

Periodic maps on compact surfaces II

上智大理工 横山和夫 (Kazuo Yokoyama)

問題 compact connected な 2 次元多様体 M 上の period n の periodic map を分類せよ!

この問題に完全な解決を与える。すなわち

- (1) どのような条件のとき periodic map は存在するか?
- (2) (同値なものを除いて) いくつあるか?
- (3) 与えられた 2 つの M 上の periodic map が同値であるかどうかを判定する Algorithm を求める。

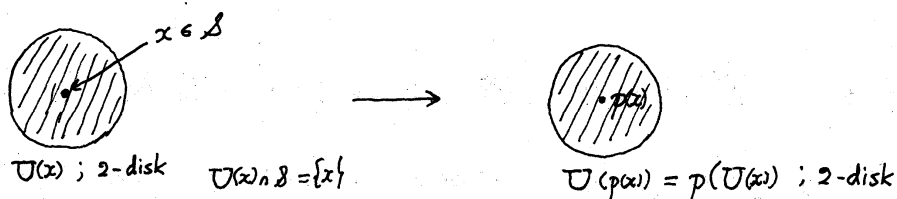
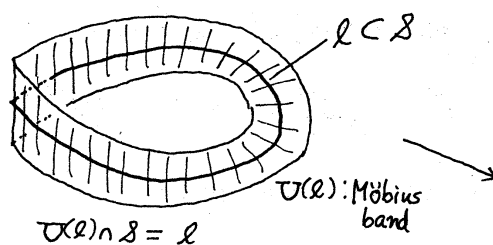
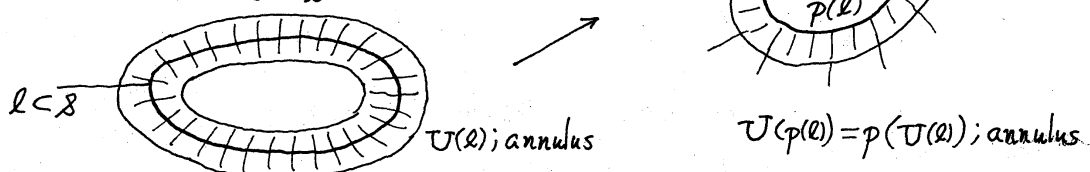
定義 1 M, M' を 2 次元多様体 f を M 上の f' を M' 上の period n の periodic map とするとき, $fh = hf'$ をみたす同相写像 $h: M \rightarrow M'$ が存在するとき f と f' は (あるいは (f, M) と (f', M') は) 同値である といい, $f \sim f'$ ($(f, M) \sim (f', M')$) と表わす。

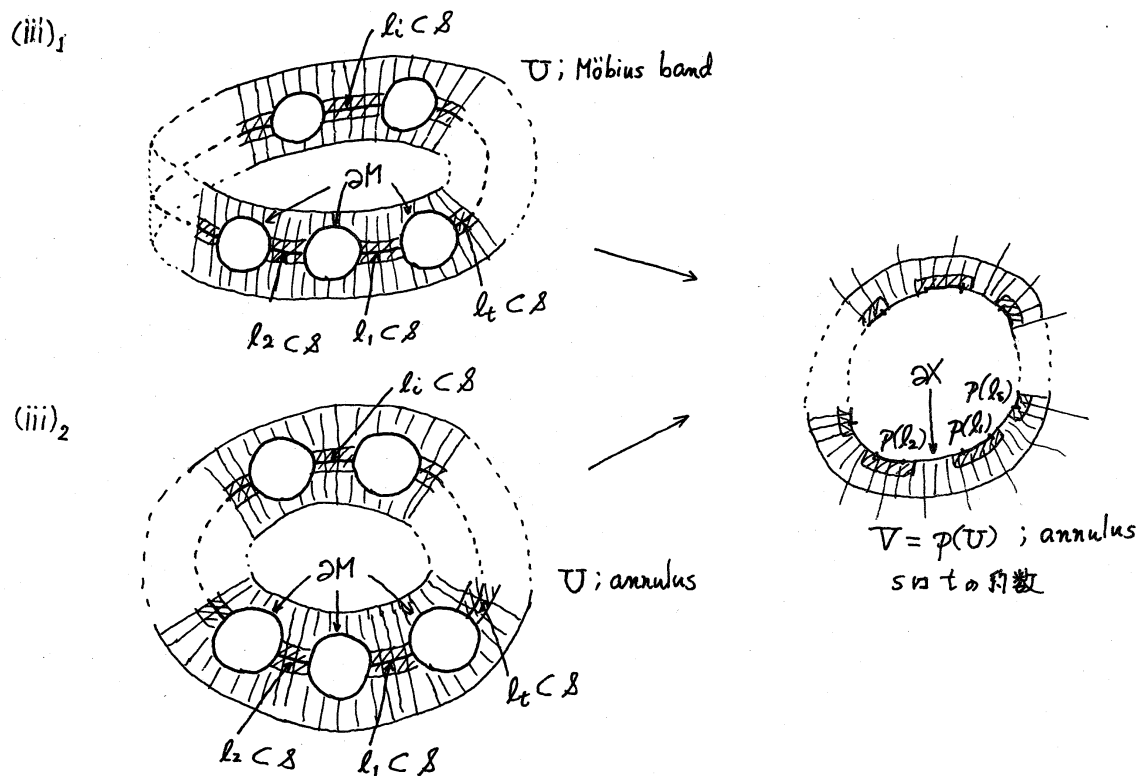
以下 2 次元多様体といえはことわらな限り compact で connected であるとする。

今 f が M 上の period n の periodic map のとき, $\mathcal{S}_k(f) = \{x \in M; f^k(x) = x \text{ かつ } f^i(x) \neq x (1 \leq i < k)\} \quad (1 \leq k < n), \mathcal{S}(f) = \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{S}_k(f)$ とおく. この時 Whyburn [7] により M の f による orbit space $X = M/f$ は 2次元多様体で, canonical map $p: M \rightarrow X$ は $p(\mathcal{S}(f)) = S$ を branched set とする n -fold cyclic branched covering になっている. そして $\mathcal{P}_n(X, S) = \{f: M \rightarrow M; \text{period } n \text{ の periodic map} \mid (1) M/f \cong X \quad (2) \text{ canonical projection } p: M \rightarrow X \text{ の branched set } S \text{ を } n\text{-fold cyclic branched covering}\}$ とおき, $\mathcal{P}_n(X, S) = \mathcal{P}_n(X, S)/\sim$ と表わす.

Prop. 1 $\mathcal{S}(f)$ は 互いに交わらない (i) $\dot{M}$ の孤立点 (ii) $\dot{M}$ の simple loop (iii) simple proper arc をなり, $p: M \rightarrow X$ によっては 近傍も含めて次のようになる.

(i)

