

# 液体 $\text{He}^4$ 表面に吸着した $\text{He}^3$ 原子の 衝突時間の計算

京大・理 大 見 哲 巨

(2月4日受理)

## §1 Introduction

液体 $\text{He}^4$  の表面に $\text{He}^3$  atom の bound state が存在するということが Andreev<sup>1)</sup> により,  $\text{He}^4$  の表面張力の温度変化を説明するために最初に指摘され, 実験的にも確かめられている。さらに Andreev 達<sup>2)</sup> は, このような表面で成立する二流体の運動方程式を導いている。

我々はこの, 表面での $\text{He}^3$  輸送現象を考える。そのための第一歩として, まず,  $\text{He}^3$  の collision time の計算を行う。collision time が直接観測にかかってくる現象として, 我々は spin の diffusion を考えている。collision time の計算にあたって, まず $\text{He}^3$  atom が表面に1個だけ付いた場合を考え, その後で $\text{He}^3$  atom どうしの相互作用を考えるというように問題を整理し, この論文では, 1個の $\text{He}^3$  atom と $\text{He}^4$  の表面, すなわち表面波との相互作用を考えることにする。

ところで, 上の条件を満足する十分 dilute な  $\text{He}^3$  が実験的に実現可能かどうかを考える。 $\text{He}^4$  の中に入った $\text{He}^3$  atom は低いエネルギーレベルが存在する表面に集まり, そこで one atomic または two atomic layer を形成した後 bulk の中に入っていくと考えられるので, bulk の mixture では, ここで必要とするように,  $\text{He}^3$  の concentration を小さくすることは不可能であろう。しかし, もし film にして考えれば, 上の条件を満足させることができる。たとえば, concentration が  $10^{-6}$  の mixture で film を作った, と考えれば, film の厚さ,  $d \sim 10^{-6}$  cm とした時には, 液体 $\text{He}^4$  の one atomic layer の厚さは,  $n$  を  $\text{He}^4$  の atomic density とした時,  $1/(n)^{\frac{1}{3}} = 3 \text{ \AA}$  程度であるから, 表面での $\text{He}^3$  の concentration  $x$  を  $x = n_3/(n)^{\frac{2}{3}}$ , ( $n_3$  は表面での単位面積あたりの $\text{He}^3$  の個数) で定義すれば,  $x = 10^{-4}$  程度になる。勿論, 十分 dilute であるかどうかは問題によってちがうわけで,

$\text{He}^3$  の collision time が表面波との相互作用で決まる条件については、後で考察する。

さらに、表面についた  $\text{He}^3$  atom が凝集しているのではないかという疑問もあるが、 $\text{He}^4$  の表面においては、粒子が付きやすい特定の site といったものは存在しないので graphite の表面における場合以上に二次元の gas になりやすい傾向があるものと思われる。

## §2 pure $\text{He}^4$ の表面波

超流動  $\text{He}^4$  の運動は、healing distance より大きな距離での変化を考える限り、流体力学で記述できる。さらに、表面波の場合には、非圧縮性完全流体 (ideal fluid) の方程式を用いて運動が議論できる。表面波の波長が表面の厚さ (密度が液体から気体へ変化する部分の厚さ) に比較して大きいときは、表面波によって、表面はその密度変化の構造を変えずに位置だけが変化するという近似がよいことも知られている。<sup>3)</sup> このことから ideal fluid を用いる近似は、波長の長い表面波を問題にする限りそんなに悪くないものと思われる。このように ideal fluid で近似すると、表面波の dispersion relation は簡単に求めることができる。それは、

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} k^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $k$  は波数、 $\alpha$  は表面張力、 $\rho$  は流体の mass density である。ここで、後での議論のためにも、分散関係が、(1) で与えられ quasiparticle の thermal な波数  $k_T$  の order を estimate しておく。 $k_T = \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{2}{3}}$ , これに  $\rho = 0.145 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\alpha = 0.35 \text{ dyn cm}^{-1}$  を入れると  $k_T = 2 \cdot 10^7 T^{\frac{2}{3}}$  となる。次に厚さ  $d$  の film の表面に立つ表面波を考えると、外傷 (重力又は van der Waals 力) の影響も考慮して、

$$\omega_k^2 = \left[ f k + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right] \tanh k d \quad (2)$$

