

Hall-Janko 群が作用する 14 次元可換非結合代数について

熊本大学・自然科学教育部 松本恭平

Kyohei Matsumoto,

Graduated school of Science and Technology,

Kumamoto University

1 Introduction

Hall-Janko group J_2 は散在型単純群の一種である. Cohen ([3]) によって J_2 が作用する 315 点上の幾何が構成され, その後 Cohen と Tits ([2]) によってその唯一性が証明された.

Theorem 1.1 ([1], p.408). 距離正則グラフ Γ であり, *intersection array* が $\{10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5\}$ となるものが唯一存在する. そのグラフの点集合は 315 個であり *distance-transitive* である. また, このグラフの自己同型群は $J_2:2$ である.

本講究録では, J_2 が作用する $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上 14 次元可換非結合代数 W を構成する. この代数には 315 個の特別な idempotents があり, これらは前述した距離正則グラフをなしている. 最終的に, この idempotents と対応している involutions を構成し W に J_2 が作用することを示す.

2 The definition and some notations

以下,

$$r := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad s := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

とする. W を以下の集合を基底にもつ $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上のベクトル空間とする.

$$\mathcal{B} = \{t, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

Definition 2.1 (inner product). 任意の $k = 0, 1, 2, 3, 4, i = 1, 2, 3, 4$ に対し, 以下のように内積 $(\cdot, \cdot)$ を $\mathcal{B}$ の元に定義し, それを線形に拡張する.

$$(t, t) = 1, (x_k, x_k) = 3, (y_i, y_i) = (z_i, z_i) = 3r^2.$$

また, $u, v \in \mathcal{B}$ に対し, $u \neq v$ ならば $(u, v) = 0$ とする. つまり $\mathcal{B}$ は直交基底である.

次にベクトル空間の元同士に積を定義するが, その前に以下の行列を用意する.

$$K_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, D_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

任意の行列 X に対し, その転置行列を tX と書く. 以上を用いて W に積を定義する.

Definition 2.2 (algebra product). 任意の $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$, また任意の $i, j = 1, 2, 3, 4$ に対し以下のよう $\mathcal{B}$ に積を定義し, それを W に線形に拡張する.

$$\begin{aligned} t^2 &= t, \quad x_k x_l = -3\delta_{kl}t, \quad y_i y_j = \frac{3}{2}r^2\delta_{ij}(t - x_0), \quad z_i z_j = \frac{3}{2}r^2\delta_{ij}(t + x_0), \\ tx_k &= x_k, \quad ty_i = \frac{1}{2}y_i, \quad tz_i = \frac{1}{2}z_i, \quad x_0 y_i = -\frac{3}{2}y_i, \quad x_0 z_i = \frac{3}{2}z_i, \\ x_i \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) &= -\frac{3}{2}(z_1, z_2, z_3, z_4) \cdot K_i, \\ x_i \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\frac{3}{2}(y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot {}^tK_i, \\ y_i \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) &= -\frac{3}{2}r^2(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot D_1 D_i K_i. \end{aligned}$$

任意の $a \in V$, また任意の $\lambda \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に対し,

$$W_\lambda^{(a)} = \{v \in V \mid av = \lambda v\}$$

と表記すると, 上の積の定義から

$$W_1^{(t)} = \langle t \rangle, \quad W_{-1}^{(t)} = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \quad W_{1/2}^{(t)} = \langle y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle$$

となっていることが分かる. つまり

$$W = W_1^{(t)} \oplus W_{-1}^{(t)} \oplus W_{1/2}^{(t)}.$$

また, 直接計算することにより以下も分かる.

Lemma 2.3. 任意の $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対し,

$$(v_1 v_2, v_3) = (v_1, v_2 v_3)$$

が成り立つ. つまり, この内積は結合的である.

3 Idempotents

W の中には特別な 315 個の idempotents がある. 前述した通り, これらは最終的には intersection array が $\{10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5\}$ となる距離正則グラフをなす.

まず, 定義より $t \in V$ は idempotent である. それに加え, 任意の $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対し,

$$t_k^\pm := -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k$$

とおくとこれら 10 個のベクトルは idempotents になる. 実際に

$$(t_k^\pm)^2 = \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k\right)^2 = \frac{1}{4}(-t \pm x_k)^2 = \frac{1}{4}(t \pm 2x_k - 3t) = -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k = t_k^\pm$$

となるので $t_k^\pm$ は idempotent になることが確認できた.