(ii)₁(ii)₂

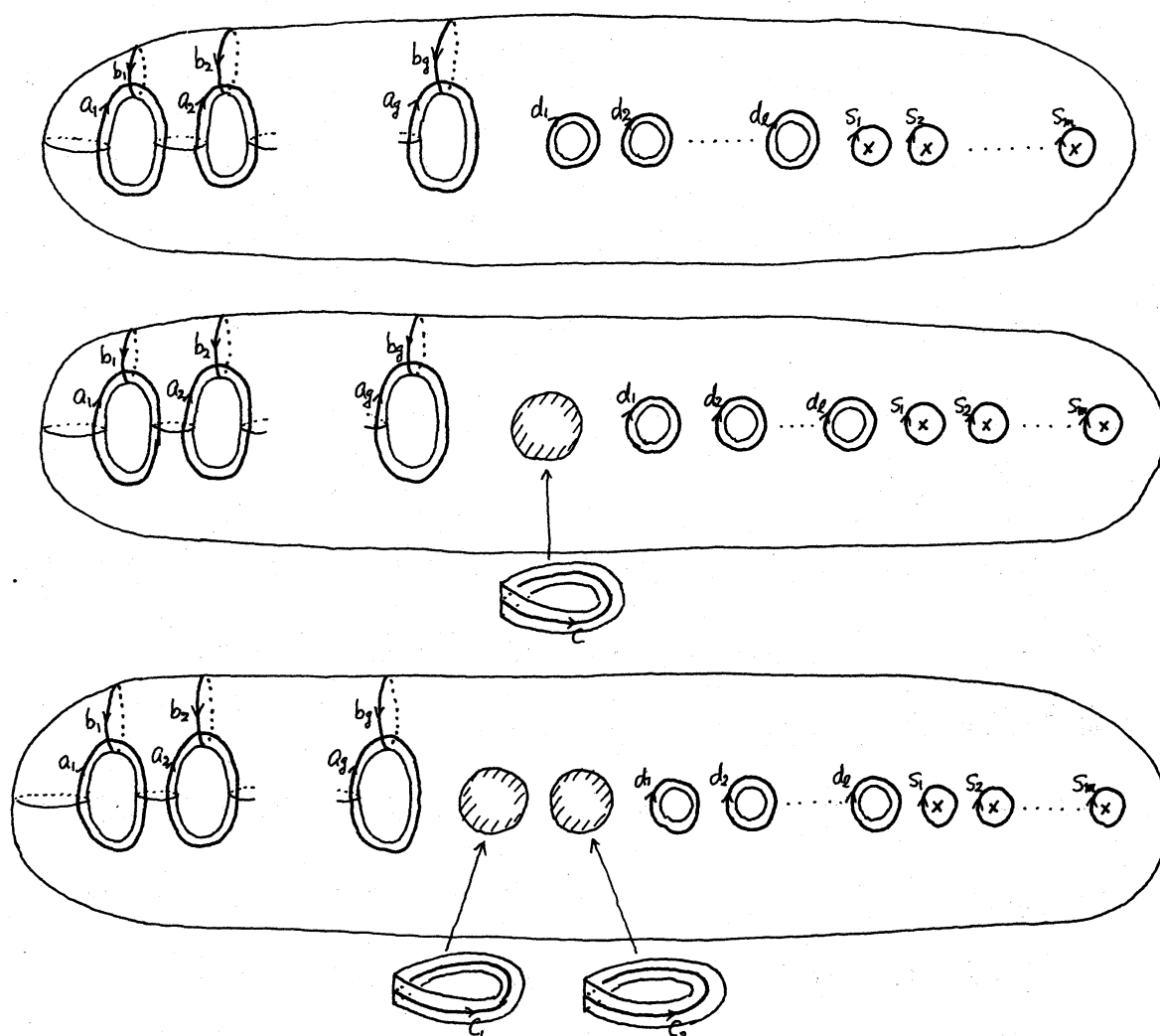


<記号> $\mathcal{S}(f)$ のうち type (i) の点の集合を $\mathcal{S}^0(f)$, type (ii) (iii) の点の集合を $\mathcal{S}^1(f)$ と表ゆす.

§ 1. $\mathcal{S}^1(f) = \emptyset$ の時, $P_n(X, S)$ の同値類の完全代表系。決定

X を genus g の orientable surface (genus $2g+1$ の non-orientable surface) < genus $2g+2$ の non-orientable surface > z : boundary component の数を l , $S^0 = p(\mathcal{S}^0(f))$ の点の個数を m とし z , X 上に $\square$ のように closed curve $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, (c) < c_1, c_2 > , d_1, d_2, \dots, d_l, s_1, s_2, \dots, s_m$ をとるとき

$$H_1(X-S; \mathbb{Z}) = \left\langle \begin{array}{l} a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, (c) < c_1, c_2 > \\ d_1, d_2, \dots, d_l, s_1, s_2, \dots, s_m \end{array} \right| \begin{array}{l} (2c) < 2c_1 + 2c_2 > \\ d_1 + d_2 + \dots + d_l + s_1 \\ + s_2 + \dots + s_m = 0 \end{array} \right\rangle$$



さて $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ を $H_1(X-S)$ から $\mathbb{Z}_n$ の上への準同型写像 ω で $\omega(S_i) \neq 0$ をみたすものの集合とするととき, Smith [5] と branched covering の性質によって

Prop. 2 $\mathcal{P}_n(X, S)$ と $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類は一対一の対応する。

定義 2 $\omega_1, \omega_2 \in [H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ に対して, 同相写像 $h: (X, S) \longrightarrow (X, S)$ が存在して $h_* = (h|_{X-S})_*$ とおくとき,

$\omega_2 h_* = \omega_1$ をみたすとき ω_1 と ω_2 は A-同値 といふ。

$\omega \in [H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ が与えられた時, $\omega(a_i) = \alpha_i$, $\omega(b_i) = \beta_i$
 $(\omega(c) = \gamma) < \omega(c_1) = \gamma_1, \omega(c_2) = \gamma_2 >$, $\omega(d_j) = \delta_j$, $\omega(S_k) = \theta_k$
 となる時, ω を $\mathbb{Z}_n$ の元の組 (下の条件をみたす)

$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, (\gamma) < \gamma_1, \gamma_2 >, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$
 で表わすことにする。(逆にこの $\mathbb{Z}_n$ の元の組が与えられれば
 ω は一意に決まる。)

$$* (2\gamma +) < 2\gamma_1 + 2\gamma_2 > \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n}$$

* $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, (\gamma) < \gamma_1, \gamma_2 >, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$
 の最大公約数は $\text{mod } n$ で 1 である。

この時 [2][3][6] によ, て ([8][9][11] 参照)

Prop 3 X が orientable の時 (X, S) の Homotopy group の generator
 は $\rho, \rho_{12}, \tau_1, \mu_1, \theta_{12}, \eta, \partial_j, \sigma_k, \partial_a, \sigma_a$, である。

Prop 4 X が genus $2g+1$ の non-orientable surface の時 (X, S) の
 Homotopy group の generator は $\rho, \rho_{12}, \tau_1, \mu_1, \theta_{12}, \gamma_1, \partial_j, \sigma_k,$
 $\partial_a, \sigma_a, \partial_s, \sigma_s$ である。

Prop 5 X が genus $2g+2$ の non-orientable surface の時 (X, S) の
 Homotopy group の generator は $\rho, \rho_{12}, \tau_1, \mu_1, \theta_{12}, \gamma_2, \partial_1, \partial_2,$
 $\partial_j, \sigma_k, \partial_a, \sigma_a, \partial_{s_1}, \partial_{s_2}, \sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}$ である。

これらの結果を使うと $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A-同値類の完全代表系は次の
 ようになる。([8][9][11] 参照)

定理 1 X compact orientable surface of genus g の時

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_\ell < n, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < n \quad \text{--- } \textcircled{1} \\ \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{--- } \textcircled{2} \end{array} \right\} / \sim$$

if $g \geq 1$;

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \text{g.c.d.} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} / \sim$$

if $g = 0$.

定義 3 (i) $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \sim_\eta (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_\ell, \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)$

$$\Leftrightarrow * \delta_j = \delta'_j \Rightarrow \theta_k = \theta'_k \quad (1 \leq j \leq \ell, 1 \leq k \leq m)$$

$$\text{or } * \begin{cases} \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{\ell_0} = 0 < \delta_{\ell_0+1} \leq \delta_{\ell_0+2} \leq \dots \leq \delta_\ell < n \\ \delta'_1 = \delta'_2 = \dots = \delta'_{\ell'_0} = 0 < \delta'_{\ell'_0+1} \leq \delta'_{\ell'_0+2} \leq \dots \leq \delta'_\ell < n \end{cases}$$

$$\text{の 時 } \ell_0 = \ell'_0 \text{ z } n - \delta_j = \delta_{\ell-j+\ell_0+1} \quad (\ell_0+1 \leq j \leq \ell)$$

$$* n - \theta_k = \theta'_{m-k+1} \quad (1 \leq k \leq m)$$

$$(ii) (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \sim_\eta (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_\ell, \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)$$

$$\Leftrightarrow (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \sim_\eta (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_\ell, \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)$$

定理 2 X compact non-orientable surface of genus $2g+1$ の時

(I) n : odd の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系は

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_\ell < \frac{n}{2}, \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < \frac{n}{2} \quad \text{--- } \textcircled{1} \end{array} \right\}$$

$$(2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{--- ②})$$

if $g \geq 1$;

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ \quad \quad \quad \text{①} \quad \quad \text{②} \\ \text{g.c.d. } \{\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

if $g = 0$.

