 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	人 間 ・ 環 境 学 研 究 科 共 生 人 間 学 専 攻
学 位 論 文 題 目	Symmetries of Julia sets in higher dimensions (高次元におけるジュリア集合の対称性)

論文調査委員 (主 査) 教 授 宇 敷 重 廣 教 授 森 本 芳 則 准教授 木 坂 正 史

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、高次元複素力学系のジュリア集合が持つ対称性に関する研究結果をまとめたものである。複素力学系は、複素多様体からそれ自身への複素正則写像の反復合成によって定義される。あるいは簡単に、複素多様体からそれ自身への正則写像を複素力学系という。ジュリア集合は、複素多様体の部分集合で、その各点が、そのうえで複素力学系を定義する写像の反復合成写像のなす写像族が同等連続とならないような近傍をもつものとして定義される閉集合である。その補集合をファトゥ集合という。

複素多様体の自己同型写像からなる群を変換群ということにする。ある変換群の全ての元がジュリア集合をそれ自身にうつすとき、ジュリア集合は、その変換群の対称性をもつという。複素力学系が、複素多様体の同型写像のなす変換群と可換であれば、ジュリア集合もその変換群のもとでそのジュリア集合自身にうつされるので同型になる。したがって、複素力学系のもつ対称性からジュリア集合の対称性が従う。この論文で考察されているのは、まず、そのような対称性をもつ複素力学系で、自明でないものが存在するのかという問題と、ジュリア集合の集合としての対称性から、そのジュリア集合を定める複素力学系の対称性が導かれるのか、またそのとき一つのジュリア集合に対して、そのジュリア集合を定める複素力学系は本質的に一意なのか、という問題である。

第1章では、あらゆる次元の複素射影空間において、自明でない対称性をもつ正則写像のうちで、もっとも基本的なものをとりあげ、その複素力学系の構造とジュリア集合の基本的性質を解明した。スコット・クラスは、任意の自然数 k に対し、 $(k+2)$ 次対称群の作用と可換となる、 k 次元複素射影空間上の複素力学系を構成した。申請者は、この章において、スコット・クラスの複素力学系のファトゥ集合は超吸引不動点の吸引領域からなることを示し、そのジュリア集合は、力学系理論でいう、いわゆる公理Aを満たすことを明らかにした。

$(k+2)$ 次対称群は、 $(k+2)$ 次元の複素数ベクトル空間には変数の並べ換えとして、自然に作用する。成分の和が零になるベクトルたちは $(k+1)$ 次元の部分ベクトル空間をなす。 $(k+2)$ 次対称群の作用はこの部分空間への作用と見なす事ができ、自然に k 次元複素射影空間への作用を誘導する。こうして、 k 次元複素射影空間への $(k+2)$ 次対称群の作用が定義される。対称群の元は複素射影空間の同型写像に対応する。

対称群の部分群の作用のもとで不変な複素射影部分空間（以下、部分空間という）は対称群の元によって同様の部分空間にうつされるが、この群と可換な複素力学系もまたこうした部分空間を同様の部分空間にうつす。とくに、正則写像の臨界点集合は、対称群のもとで不変な集合になる。しかし、対称群のもとで不変な集合を臨界点集合として持つ複素力学系が存在するかどうかは明らかでない。特定の2個だけを交換する、互換と呼ばれる置換は、恒等置換とともに、位数2の部分群をなすが、この部分群のもとで動かない点全体は部分空間をなす。こうした部分空間を臨界点集合とする複素力学系で、最も次数の低いものは $(k+3)$ 次の正則写像で唯一つ存在する。これを、スコット・クラスが決定したが、その複素力学系としての構造は計算機による推測として、ファトゥ集合は超吸引不動点の吸引領域からなることと、ジュリア集合は公理Aを

みたすことが予想されていた。

この論文では、対称群の対称性をもつ複素力学系の諸性質から、臨界点集合に関する性質を抽出し、対称性を持たなくても、ファトゥ集合が超吸引不動点の吸引領域からなり、ジュリア集合が公理Aを満たすような十分条件を発見し、高次元複素力学系の部分複素力学系を取り出して、中間次元の部分複素力学系の全てがこの性質をもつことを示し、帰納法による証明に成功した。