これら 10 個の idempotents を, t と隣接している idempotents (adjacent idempotents) と呼ぶことにする. t と $t_k^\pm$ の距離は 1 ということである. $\Gamma_1(t)$ を t と隣接している idempotents の集合とすると,

$$\Gamma_1(t) = \{t_0^\pm, t_1^\pm, t_2^\pm, t_3^\pm, t_4^\pm\}$$

と表記できる. また, ここまでで手に入った 11 個の idempotents の内積を計算すると,

$$\begin{aligned} (t, t) &= 1, \quad (t_k^+, t_k^+) = \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k\right) \left| -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k \right| = \frac{1}{4}(-t + x_k) \left| -t + x_k \right| \\ &= \frac{1}{4}(1+3) = 1, \\ (t_k^-, t_k^-) &= \left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k\right) \left| -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k \right| = \frac{1}{4}(-t - x_k) \left| -t - x_k \right| \\ &= \frac{1}{4}(1+3) = 1 \end{aligned}$$

となり, 自分自身との内積は 1 になることが分かる. 相異なる idempotents 同士の内積も,

$$\begin{aligned} (t | t_k^\pm) &= \left(t \left| -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k \right| \right) = -\frac{1}{2}, \\ (t_k^+ | t_k^-) &= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k \left| -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k \right| \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 3 = -\frac{1}{2}, \\ (t_k^\pm | t_{k'}^\pm) &= \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k \left| -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_{k'} \right| \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 \pm \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

のように計算できる. (ただし $k = k'$)

4 Automorphisms and distance 2

次に, 前回の章で定義した $t_k^\pm$ と隣接している idempotents を構成する. そのために W の automorphism をいくつか構築する. (V の全単射線形写像 f に対し,

$$(v_1^f, v_2^f) = (v_1, v_2), \quad (v_1 v_2)^f = v_1^f v_2^f$$

が任意の $v_1, v_2 \in V$ に対してなりたつとき f を automorphism という.)

まずは以下のように行列を定義する.

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_0 &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad T^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 4.1. θ^+ を W の全単射線形写像とし, $\mathcal{B}$ に関する表現行列 Θ^+ が

$$\Theta^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T^+ & & & \\ & 0 & rY_0 & 0 \\ & -sY_0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & X_0 \end{pmatrix}$$

であるとする. このとき θ^+ は automorphism になる.

Lemma 4.2. θ^- を W の全単射線形写像とし, $\mathcal{B}$ に関する表現行列 Θ^- が

$$\Theta^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T^- & & & \\ & 0 & 0 & -rY_0X_0 \\ & 0 & X_0 & 0 \\ & sX_0{}^tY_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとする. このとき θ^- は *automorphism* になる.

Lemma 4.3. $\rho \in GL(W)$ を以下のように定義する.

$$\rho : x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_0$$

$$(y_1^\rho \ y_2^\rho \ y_3^\rho \ y_4^\rho \ z_1^\rho \ z_2^\rho \ z_3^\rho \ z_4^\rho) = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4) \begin{pmatrix} A & B \\ -A & B \end{pmatrix},$$

ここで,

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -r & r & -s^2 & -r \\ r & s^2 & r & -r \\ s^2 & -r & -r & -r \\ r & r & -r & s^2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -r & -s^2 & -r & r \\ -r & r & -s^2 & -r \\ -r & -r & r & -s^2 \\ s^2 & -r & -r & -r \end{pmatrix},$$

である. このとき ρ は *automorphism* になり, その位数は 5 になる.

Lemma 4.1-4.3 を使うことによって, 各 $k=0,1,2,3,4$ に対し $t_k^\pm$ と隣接している idempotents を構成できる. 定義から

$$\theta^+ : t \mapsto t_0^+, \quad \theta^- : t \mapsto t_0^-$$

であり, また

$$t^{\theta^\pm \rho^k} = (t_0^\pm)^{\rho^k} = \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0\right)^{\rho^k} = -\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_k = t_k^\pm$$

である. よって,

$$\varphi_k^\pm := \theta^\pm \rho^k$$

とおくと

$$t^{\varphi_k^\pm} = t_k^\pm$$

となる. 以上より, $l=0,1,2,3,4$ に対して,

$$u_{kl}^\pm := (t_l^\pm)^{\varphi_k^+}, \quad v_{kl}^\pm := (t_l^\pm)^{\varphi_k^-}$$

とおくと, これらはそれぞれ t_k^+ , t_k^- と隣接した idempotents になっている.