(II) n : even の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系
は 次の集合の disjoint union

$$(i) \quad Z_n(2g+1; l, m)_1^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ \quad \quad \quad \text{①} \quad \quad \text{②} \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+1; l, m)_1^* = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ \quad \quad \quad \delta_\ell = \frac{n}{2} \text{ or } \theta_m = \frac{n}{2} \quad , \quad 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \quad \text{--- ③} \\ \quad \quad \quad 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_\ell \leq \frac{n}{2} \quad , \quad 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \quad \text{--- ④} \\ \quad \quad \quad \text{②} \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+1; l, m)_2^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ \quad \quad \quad \gamma ; \text{ odd} \quad , \quad \delta_j ; \text{ even} \quad , \quad \theta_k ; \text{ even} \quad \text{--- ④} \\ \quad \quad \quad \text{①} \quad , \quad \text{②} \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+1; l, m)_2^* = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) ; \\ \quad \quad \quad \text{①}' \quad \text{②} \quad \text{③} \quad \text{④} \end{array} \right\}$$

if $g \geq 1$;

$$(ii) \quad \begin{aligned} Z_n(1; l, m)^{\circ} &= \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \text{g.c.d.} \{ \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \\ Z_n(1; l, m)^{*} &= \left\{ \begin{array}{l} (\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{3} \quad \textcircled{1'} \quad \textcircled{2} \\ \text{g.c.d.} \{ \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

定理 3 X is compact non-orientable surface of genus $2g+2$, $g \geq 1$

(I) n : odd の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系は

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underline{0}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right\}$$

(II) n : even の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系は

次の集合の disjoint union

$$Z_n(2g+2; l, m)_1^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underline{0}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+2; l, m)_1^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underline{0}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1'} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+2; l, m)_2^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underline{1}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ 2 + 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

$$Z_n(2g+2; l, m)_2^{*} = \left\{ \begin{array}{l} (2, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underline{1}, \underline{\gamma}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1'} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \\ 2 + 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

定理 4 X is compact non-orientable surface of genus 2 (Klein bottle)

(I) n : odd の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系は

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1} \\ 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < n, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \leq n, \quad 0 \leq \gamma_i \leq \left[\frac{\alpha}{2}\right] \text{ --- } \textcircled{5} \\ 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \text{ --- } \textcircled{6} \\ \text{g.c.d. } \{\gamma_1, \gamma_2, \delta\} = 1 \text{ --- } \textcircled{7} \end{array} \right\}$$

(II) n : even の時 $[H_1(X-S); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系は
次の集合の disjoint union

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n(2; \ell, m)^{\circ} &= \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{7} \end{array} \right\} \\ \mathbb{Z}_n(2; \ell, m)^* &= \left\{ \begin{array}{l} (\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \\ \delta_\ell = \frac{n}{2} \text{ or } \theta_m = \frac{n}{2}, \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < \frac{n}{2}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 \leq \frac{n}{2}, \quad 0 \leq \gamma_i \leq \left[\frac{\alpha}{2}\right] \\ \textcircled{1}' \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{7} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{但し } \delta = \text{g.c.d. } \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, n\}$$

$$\alpha = \text{g.c.d. } \{\delta, \gamma_1 + \gamma_2\}$$

$[x]$ is Gauss 記号

《Notation》

$\mathcal{P}_n = \{ (f, M) ; M ; \text{compact surface} , f ; M \text{ 上 の period } n \text{ の periodic map} , g^t(f) = \phi \}$

$\mathcal{P}_n^+ = \{ (f, M) \in \mathcal{P}_n ; M ; \text{orientable} , f ; \text{orientation preserving} \}$

$$P_n^- = \{ (f, M) ; \quad M ; \text{orientable} \quad f ; \text{orientation reversing} \}$$

$$P_n^0 = \{ (f, M) ; \quad M ; \text{non-orientable} \}$$

Prop. 6 各 ε に対応する $P_n(X, S)$ の元 (f, M) は右の集合に属する.

$$(\text{定理 1}) \quad \varepsilon \text{ に対応する } P_n(X, S) \text{ の元 } (f, M) \longrightarrow P_n^+$$

$$(\text{定理 2}) \quad (\text{I}) \quad n ; \text{odd} \longrightarrow P_n^0$$

$$(\text{II}) \quad n ; \text{even} \quad (\text{i}) \quad g \geq 1 \quad Z_n(2g+1; l, m)_1^0, Z_n(2g+1; l, m)_1^* \longrightarrow P_n^0$$

$$Z_n(2g+1; l, m)_2^0, Z_n(2g+1; l, m)_2^* \longrightarrow P_n^-$$

$$(\text{ii}) \quad g=0 \quad \delta ; \text{odd} \longrightarrow P_n^0$$

$$\delta ; \text{even} \longrightarrow P_n^-$$

$$(\text{定理 3}) \quad (\text{I}) \quad n ; \text{odd} \longrightarrow P_n^0$$

$$(\text{II}) \quad n ; \text{even} \quad Z_n(2g+2; l, m)_1^0, Z_n(2g+2; l, m)_1^* \longrightarrow P_n^0$$

$$Z_n(\quad)_2^0, Z_n(\quad)_2^* \longrightarrow P_n^-$$

$$(\text{定理 4}) \quad (\text{I}) \quad n ; \text{odd} \longrightarrow P_n^0$$

$$(\text{II}) \quad n ; \text{even} \quad \delta ; \text{odd} \text{ or } \delta ; \text{even} \text{ or } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 ; \text{odd} \longrightarrow P_n^0$$

$$\delta ; \text{even} \text{ or } \gamma ; \text{even} \longrightarrow P_n^-$$

$$\text{但し } \delta = \text{g.c.d.} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, n \} . \quad ([9] \text{ 参照})$$

§ 2 $S^1(f) = \phi$ の時の periodic map の分類

この節では § 1 の結果を用いて P_n の分類を行なう. まず

$P_n^\varepsilon(\tilde{\gamma}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{\gamma}, \tilde{m})$ を次の条件を満たす P_n^ε の元 (f, M) の集合

とする. (但し $\varepsilon = +, - \text{ or } 0$, $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_a)_{a|n}$, $\tilde{m} = (\tilde{m}_a)_{\substack{a|n \\ a \neq n}}$: ベクトル)

- (1) M は genus $\tilde{g}$ の boundary components は $D_1, D_2, \dots, D_{\tilde{g}}$ からなる。
 (2) $S(f)$ は $\dot{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点 $S_1, S_2, \dots, S_{\tilde{m}}$ からなる。
 (3) $\tilde{l}_a$ は $\{D_j; f^a(D_j) = D_j \text{ or } f^b(D_j) \neq D_j (1 \leq b < a)\}$ の元の個数
 $\tilde{m}_a$ は $S_a^0(f)$ に属する点の個数。

さて $(f, M) \in P_n^E(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{g}, \tilde{m})$ とするとき, 明らかに

- (1) $\tilde{l} = \sum_{a|n} \tilde{l}_a$, $\tilde{m} = \sum_{a|n} \tilde{m}_a$
 (2) $\tilde{l}_a, \tilde{m}_a$ は a の倍数 (そこで $l_a = \frac{\tilde{l}_a}{a}$, $m_a = \frac{\tilde{m}_a}{a}$ とおく)

$$X = M/f \text{ とすれば genus は } \begin{aligned} \varepsilon = + \text{ のとき } g &= \frac{1}{2n} \{ 2\tilde{g} - 2 + \sum_{a|n} (1 - \frac{n}{a}) (\tilde{l}_a + \tilde{m}_a) \} + 1 \\ \varepsilon = - \text{ のとき } g &= \frac{1}{n} \{ 2\tilde{g} - 2 + \sum_{a|n} (1 - \frac{n}{a}) (\tilde{l}_a + \tilde{m}_a) \} + 2 \\ \varepsilon = 0 \text{ のとき } g &= \frac{1}{n} \{ \tilde{g} - 2 + \sum_{a|n} (1 - \frac{n}{a}) (\tilde{l}_a + \tilde{m}_a) \} + 2 \end{aligned}$$

$$\partial X \text{ の components の数は } l = \sum_{a|n} l_a.$$

$$p(S(f)) = S \text{ の点の数は } m = \sum_{a|n} m_a.$$

$$P^E(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{g}, \tilde{m}) \neq \emptyset \text{ であるためには } (f, M) \in P_n(X, S) \quad (\exists X, S) \text{ あり}$$

Prop. 7 $P^E(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{g}, \tilde{m}) \neq \emptyset$ ならば (1), (2) と

- (3) g が負でない整数 ($\varepsilon = +$), g が正の整数 ($\varepsilon = - \text{ or } 0$) が必要

まず $\varepsilon = +$ の時を扱おう. この時定理1の完全代表系に条件⑧ $l_a = \{ \delta_j; \text{g.c.d.} \{ \delta_j, n \} = a \}$ の元の個数, $m_a = \{ \theta_k; \text{g.c.d.} \{ \theta_k, n \} = a \}$ の元の個数 とつけ加えたものの数と定めればよい. したがって ([8] 参照)

定理 5 Prop. 7 の条件のもと $P_n^+(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{g}, \tilde{m})$ の元の個数は

$$(i) \quad \frac{1}{2} C(n; \tilde{g}, \tilde{m}) + \frac{1}{2} Q(n; \tilde{g}, \tilde{m}) = C^*(n; \tilde{g}, \tilde{m}) \quad \text{if } g > 0$$

(ii) $\sum_{g|n} \mu(g) C^*(\frac{n}{g}; \ell^{(g)}, m^{(g)})$ if $g=0$. (但し $\mu(g)$ は Möbius 関数, $\ell^{(g)} = (\ell_a^{(g)})_{a|n'}$, $m^{(g)} = (m_a^{(g)})_{a|n'}$; ベクトル ℓ ($g|a$ のとき $\ell_a=0$, $m_a=0$) $g|a$ のとき $\ell_a^{(g)} = \ell_a$, $m_a^{(g)} = m_a$ $a' = \frac{a}{g}$, $n' = \frac{n}{g}$ である.) ($C(n; \ell, m)$ $Q(n; \ell, m)$ は下記)

$$D(n; \ell, m) = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m); \right. \\ \left. \text{定理 1 の } \textcircled{1} \quad \textcircled{2}, \text{ 条件 } \textcircled{3} \right\}$$