第2章では、第2ジュリア集合と呼ばれるものの対称性について考察する。1次元複素力学系においてはジュリア集合の概念はただ一つであるが、多次元複素力学系では、中間次元のジュリア集合を考えねばならない。各整数次元に対応するジュリア集合の概念が、カレントとよばれるある種の超関数の双対概念を通じて定義される。2次元の複素力学系では、一番次元の低いものとして第2ジュリア集合が定義される。この論文においては、2次元複素力学系のうち、正則な歪積多項式写像のもつ対称性を解明した。

歪積多項式写像とは、2変数2次元の写像の第1成分が第1変数にのみ依存する多項式写像である。また、それが正則とは、その多項式写像が複素射影空間に正則に拡張できるものである事を意味する。第2ジュリア集合は、あらゆる方向に反発的となる周期点たちの閉包としても定義される。この論文では、対称性として考える2次元複素平面の変換としては、歪積型のアフィン変換で第2ジュリア集合を保つものからなる群を考察の対象とする。主定理では、正則歪積多項式写像のジュリア集合は、円周と1次元複素力学系のジュリア集合との直積であるか、あるいはそのようなものを、多重に巻いて2次元複素平面に埋め込んだものであるかのいずれかであることを証明し、さらに、それらの標準形として、直積写像からの被覆として半共役複素力学系の形に表せる事を明らかにした。その結果、円周と線分は複数の複素力学系のジュリア集合になりうるが、こうした例外を除いては、歪積多項式写像たちが、同一のジュリア集合を持つとき、それらは本質的に同一の複素力学系であるという結論が得られた。

論文審査の結果の要旨

本論文は、対称性を持つ高次元複素力学系のジュリア集合の構造と、対称性を持つジュリア集合を持つ複素力学系に関する研究結果をまとめたものである。

米国の数学者スコット・クラスは、任意の次元の複素射影空間に対し、その次元より2だけ次数の高い対称群の作用のもとで不変な複素力学系を構成した。しかし、その力学系としての性質、不変集合の構造については、憶測にとどまっていた。

第1章において、スコット・クラスが発見した複素力学系について考察し、そのファトゥ集合は超吸引不動点の吸引領域からなることを示し、そのジュリア集合は、力学系理論でいう、いわゆる公理Aを満たすことを明らかにした。

この複素力学系は、臨界後有限という性質を持つ、きわめて特殊な、しかも対称性を持つものであるが、高次元の複素力学系で、そのファトゥ集合やジュリア集合の構造および性質が解明されているのは、ほとんど自明なもの、あるいは1次元複素力学系の直積として容易に理解されるもの以外には、フォルナエスとシボニーが解明した2次元の臨界後有限なものだけであった。彼らの手法は2次元の場合にしか適用できず、3次元以上の高次元については本論文の結果が、初めてのものである。

第1章の結果は、すでに“Publicacions Matemàtiques, Vol.51”に発表されており、2007年春のアメリカ数学会で、スコット・クラス自身がおこなった招待講演において詳しく紹介され、高い評価を得ている。高次元複素力学系の分野のひとつの基礎となる基本的結果である。

第2章では、第2ジュリア集合と呼ばれるものの対称性について考察している。この論文においては、2次元複素力学系のうち、正則な歪積多項式写像のもつ対称性を解明した。

1次元複素力学系に関しては、膨大な研究がなされており、コンピュータ画像の援用もあり、かなり詳しく力学系としての構造が解明されている。1次元複素力学系においては、ジュリア集合の対称性とそれを生成する複素力学系の特徴付けについても、1990年のベアドンの研究にはじまり、すでに解明されており、基本的結果としてしばしば引用される。

しかし、2次元以上の多次元複素力学系に関しては、抽象的な一般論は研究が進んでいるが、具体的な力学系の挙動や不変集合の構造、諸性質はほとんど先行する研究が無い。歪積写像は、1次元複素力学系の直積に2次元的な要素を導入した

ものであり、多次元の複素力学系への橋渡しになるものである。

第2章では、複素力学系としては正則歪積多項式写像に限定し、対称性としては歪積型のアフィン同型写像に限定した結果であるが、可能な対称性の群はすべて2次元トーラスの閉部分群であり、また2次元トーラス群の全ての閉部分群に対してその対称性を持つ歪積多項式写像が存在することを示し、さらに、対称性をもつ第2ジュリア集合に対し、それを実現する複素力学系は、本質的に一意であることを証明した。

多次元複素力学系の具体的な構造の解明への新しい方法としてベットヒャー座標を援用する解析的手法と、群論を利用する代数的手法を組み合わせたもので、手法とともに将来の発展が期待される新しい研究テーマを見いだしている。

よって、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成20年2月1日、論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果、合格と認めた。