となる。 $f$  は表面の  $\text{He}^4$  atom の unit mass に働く力である。もし、 $d$  が  $10^{-6}$

cm 程度までしか考えないとすると,  $k \gg 10^6$  では, (2) は (1) に一致する。したがって,  $T \sim 1^\circ\text{K}$  として, thermal な波数  $k_T$  及びそれより少し小さい程度の, 我々が以下で取り扱う表面においては, dispersion relation に (1)式を用いてよいことがわかる。

ところで, (1) 式のような, 上に反った分散曲線を持った quasiparticle を考える時, energy, momentum を保存して, 二つの quasiparticle への崩壊が常に可能である。したがって, この quasiparticle がよい mode として存在するかどうか疑問である。そのためにも, その life time の計算は必要である。

### 1) 表面波間の相互作用

ideal fluid の方程式を用いて, 表面波間の相互作用を求める。まず, 表面を,  $x-y$  平面に平行,  $z=0$  にとると, 密度分布  $\rho$  は,

$$\rho(z) = \rho \quad z \leq 0$$

$$\rho(z) = 0 \quad z > 0$$

である。次に, 表面の変位を  $Q(x, y, t)$  とすると, 表面張力による potential energy は,

$$V = \alpha \int dx dy \left[ 1 + (\nabla Q)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

で与えられる。ここで,  $\nabla Q$  は  $x, y$  方向, 二次元の gradient を表わしている。次に, 速度 potential  $\phi$ , その三次元 gradient を  $\vec{\nabla} \phi$  で表わすと,  $\phi$  は, Laplace 方程式を満足する。

$$(\vec{\nabla})^2 \phi = 0 \quad (4)$$

また, kinetic energy は次のようになる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \int (\vec{\nabla} \phi)^2 dV \\ &= \frac{\rho}{2} \int \phi \vec{\nabla} \phi \cdot dS \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{z=Q(x,y,t)} \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla Q \cdot \nabla \phi \right) dx dy \quad (5)$$

最後の式で、 $\nabla \phi$  は、二次元の gradient である。さらに、表面の条件を考慮すると表面における流れは表面に沿ってしか流れることができない。したがって、

$$\dot{Q} + \nabla \phi \cdot \nabla Q - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

を満足しなければならない。ただし、(6) 式で、 $\dot{Q}$  は  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  を表わし、 $\phi$  の  $z$  座標は、 $Q(x, y, t)$  である。

(5)、(6) 式を用いて、 $Q$  に canonical conjugate な量  $P$  を求める。

(4) より、 $z \rightarrow -\infty$  で 0 になる速度ポテンシャルを次のように展開する。

$$\phi = \sum \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + k z} \quad (7)$$

$\mathbf{k}, \mathbf{x}$  は二次元ベクトル

(7) 式を (6) 式に代入し、 $Q$  及び  $\dot{Q}$  について展開した形で  $\phi$  を求めると、

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}} &= \phi_{\mathbf{k}}^{(0)} + \phi_{\mathbf{k}}^{(1)} + \phi_{\mathbf{k}}^{(2)} + \dots \\ \phi_{\mathbf{k}}^{(0)} &= \frac{\dot{Q}_{\mathbf{k}}}{k}, \quad \phi_{\mathbf{k}}^{(1)} = - \sum \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)}{k \cdot k_1} \dot{Q}_{\mathbf{k}_1} Q_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}, \\ \phi_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \sum \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{k \cdot k_1 \cdot k_2} \dot{Q}_1 Q_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} Q_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_2} \\ &\quad - \sum \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) - \frac{1}{2} k_1^2}{k} \dot{Q}_1 Q_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} Q_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_2} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

また、 $Q_{\mathbf{k}}$  に canonical conjugate な  $P_{\mathbf{k}}$  は、

$$P_{\mathbf{k}} = \frac{\delta T}{\delta \dot{Q}_{\mathbf{k}}} = \frac{\rho}{2} \frac{\delta}{\delta \dot{Q}_{\mathbf{k}}} \psi_{-\mathbf{k}} \dot{Q}_{\mathbf{k}} \quad (9)$$

$$\psi_{-\mathbf{k}} = \int \sum_{\mathbf{k}'} \phi_{\mathbf{k}'} e^{i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{Q}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^2 x$$