の元の個数が $C(n; \ell, m)$ であるが, これは n の素因数分解 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_s^{e_s}$, n の約数 a を $a = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_s^{f_s}$ ($0 \leq f_1 < e_1$, $0 \leq f_2 < e_2, \dots, 0 \leq f_v < e_v$, $f_{v+1} = e_{v+1}, \dots, f_s = e_s$) とするとき,

$$g_a(x, y, z) = g_a(x, y, z) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{a}-1} (1 + yx^{ja} + y^2x^{2ja} + \dots)(1 + zx^{ja} + z^2x^{2ja} + \dots)$$

$$f_a(x, y, z) = f_a(x, y, z) = g_a(x, y, z) \prod_{i=1}^v g_{p_i a}^{-1}(x, y, z) \prod_{1 \leq i < j \leq v} g_{p_i p_j a}(x, y, z)$$

$$\dots \prod_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq v} g_{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_t} a}^{(-1)^t}(x, y, z) \dots g_{p_1 p_2 \dots p_v a}^{(-1)^v}(x, y, z)$$

とあき $Y = (y_a)_{a|n}$ $Z = (z_a)_{a|n}$ なるベクトルに対して

$$F(x, Y, Z) = \prod_{a|n} f_a(x, y_a, z_a) \text{ とあければ, これは母関数である.}$$

すなわちこの関数の $x^{in} \cdot \prod_{a|n} y_a^{l_a} z_a^{m_a}$ の係数 $K(i)$ の和が

$$C(n; \ell, m) \text{ である. } \zeta_i = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \zeta_i = \zeta_1^i \text{ として } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\zeta_i, Y, Z)$$

の $\prod_{a|n} y_a^{l_a} z_a^{m_a}$ の係数が $C(n; \ell, m)$ である. また

$$Q(n; \ell, m) = \begin{cases} \prod_{a|n} \left(\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + \frac{l_a}{2} - 1 \right) \left(\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + \frac{m_a}{2} - 1 \right) & \text{if } l_a, m_a: \text{even} \\ & (0 < a < \frac{n}{2}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である.

この定理によ。て $P_n^+(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{m})$ の個数が 0 の時 = ϕ
正の時 $\neq \phi$ である。簡単な時、例えば n が素数のときに述べ
ておくと。

系 1 n : odd prime の時 $P_n^+(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{m}) \neq \phi$ である必
要十分条件は $\cdot \tilde{l} - \tilde{l}_1 \equiv 0 \pmod{n} \quad \cdot \tilde{l}_1 + \tilde{m} \neq 1$
 $\cdot \tilde{g} + n \times \min\{\tilde{l}_1 + \tilde{m}, 1\} + \frac{1-n}{2}(\tilde{l}_1 + \tilde{m}) - 1 \geq 0$ かつ $\equiv 0 \pmod{n}$
であって、その時 $P_n^+(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{m})$ の (元) の個数は

$$\frac{1}{2} C(n; l_1, m) + \frac{1}{2} Q(n; l_1, m) \quad \text{である。但し}$$

$$C(n; l_1, m) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left\{ \binom{l_1+n-2}{n-2} \binom{m+n-2}{n-2} + n-1 \right\} & \begin{matrix} l_1 \equiv 0, m \equiv 0 \pmod{n} \\ \text{or } l_1 \equiv 1, m \equiv 1 \pmod{n} \end{matrix} \\ \frac{1}{n} \left\{ \binom{l_1+n-2}{n-2} \binom{m+n-2}{n-2} - n+1 \right\} & \begin{matrix} l_1 \equiv 0, m \equiv 1 \pmod{n} \\ \text{or } l_1 \equiv 1, m \equiv 0 \pmod{n} \end{matrix} \\ \frac{1}{n} \binom{l_1+n-2}{n-2} \binom{m+n-2}{n-2} & \text{その他} \end{cases}$$

$$Q(n; l_1, m) = \begin{cases} \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{l_1}{2} - 1}{\frac{l_1}{2}} \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{m}{2} - 1}{\frac{m}{2}} & l_1, m: \text{even} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

系 2 $n=2$ の時 $P_2^+(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{m}) \neq \phi$ である必要十分
条件は $\cdot \tilde{l} - \tilde{l}_1$; even $\cdot \tilde{l}_1 + \tilde{m}$; even $\cdot \tilde{g} + 2 \times$
 $\min\{\tilde{l}_1 + \tilde{m}, 1\} - \frac{\tilde{l}_1 + \tilde{m}}{2} \geq 1$ かつ odd であって、その時
 $P_2^+(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{m})$ の (元) の個数は 1 である。

次に $\varepsilon = -$ の時であるが、このときは ([9] 参照)

定理 6 Prop. 7 の条件のもと $P_n^-(\tilde{g}, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{x}, \tilde{m}) \neq \phi$ である
必要十分条件は n : even であ。てかつ

但し $d = \text{g.c.d.} \{a; l_a \neq 0 \text{ or } m_a \neq 0\}$, $\{x\}$ は x 以上の整数の最小数, $C^-(n; l, m) = \prod_{\substack{a|n \\ a \neq n \\ a \neq n/2}} \left(\frac{\varphi(n/a)}{2} + l_a - 1 \right) \left(\frac{\varphi(n/a)}{2} + m_a - 1 \right)$.

次に $\varepsilon = 0$ のときは ([9] 参照)

定理 7 Prop. 7 の条件のもと $P_n^0(g, l, m, \tilde{l}, \tilde{m}) \neq \emptyset$ である必要十分条件は.

(A) $g \geq 3$ のとき (5) (i) $n: \text{odd}$ である.

(ii) $n: \text{even}$ のとき $\sum_{a: \text{odd}} a|n (l_a + m_a)$ が even

(B) $g = 1$ のとき (5)

かつ (6) $\text{g.c.d.} \{a; l_a \neq 0 \text{ or } m_a \neq 0\} = 1$

(C) $g = 2$ のとき (i) $n: \text{odd}$ である

または (ii) $n: \text{even}$, $d: \text{odd}$ のとき $\sum_{a: \text{odd}} a|n (l_a + m_a)$ が even

または (iii) $n: \text{even}$, $d: \text{even}$ のとき $\frac{n}{2}: \text{odd}$

または (iv) $n: \text{even}$, $d: \text{even}$, $\frac{n}{2}: \text{even}$ のとき $\frac{d}{2}: \text{odd}$ かつ $\sum_{\substack{a|n \\ a: \text{even} \text{ or } \frac{n}{2}: \text{odd}}} (l_a + m_a)$

そして 2 の時 $P_n^0(g, l, m, \tilde{l}, \tilde{m})$ の個数は

* $g \neq 2$ の時

$$\begin{cases} C^-(n; l, m) & \text{if (i) } n: \text{odd} \text{ または (ii) } n: \text{even} \text{ かつ } l_{n/2} + m_{n/2} \neq 0 \\ 2 \times C^-(n; l, m) & \text{if (ii) } n: \text{even} \text{ かつ } l_{n/2} = m_{n/2} = 0. \end{cases}$$

* $g = 2$ の時

$$\left\{ \frac{\varphi(d)}{2} \right\} \times C^-(n; l, m) \quad \text{if (i) } n: \text{odd} \text{ または (ii) } n: \text{even}, d: \text{odd}, l_{n/2} + m_{n/2} \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2 \times \left\{ \frac{\varphi(d)}{2} \right\} \times C^-(n; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}) & \text{if } n: \text{even} \rightarrow d: \text{odd} \rightarrow l_{n/2} = m_{n/2} = 0 \\ \left\{ \frac{\varphi(d)}{2} \right\} \times C^-(n; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}) & \text{if (i) } n: \text{even} \rightarrow d: \text{even} \rightarrow \frac{n}{2}: \text{odd} \\ & \text{(ii) } n: \text{even} \rightarrow d: \text{even} \rightarrow \frac{n}{2}: \text{even} \rightarrow l_{n/2} + m_{n/2} \neq 0 \\ 2 \times \left\{ \frac{\varphi(d)}{2} \right\} \times C^-(n; \mathfrak{L}, \mathfrak{M}) & \text{if } n: \text{even} \rightarrow d: \text{even} \rightarrow \frac{n}{2}: \text{even} \rightarrow l_{n/2} = m_{n/2} = 0. \end{array} \right.$$

【 $(f, M) \sim (f', M')$ の判定】 $(f, M), (f', M') \in P_n^E$ のとき同値かどうかと判定するには, まず同じ $P_n^E(\mathfrak{F}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}', \mathfrak{M}')$ に属すること, その時は同じ $P_n(X, S)$ に属するので, それぞれに対して定理 1 ~ 4 の完全代表系の元として等しいかどうかをみればよい. ([8][9] 参照)

§ 3. $\mathcal{S}^1(f) \neq \emptyset$ の時

さて $\mathcal{S}^1(f) \neq \emptyset$ のときは Prop. 1 を使おうと

Prop. 8 f は compact surface M 上の period n の periodic map で $\mathcal{S}^1(f) \neq \emptyset$ ならば

- (1) n は even
- (2) $x \in \mathcal{S}^1(f) \longrightarrow x \in \mathcal{S}_{n/2}(f)$
- (3) 特に M が orientable のとき f は orientation reversing であって, $\frac{n}{2}$ は odd である.