これらの idempotents が, 今までで手に入れた 11 個の idempotents と異なっているとは限らない. 実際に $l=0$ のときを計算してみると,

$$\begin{aligned} u_{k0}^\pm &= (t_0^\pm)^{\varphi_k^+} = \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0\right)^{\theta^+ \rho^k} = \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0\right)^{\theta^+ \rho^k} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_0\right)^{\rho^k} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_0\right)^{\rho^k} \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k\right) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_k\right) \\ &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}x_k \pm \left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}x_k\right) \end{aligned}$$

となるので

$$u_{k0}^+ = t, \quad u_{k0}^- = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k = t_k^+$$

がいえて,

$$\begin{aligned} v_{k0}^\pm &= (t_0^\pm)^{\varphi_k^\pm} = \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0\right)^{\theta^\mp \rho^k} = \left(-\frac{1}{2}t \pm \frac{1}{2}x_0\right)^{\theta^\mp \rho^k} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_0\right)^{\rho^k} \pm \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_0\right)^{\rho^k} \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}x_k\right) \pm \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}x_k\right) \\ &= \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}x_k \pm \left(-\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}x_k\right) \end{aligned}$$

となるので

$$v_{k0}^+ = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x_k = t_k^+, \quad v_{k0}^- = t$$

がいえる. $l \neq 0$ のときも直接計算すると, 各 $u_{kl}^\pm, v_{kl}^\pm$ たちは $t, t_k^\pm$ と異なることがわかり, 互いに相異なることも分かる. つまりそれら $u_{kl}^\pm, v_{kl}^\pm$ と t との距離は 2 である. $\Gamma_2(t)$ を t との距離が 2 である idempotents の集合とすると,

$$\Gamma_2(t) = \{u_{kl}^\pm, v_{kl}^\pm \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, l = 1, 2, 3, 4\}$$

となり,

$$|\Gamma_2(t)| = 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 80$$

であることも分かる.

5 Distance 3 and 4

同様の議論を繰り返し, $v_{kl}^\pm, u_{kl}^\pm$ と隣接している idempotents を作り続けることを考える. V をそのようにして手に入れた idempotents の集合とし, E を idempotents のペアで, 隣接しているものの集合とする.

Proposition 5.1. $\Gamma := (V, E)$ というグラフを考えると以下が成り立つ.

- (1) Γ の直径は 4,
- (2) $|\Gamma_3(t)| = 160, |\Gamma_4(t)| = 64.$
- (3) このグラフの *intersection array* は $\{10, 8, 8, 2; 1, 1, 4, 5\}$ になる.
したがって, $|V| = 1 + 10 + 80 + 160 + 64 = 315$ となる.

また, 以上のプロセスで手に入れた 315 の idempotents と対応する involutions を構成することができる.

Proposition 5.2. 任意の $a \in V$ に対し, $\tau(a)$ を以下のように定義する全単射線形写像とする.

$$\tau(a) : v \mapsto \begin{cases} v & \text{if } v \in V_1^{(a)} \oplus V_{-1}^{(a)} \\ -v & \text{if } v \in V_{1/2}^{(a)}. \end{cases}$$

このとき $\tau(a)$ は *involution* になる.

任意の $a, a' \in V$ に対し, 内積と $\tau(a)\tau(a')$ の位数には以下のような関係がある

a と a' の距離	0	1	2	3	4
(a, a')	1	$-1/2$	$1/4$	$-1/8$	$(1 \pm 3\sqrt{5})/16$
order of $\tau(a)\tau(a')$	1	2	4	3	5

$G := \langle \tau(a) \rangle_{a \in V}$ という群を考えると，グラフの一意性より Hall-Janko 群が作用するということが分かる．

参考文献

[1] Brouwer, A.E., Cohen, A.M., Neumaier, A.: Distance-Regular Graphs. Modern Surveys in Mathematics. Springer, Berlin (1989)

[2] A. M. Cohen, and J.Tit, On generalized hexagons and a near octagon whose lines have three points, European J. Combin. 6 (1985) 13-27.

[3] A. M. Cohen, Geometries Originating from Certain Distance-Regular Graphs, in Finite Geometries and Designs (eds P. Cameron, J. Hirschfeld and D. Hughes), London Math. Soc. Lecture Notes Set. 49 (1981), 81-87.

[4] A. M. Cohen, A near octagon associated with HI, Report ZN 96,1980, Math. Centrum, Amsterdam.

[5] A. M. Cohen, Finite quaternionic reflection groups, I. Algebra 64 (1980), 293-324.

[6] J. Tits, Quaternions over $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Leech’s lattice, and the sporadic group of Hall-Janko, J. Algebra 63 (1980),56-75.

[7] Yoshiara, S. On the geometry of the Hall-Janko group on 315 points. Geom Dedicata 32, 173201 (1989).

[8] Hall, J. I. and Hall, M., ‘ Geometry of the Hall-Janko Group ’ , Algebras, Groups and Geometries 2 (1985), 390398.

[9] M. Whybrow, An infinite family of axial algebras, J. Algebra 577 (2021)