《Notation》

$\mathbb{P}_n = \{ (f, M) ; M: \text{compact surface}, f: M \text{ 上の period } n \text{ の periodic map}, \mathcal{S}^1(f) \neq \emptyset \}$

$$\mathbb{P}_n^2 = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n ; M - g^1(f) \text{ は不連結} \}$$

$$\hat{\mathbb{P}}_n = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n ; M - g^1(f) \text{ は連結} \}$$

$$\mathbb{P}_n^2 = \{ (g, M_0, g_*) ; (g, M_0) \in \mathbb{P}_{n/2}, g_* : \begin{array}{l} \partial M_0 \text{ 上の} \\ \text{simple loop \& simple arc} \\ \text{からなる set} \end{array} \\ g(g_*) = g_* \}$$

$$\hat{\mathbb{P}}_n = \{ (\hat{f}, \hat{M}, g_*) ; (\hat{f}, \hat{M}) \in \mathbb{P}_n, g_* : \partial \hat{M} \text{ 上の simple loop \& simple arc からなる set, } \hat{f}(g_*) = g_* \}$$

定義 4 (1) $\hat{\mathbb{P}}_n$ の 2 つの元 $(\hat{f}, \hat{M}, g_*)$, $(\hat{f}', \hat{M}', g'_*)$ に対して

$\hat{f}h = h\hat{f}'$ をみたす同相写像 $h : (\hat{M}, g_*) \rightarrow (\hat{M}', g'_*)$ が存在するとき $(\hat{f}, \hat{M}, g_*) \sim_* (\hat{f}', \hat{M}', g'_*)$ とする.

(2) $\mathbb{P}_n^2$ の 2 つの元 (g, M_0, g_*) , (g', M'_0, g'_*) に対して

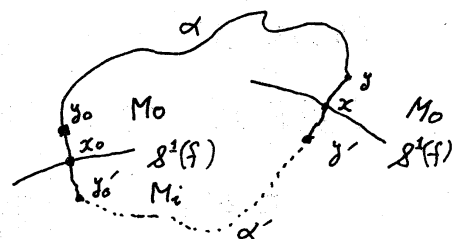
$gh = hg'$ をみたす同相写像 $h : (M_0, g_*) \rightarrow (M'_0, g'_*)$ が存在するとき $(g, M_0, g_*) \sim_* (g', M'_0, g'_*)$ とする.

$M - g^1(f)$ が連結でない ($\mathbb{P}_n^2$) のとき

Lemma. 1 $(f, M) \in \mathbb{P}_n^2$ のとき, $M - g^1(f)$ の連結成分は 2 つで, それらの閉包を M_0, M_1 とすると, $f(M_0) = M_1$ であり $g = f|_{M_0}$ とおけば g は M_0 上の period $\frac{n}{2}$ の periodic map で $g^1(g) = \phi$ かつ $g_{2k}^0(g) = g_{2k}^0(f) \cap \overset{\circ}{M}_0$ をみたす. そしてこの時 $\frac{n}{2}$ は odd である.

(略証) M_0 を $M - g^1(f)$ の 1 つの連結成分の閉包とする. $M - g^1(f)$ が連結でないのだから $\exists M_i ; M - g^1(f)$ の M_0 と異なる連結成分の閉包で $\phi \neq M_0 \cap M_i \subset g^1(f)$ とする. そこで $x_0 \in M_0 \cap M_i$ をとり y_0 を x_0 の十分近くの M_0 の点とする. このとき $M_0 \cap g^1(f) = M_i \cap g^1(f)$ である. なぜ

ならば $\forall x \in M_0 \cap g^1(f)$, y は x の十分近く
 の M_0 の点とすれば, M_0 は連結より y と
 y_0 を結ぶ M_0 の arc α が存在する. $\alpha' = f^{\frac{n}{2}}(\alpha)$
 とすれば α' は $f^{\frac{n}{2}}(y_0) = y'_0$ と $f^{\frac{n}{2}}(y) = y'$ を結ぶ
 arc で $\alpha' \cap g^1(f) = \emptyset$, ところが $y'_0 \in M_i$



だから $y' \in M_i$. 故に $x \in M_0 \cap M_i$. したがって $x \in M_i \cap g^1(f)$. 逆も同
 様に示されるので $M_0 \cap g^1(f) = M_i \cap g^1(f)$. このことより $M - g^1(f)$ の
 連結成分は M_0 と M_i の 2 つしかない. あとは実際に試してみれば分る.
 ($M_i = M_1$ とおく).

Lemma. 2 また逆に 2次元多様体 M_0 と $2M_0$ 上の simple loop と
 simple arc からなる集合 $\mathcal{S}_*$ が与えられ, g は period $\frac{n}{2}$ (odd) $= m$
 の M_0 上の periodic map で $g^1(g) = \emptyset$ かつ $g(\mathcal{S}_*) = \mathcal{S}_*$ なるもの
 とするとき, M_0 の copy M_1 をとり $i: M_0 \rightarrow M_1$ を位相同型
 写像, $j = i|_{\mathcal{S}_*}$ とし $M = M_0 \cup_j M_1$ とおく. そして $f: M \rightarrow$
 M を $x \in M_0$ のとき $f(x) = i g^{\frac{n+1}{2}}(x)$, $x \in M_1$ のとき $f(x)$
 $= g^{\frac{n+1}{2}} i^{-1}(x)$ とすれば f は M 上の period n の periodic map
 になり, $g^1(f) = \mathcal{S}_*$, $M - g^1(f)$ は不連結を示す. ここで Lemma 1
 により M'_0 , $g'_0: M'_0 \rightarrow M'_0$ を作れば $(g'_0, M'_0) = (g_0, M_0)$ とする.

$$\text{すなわち } \boxed{\mathbb{P}_n^2} \ni (f, M) \longleftrightarrow (g, M_0, \mathcal{S}_*) \in \boxed{\mathbb{P}_n^2}$$

対応の対応

また同値関係については.

Lemma 3 $(f, M), (f', M') \in \mathbb{P}_n^2$ に対して $(g, M_0, \mathcal{S}_*)$, $(g', M'_0, \mathcal{S}'_*) \in \mathbb{P}_n^2$ を作れば $(f, M) \sim (f', M')$ である必要十分条件は $(g, M_0, \mathcal{S}_*) \sim_* (g', M'_0, \mathcal{S}'_*)$ である。

したがって
$$\boxed{\mathbb{P}_n^2 / \sim} \xleftrightarrow{\text{1対1の対応}} \boxed{\mathbb{P}_n^2 / \sim_*}$$

そして $p: M \longrightarrow M/f = X$ は $p(\mathcal{S}(f)) = S$ を branched set とする n -fold cyclic branched covering (但し covering $p|_{M-\mathcal{S}(f)}: M-\mathcal{S}(f) \longrightarrow X-S$ において $M-\mathcal{S}(f)$ は連結である), $p_0: M_0 \longrightarrow M_0/g = X$ は $p_0(\mathcal{S}(g)) = S^0$ を branched set とする $\frac{n}{2}$ -fold cyclic branched covering になる。ここで 2次元多様体 X と ∂X 上の simple loop と simple arc からなる集合 S^1 と X 内の孤立点の集合 S^0 をとり $S = S^1 \cup S^0$ とおき $\mathbb{P}_n^2(X, S) = \{ (g, M_0, \mathcal{S}_*) \in \mathbb{P}_n^2; M_0/g = X, p_0: M_0 \longrightarrow X \text{ が } \frac{n}{2}\text{-fold cyclic branched covering with branched set } p(\mathcal{S}(g)) = S^0, p_0(\mathcal{S}_*) = S^1 \}$ とおき $\mathcal{P}_n^2(X, S) = \mathbb{P}_n^2(X, S) / \sim_*$ とし $\S 1$ と同様にして $[H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}]^*$ の A -同値類を求めればよい。(但し ∂X の component を $d_j \cap S^1 = \emptyset$ なるもの, $d_u^0 \subset S^1$ なるもの, $d_w^{(n)} \cap S^1$ が w 本の arc からなるもの, と分けておかなければならない) すると 定理 1 ~ 4 の (I) ($n \rightarrow \frac{n}{2}$ で) $\frac{n}{2}: \text{odd}$ と同様な定理がえられる。すなわち $\omega \in [H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_{\frac{n}{2}}]^*$ が与えられた時 $\omega(a_i) = \alpha_i, \omega(b_i) = \beta_i$ ($\omega(c) = \gamma$) $\langle \omega(c_1) = \gamma_1, \omega(c_2) = \gamma_2 \rangle$

$\omega(d_j) = \delta_j$, $\omega(d_u^\circ) = \eta_u$, $\omega(d_w^{(v)}) = \lambda_w^{(v)}$, $\omega(S_k) = \theta_k$ と
 なる時 ω を $\mathbb{Z}_{1/2}$ の元の組 $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, (\delta), \langle \delta_1, \delta_2 \rangle,$
 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_g, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{t(1)}^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_{t(2)}^{(2)}, \dots,$
 $\dots, \lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \dots, \lambda_{t(r)}^{(r)}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ で表わすとき, 定理 1
 ~ 4 の (I) の形に $[H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_{1/2}]^*$ の A -同値類の完全
 代表系は与えられる。すなわち $\mathbb{P}_n^2$ の同値類の完全代表系が
 求められる。

$\mathbb{P}_n^2$ の分類をするには, まず

$$\mathbb{P}_n^{2+} = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n^2 ; M: \text{orientable} \ (f; \text{orientation reversing}) \}$$

$$\mathbb{P}_n^{2+} = \{ (g, M_0, \delta_*) \in \mathbb{P}_n^2 ; M_0: \text{orientable} \ (g; \text{orientation preserving}) \}$$

$$\mathbb{P}_n^{2^0} = \{ (f, M) \in \mathbb{P}_n^2 ; M: \text{non-orientable} \}$$

$$\mathbb{P}_n^{2^0} = \{ (g, M_0, \delta_*) \in \mathbb{P}_n^2 ; M_0: \text{non-orientable} \}$$

として $\mathbb{P}_n^{2^\varepsilon}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{r}, \tilde{m}, \tilde{\delta}, \tilde{\tau}; \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\mathcal{F}} \tilde{\mathcal{U}})$ を次の条件をみたす $\mathbb{P}_n^{2^\varepsilon}$ の元 (f, M) の集合とする。(但し $\varepsilon = +$ or 0 ,

$\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\ell}_a)_{a \in n}$, $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{m}_a)_{a \in n}$, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\delta}_a)_{a \in n}$, $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\tau}_a^{(v)})_{v \in N}$ はベクトル).

(I) M は genus $\tilde{g}$ で, $D_1, D_2, \dots, D_\ell \in D_j \cap \mathcal{S}^1(f) = \emptyset$ なる M の boundary component, $\tilde{r} \in D_j^* \cap \mathcal{S}'(f) \neq \emptyset$ なる M の boundary component の数.

(II) $\mathcal{S}^0(f)$ は M の $\tilde{m}$ 個の点 $S_1, S_2, \dots, S_{\tilde{m}}$ からなる.

(III) $\mathcal{S}^1(f)$ の loop の数 $\tilde{\delta}$, (arc の数は $\tilde{r}$), type (iii) の集合 Φ_w の数 $\tilde{\tau}$. ($D_1^0, D_2^0, \dots, D_{\tilde{\delta}}^0$ は $\mathcal{S}'(f)$ の loop とおく)

(=) $\hat{l}_a$ は $\{D_j; f^a(D_j)=D_j \text{ かつ } f^b(D_j) \neq D_j (1 \leq b < a)\}$ の元の個数

$\hat{m}_a$ は $S_a^0(f)$ に属する点の個数

$\hat{g}_a$ は $\{D_u^0; f^a(D_u^0)=D_u^0 \text{ かつ } f^b(D_u^0) \neq D_u^0 (1 \leq b < a)\}$ の元の個数

$\hat{t}_a(v)$ は $\{\Phi_w; f^a(\Phi_w)=\Phi_w \text{ かつ } f^b(\Phi_w) \neq \Phi_w (1 \leq b < a) \text{ かつ}$

Φ_w に属する arc の数 $\frac{n}{2}v\}$ の元の個数

そして $P_n^{2\varepsilon}(\hat{g}, \hat{l}, \hat{m}, \hat{g}, \hat{t}; \hat{g}, \hat{m}, \hat{g}, \hat{t})$ に対応させて, さらに §2 と同様にして $\hat{l}_a, \hat{m}_a, \hat{g}_a, \hat{t}_a(v)$ を求めて $X = M/f = M_0/g$, $p(S^1(f)) = S^1$, $p(S^0(f)) = S^0$, $S = S^1 \cup S^0$ とおいて, X の genus g , ∂X のうち $d_j \cap S^1 = \emptyset$ なるものの数 l , $d_u^0 \subset S^1$ なるものの数 g , $d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本の arc からなるものの数 $t(v)$, S^0 の点の数 m として $[H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_{n/2}]^*$ の A -同値類の完全代表系に §2 の条件 ⑧ と同様な条件をつけたものを求めれば §2 の定理 5, 7 と同様な定理がえられる.
(詳細は省略)

	M	M_0	X	
$\mathbb{P}_n^{2+}$	orientable	orientable	orientable	n : even $\frac{n}{2}$: odd
$\mathbb{P}_n^{2-}$	non-orientable	non-orientable	non-orientable	n : even $\frac{n}{2}$: odd

$M - g^1(f)$ が連結 ($\hat{\mathbb{P}}_n$) のとき

Prop. 9 $(f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n$, M が orientable のとき $X = M/f$ は non-orientable である. ($\frac{n}{2}$ は odd).

Lemma 4 $(f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n$ のとき $\hat{M} \pm M - \mathcal{S}^1(f)$ (連結) の natural compactification (completion) とし, $\mathcal{S}_* = \hat{M} - (M - \mathcal{S}^1(f))$ (すなわち $\mathcal{S}^1(f)$ の $\hat{M}$ における 2 つの copy) とおく. $\hat{f}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ を $x \in \hat{M} - \mathcal{S}_*$ のとき $\hat{f}(x) = f(x)$, $x \in \mathcal{S}_*$ のとき $\lim x_i = x$ なる $\hat{M} - \mathcal{S}_*$ の点列 $\{x_i\}$ をとり $\hat{f}(x) = \lim f(x_i)$ とすれば ($\{x_i\}$ のとり方によらない.) $\hat{f}$ は $\hat{M}$ 上の period n の periodic map となり, $\mathcal{S}^1(\hat{f}) = \emptyset$ かつ $\mathcal{S}_k^0(\hat{f}) = \mathcal{S}_k^0(f)$ をみたす.

Lemma 5 逆に 2 次元多様体 $\hat{M}$ と $\partial\hat{M}$ 上の simple loop と simple arc からなる集合 $\mathcal{S}_*$ が与えられ, $\hat{f}$ は period n (even) の $\hat{M}$ 上の periodic map で $\mathcal{S}^1(\hat{f}) = \emptyset$ かつ $\hat{f}(\mathcal{S}_*) = \mathcal{S}_*$ なるものとするとき, $M = \hat{M}/\sim$ (ここで $\hat{x} \sim \hat{y} \iff$ (i) $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{S}_*$ のとき $\hat{x} = \hat{y}$ または $\hat{y} = \hat{f}^{\frac{n}{2}}(\hat{x})$, (ii) その他の時は $\hat{x} = \hat{y}$) とし $g: \hat{M} \rightarrow M$ を natural quotient map とする. このとき $f: M \rightarrow M$ を $x \in M$ に対して $g(y) = x$ なる y をとり $f(x) = g(\hat{f}(y))$ と定めると f は well-defined で M 上の period n の periodic map になり, $\mathcal{S}^1(f) = g(\mathcal{S}_*)$, $M - \mathcal{S}^1(f)$ は 連結 をみたす. ここで Lemma 4 により $\hat{M}', \hat{f}: \hat{M}' \rightarrow \hat{M}'$ を作れば $(\hat{f}, \hat{M}) = (\hat{f}', \hat{M}')$ となる.

すなわち

$$\boxed{\hat{\mathbb{P}}_n} \ni (f, M) \xleftrightarrow[1\text{対1の対応}]{} (\hat{f}, \hat{M}, \mathcal{S}_*) \in \boxed{\hat{\mathbb{P}}_n}$$

また同値関係については

Lemma 6 $(f, M), (f', M') \in \hat{\mathbb{P}}_n$ に対して $(\hat{f}, \hat{M}, g_*)$, $(\hat{f}', \hat{M}', g'_*) \in \hat{\mathbb{P}}_n$ を作れば $(f, M) \sim (f', M')$ である必要十分条件は $(\hat{f}, \hat{M}, g_*) \sim_* (\hat{f}', \hat{M}', g'_*)$ である.

したがって

$$\boxed{\hat{\mathbb{P}}_n / \sim} \xleftrightarrow{\text{1対1の対応}} \boxed{\hat{\mathbb{P}}_n / \sim_*}$$

そして $p: M \longrightarrow M/f = X$ は $p(g(f)) = S$ を branched set とする n -fold cyclic branched covering, $\hat{p}: \hat{M} \longrightarrow \hat{M}/\hat{f} = X$ は $\hat{p}(g(\hat{f})) = S^0$ を branched set とする n -fold cyclic branched covering になっ

ている. ここで 2次元多様体 X と ∂X 上の simple loop と simple arc からなる集合 S^1

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{\hat{p}} & X \\ \downarrow g & \nearrow p & \\ M & & \end{array}$$

と X 内の孤立点の集合 S^0 をとり $S = S^1 \cup S^0$ とおき,

$$\hat{\mathbb{P}}_n(X, S) = \{(\hat{f}, \hat{M}, g_*) \in \hat{\mathbb{P}}_n ; \hat{M}/\hat{f} = X, \hat{p}: \hat{M} \longrightarrow X$$

が n -fold cyclic branched covering with branched set $p(g(\hat{f}))$

$$= S^0, \hat{p}(g_*) = S^1\} \text{ とおき } \hat{\mathcal{O}}_n(X, S) = \hat{\mathbb{P}}_n(X, S) / \sim_* \text{ とし}$$

て §1 と同様に $[H_1(X - S^0); \mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$ -同値類を求め

ればよい. (不連結のときと同様に ∂X の component を d_j へ

$S^1 = \emptyset$ なるもの, $d_u^0 \subset S^1$ のもの, $d_w^{(v)} \cap S^1$ が v 本の arc からなるものと分けておく.)

すると定理 1 ~ 4 の

(II) n :even と同様な定理がえられる. すなわち $\omega \in$

$[H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_n]^*$ が与えられた時 $\omega(a_i) = \alpha_i$, $\omega(b_i) = \beta_i$,
 $(\omega(c) = \gamma) < \omega(c_1) = \gamma_1, \omega(c_2) = \gamma_2 >$, $\omega(d_j) = \delta_j$, $\omega(d_u^0) = \eta_u$
 $\omega(d_w^{(n)}) = \lambda_w^{(n)}$, $\omega(s_k) = \theta_k$ となる時, $\omega \in \mathbb{Z}_n$ の元組
 $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, (\gamma) < \gamma_1, \gamma_2 >, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \eta_1, \eta_2, \dots,$
 $\eta_g, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{t(1)}^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_{t(2)}^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \dots, \lambda_{t(r)}^{(r)},$
 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ で表わすとき, 定理1~4の(II)の形に
 $[H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系は与えられる.
すなわち $\hat{\mathbb{P}}_n$ の同値類の完全代表系が求められる.

そして X から $\hat{M}$ を作り M を作ればよいが, それは次のようになる. ($\hat{\mathbb{P}}_n, \hat{\mathbb{P}}_n$ において)

$$\begin{array}{lcl}
 X; \text{orientable} & \longrightarrow & \hat{M}; \text{orientable} \xrightarrow{\text{(Prop. 9.21)}} M; \text{non-orientable} \quad \textcircled{i} \\
 & & \searrow \\
 & & M; \text{orientable} \quad (\frac{n}{2}; \text{odd}) \quad \textcircled{i} \\
 X; \text{non-orientable} & \longrightarrow & \hat{M}; \text{orientable} \xrightarrow{\quad} M; \text{non-orientable} \quad (\frac{n}{2}; \text{even}) \\
 & \searrow & \\
 & & \hat{M}; \text{non-orientable} \longrightarrow M; \text{non-orientable} \quad \textcircled{ii}
 \end{array}$$

そこで $\hat{\mathbb{P}}_n$ の分類をするには, まず $(n; \text{even})$

$$\hat{\mathbb{P}}_n^{+-} = \{ (f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n; \textcircled{i} \text{ のとき} \}$$

$$\hat{\mathbb{P}}_n^{-+} = \{ (f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n; \textcircled{ii} \text{ のとき} \} \quad (\frac{n}{2}; \text{odd})$$

$$\mathbb{P}_n^{--} = \{ (f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n; \textcircled{iii} \text{ のとき} \} \quad (\frac{n}{2}; \text{even})$$

$$\mathbb{P}_n^{oo} = \{ (f, M) \in \hat{\mathbb{P}}_n; \textcircled{iv} \text{ のとき} \}$$

$$\hat{\mathbb{P}}_n^{+-} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, \delta_*) \in \hat{\mathbb{P}}_n; \textcircled{i} \text{ のとき} \}$$

$$\hat{\mathbb{P}}_n^{-+} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, \delta_*) \in \hat{\mathbb{P}}_n; \textcircled{ii} \text{ のとき} \} \quad (\frac{n}{2}; \text{odd})$$

$$\hat{P}_n^{--} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, g_*) \in \hat{P}_n ; \textcircled{iii} \text{ のとき} \} \quad (\frac{n}{2}: \text{even})$$

$$\hat{P}_n^{00} = \{ (\hat{f}, \hat{M}, g_*) \in \hat{P}_n ; \textcircled{iv} \text{ のとき} \}$$

として $\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{f}, \tilde{m}, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-, \tilde{t}^+, \tilde{t}^-; \tilde{x}, \tilde{m}, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-, \tilde{t}^+, \tilde{t}^-)$ を次の条件をみたす $\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}$ の元 (f, M) の集合とする. (但し

$$\varepsilon = +, - \text{ or } 0, \quad \varepsilon' = +, - \text{ or } 0, \quad \tilde{x} = (\tilde{\ell}_a)_{a \in n}, \quad \tilde{m} = (\tilde{m}_a)_{a \in n}, \quad \tilde{g}^+ = (\tilde{g}_a^+)_{a \in \frac{n}{2}}, \quad \tilde{g}^- = (\tilde{g}_a^-)_{a \in \frac{n}{2}}, \quad \tilde{t}^+ = (\tilde{t}_a^+(v))_{v \in N}, \quad \tilde{t}^- = (\tilde{t}_a^-(v))_{v \in N} \text{ はベクトル, 但し } \hat{P}_n^{-+} \text{ のとき } \tilde{g}^-, \tilde{g}^-, \tilde{t}^-, \tilde{t}^- \text{ はなし})$$

(イ) M は genus $\tilde{g}$ なる $D_1, D_2, \dots, D_{\tilde{g}}$ と $D_j \cap S'(f) = \emptyset$ なる M の boundary component, $\tilde{f}$ は $D_j^* \cap S'(f) \neq \emptyset$ なる M の boundary component の数.

(ロ) $S^0(f)$ は $\hat{M}$ の $\tilde{m}$ 個の点からなる.

(ハ) $S^1(f)$ の loop のうち 2-sided なものは $D_1^{0+}, D_2^{0+}, \dots, D_{\tilde{g}}^{0+}$, 1-sided なものは $D_1^{0-}, D_2^{0-}, \dots, D_{\tilde{g}}^{0-}$ とし (arc の数は $\tilde{f}$), type (iii)₂ の集合 Φ_w^+ の数 $\tilde{t}^+$, type (iii)₁ の集合 Φ_w^- の数 $\tilde{t}^-$.

(ニ) $\tilde{\ell}_a$ は $\{ D_j ; f^a(D_j) = D_j, f^b(D_j) \neq D_j, (1 \leq b < a) \}$ の元の個数

$\tilde{m}_a$ は $S_a^0(f)$ に属する点の個数

$\tilde{g}_a^+ = \{ D_u^{0+} ; f^a(D_u^{0+}) = D_u^{0+}, f^b(D_u^{0+}) \neq D_u^{0+} (1 \leq b < a) \}$ の元の個数

$\tilde{g}_a^- = \{ D_u^{0-} ; f^a(D_u^{0-}) = D_u^{0-}, f^b(D_u^{0-}) \neq D_u^{0-} (1 \leq b < a) \}$ の元の個数

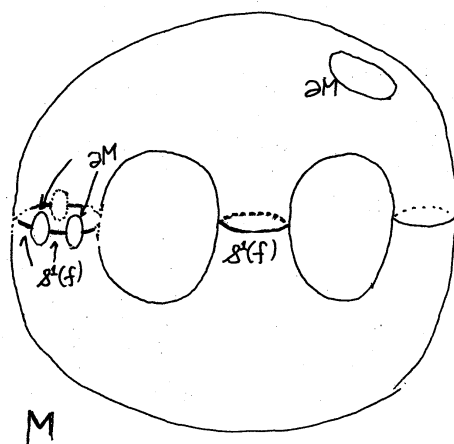
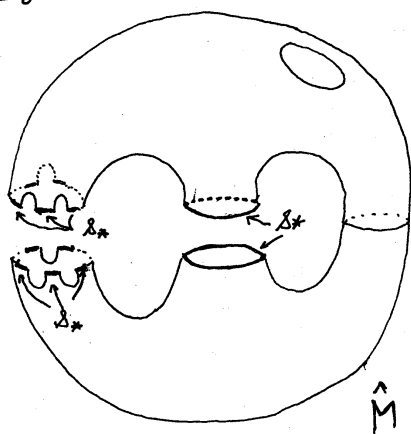
$\tilde{t}_a^+(v) = \{ \Phi_w^+ ; f^a(\Phi_w^+) = \Phi_w^+, f^b(\Phi_w^+) \neq \Phi_w^+ (1 \leq b < a),$

かつ Φ_w^+ に属する arc の数 $\frac{n}{2a} v \}$ の元の個数

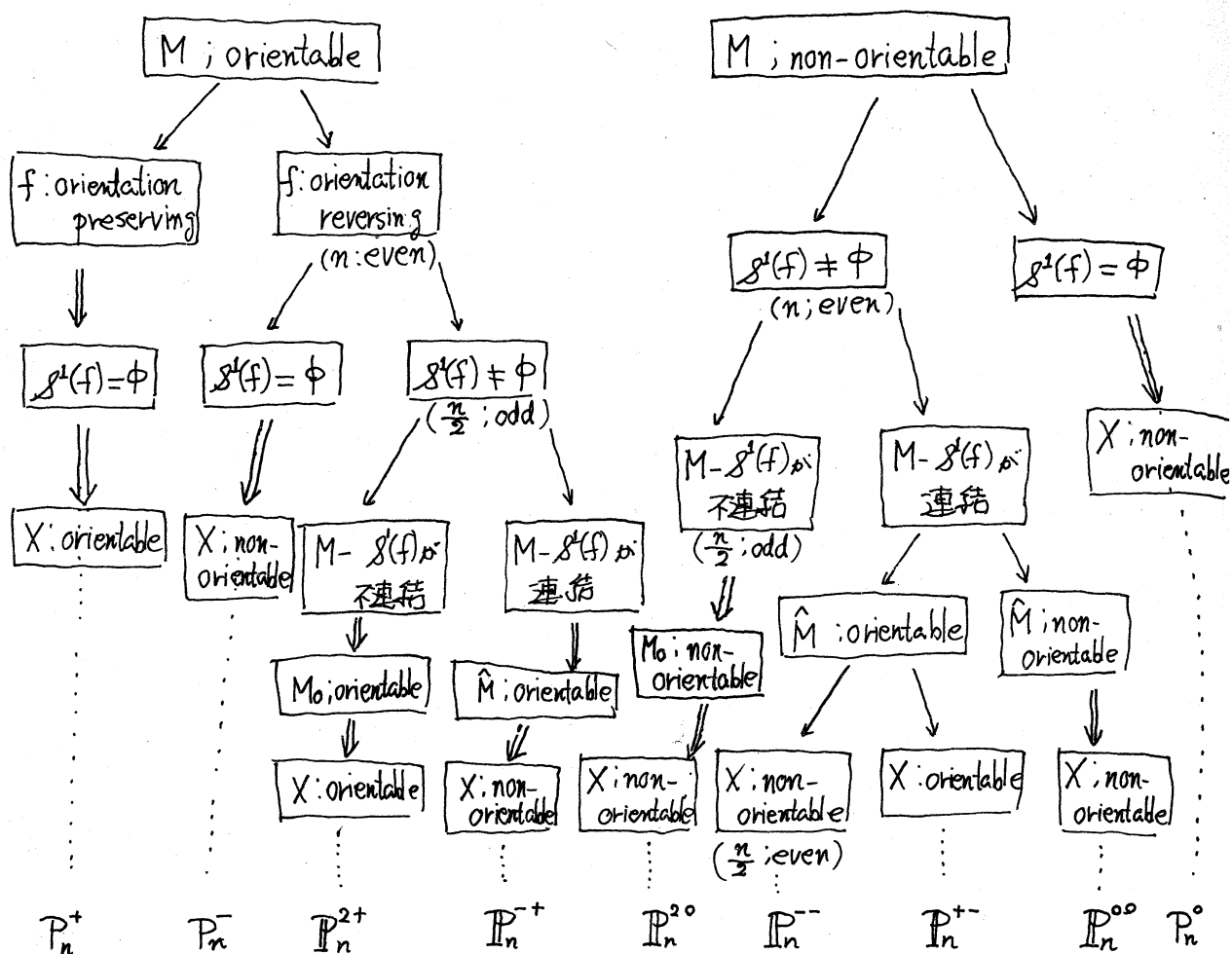
$\tilde{t}_a^-(v) = \{ \Phi_w^- ; f^a(\Phi_w^-) = \Phi_w^-, f^b(\Phi_w^-) \neq \Phi_w^- (1 \leq b < a),$

かつ $\bar{\omega}$ に属する arc の数 $\frac{n}{2a}v$ の元の個数

として $P_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g}, \hat{l}, \hat{m}, \hat{g}, \hat{g}^-, \hat{t}^+, \hat{t}^-; \hat{g}, \hat{m}, \hat{g}^+, \hat{g}^-, \hat{t}^+, \hat{t}^-)$ に
 対応させて, (このとき $\hat{g}_{2a}^+ = 2 \cdot \hat{g}_a^+$, $\hat{g}_a^- = \hat{g}_{2a}^-$, $\hat{t}_{2a}^+(v) = 2 \cdot \hat{t}_a^+(v)$
 $\hat{t}_a^-(v) = \hat{t}_{2a}^-(v)$ (但し $\hat{t}_a^-(v)$ の arc の数は $\frac{n}{2a}v$ 本) となり), その次
 は §2 と同様にして $l_a, m_a, g_{2a}^+, g_a^-, t_{2a}^+(v), t_a^-(v)$ を求めて
 ($g_{2a}^+, t_{2a}^+(v) \neq 0$ なのは even z $2a \nmid \frac{n}{2}$, $g_a^-, t_a^-(v) \neq 0$ なのは $a \mid \frac{n}{2}$)
 $X = M/f = \hat{M}/\hat{f}$, $p(g^1(f)) = S^1$, $p(g^0(f)) = S^0$, $S = S^1 \cup S^0$ とおい
 て X の genus g , $2X$ のうち $d_j \cap S^1 = \emptyset$ なるものの数 l , $d_a^u \subset S^1$
 なるものの数 g ($= g^+ + g^-$), $d_w^{(v)} \cap S^1$ の v 本の arc からなる
 ものの数 $t(v)$ ($= t_a^+(v) + t_a^-(v)$), S^0 の点の数 m として
 $[H_1(X-S^0); \mathbb{Z}_n]^*$ の A -同値類の完全代表系に §2 の条件④
 と同様な条件をつけたものを求めれば §2 の定理 5.6.7 と
 同様な定理がえられる。(詳細省略) 長くな, てしま, そ
 ので §3 は定理が, また全てにわた, て証明はつけられませ
 んでした。



<まとめ>



参考文献

- [1] Tohl Asoh " Classification of free involutions on surfaces " Hiroshima Math. Jour., 6 (1976), 171-181.
- [2] D.R.J. Chillingworth " A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface " Proc. Camb. Phil. Soc., 65 (1969), 409-430.
- [3] W.R.B. Lickorish " Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds " Proc. Camb. Phil. Soc., 59(1963), 307-317.

- [4] W.R.B. Lickorish " A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold " Proc.Camb.Phil.Soc., 60 (1964), 769-778. Corrigendum; 62 (1966), 679-681.
- [5] P.A. Smith " Abelian actions on 2-manifolds " Michigan Math.Jour., 14(1967), 257-275.
- [6] Shin'ichi Suzuki " On homeomorphisms of 3-dimensional handlebody " Can.Jour.Math., 29 (1977), 111-124.
- [7] G.T. Whyburn " ANALYTIC TOPOLOGY " Amer.Math.Soc.Colloquium Publ., 28, Amer.Math.Soc., 1942.
- [8] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on compact surfaces " Tokyo Jour.Math., to appear.
- [9] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on compact surfaces II " to appear.
- [10] K. Yokoyama " A complete classification of periodic maps on compact surfaces " preprint.
- [11] K. Yokoyama " A classification of periodic maps on 2-manifolds " 京都大学数理解析研講究録 369「3次元多様体の構造と位置の問題」 1979年11月 8 - 30