(8) 式にあらわれているように,  $\phi_{-\mathbf{k}}$  は展開の各項で  $\dot{Q}$  を一つしかふくんでいないので,  $\psi_{-\mathbf{k}}$  も  $\dot{Q}$  を一つしかふくまない。したがって,

$$P_{\mathbf{k}} = \rho \psi_{-\mathbf{k}} \quad (10)$$

となる。 $\psi_{-\mathbf{k}}$  は,  $\phi(x, y, Q(x, y), t)$  の Fourier 変換で, (10) は reasonable な結果であると考えられる。

以上より, Hamiltonian は,

$$H_s = \frac{1}{2} \sum P_{\mathbf{k}} \dot{Q}_{\mathbf{k}} + V \quad (11)$$

となる。

したがって, interaction には, (3) 式の  $V$  を  $Q$  で展開した項の他に,  $\dot{Q}_{\mathbf{k}}$  を  $P_{\mathbf{k}}$  及び  $Q_{\mathbf{k}}$  で表わした時出てくる項があることがわかる。(8), (9), (10) から,  $P_{\mathbf{k}}$  を  $Q_{\mathbf{k}}$ ,  $\dot{Q}_{\mathbf{k}}$  の展開式の形で求め, 逆にこれを,  $\dot{Q}_{\mathbf{k}}$  について解いて (11) に代入すると,  $H_s$  は,

$$H_s = H_s^{(0)} + H_s^{(1)} + H_s^{(2)} + \dots$$

$$H_s^{(0)} = \sum \frac{1}{2\rho} \frac{P_{\mathbf{k}} P_{-\mathbf{k}}}{k} + \sum \frac{\alpha}{2} k^2 Q_{\mathbf{k}} Q_{-\mathbf{k}}$$

$$H_s^{(1)} = -\frac{1}{2\rho} \sum [k_1 \cdot k_2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)] P_1 P_2 Q_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}$$

$$H_s^{(2)} = \frac{1}{8\rho} \sum k_1 \cdot k_2 (k_3 + |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - k_1 - k_2)$$

$$\cdot P_1 P_2 Q_{-\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2} Q_{\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1}$$

$$- \frac{\alpha}{8} \sum (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$$

$$\cdot \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} \quad (12)$$

と求められる。したがって、生成、消滅演算子  $a_{\mathbf{k}}^+$ ,  $a_{\mathbf{k}}$  を、

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{k}} &= i(\rho \omega_{\mathbf{k}}/2k)^{\frac{1}{2}} (a_{\mathbf{k}}^+ - a_{-\mathbf{k}}) \\ Q_{\mathbf{k}} &= (k/2\rho \omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}} (a_{-\mathbf{k}}^+ - a_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (13)$$

で定義すると、 $H_s^{(0)}$  は、

$$H_s^{(0)} = \sum \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}$$

になる。ここで、 $\omega_{\mathbf{k}}$  は (1) 式で与えられている。また、 $H_s^{(1)}$  において、emission-absorption type の項をひろうと、

$$\begin{aligned} H_s^{(1)} &= \frac{1}{(32\rho)^{\frac{1}{2}}} \sum \left( \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{k_1 k_2 k_3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \left\{ k_1 \cdot k_2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \right\} \frac{k_3}{\omega_3} - \left\{ k_2 \cdot k_3 - (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) \right\} \frac{k_1}{\omega_1} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ k_1 \cdot k_3 - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) \right\} \frac{k_2}{\omega_2} \right] \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \\ &\quad \cdot (a_{\mathbf{k}_1}^+ a_{\mathbf{k}_2}^+ a_{\mathbf{k}_3} + \text{c.c.}) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。また、 $H_s^{(2)}$  についても、scattering type の interaction を同様に求めることができる。

## ii) 表面波の life time

相互作用、 $H_s^{(1)}$ ,  $H_s^{(2)}$  を用いて表面波の life time の計算を行う。まず、 $H_s^{(1)}$  を用いて最低次のグラフは、図1で与えられる。

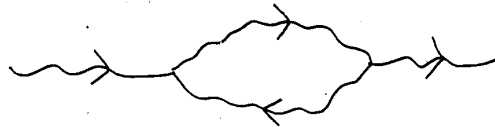


図 1

wavy line は、表面波の propagator

$$D(\omega_n, k) = \frac{1}{i\omega_n - \omega_k} \quad (15)$$

$$\omega_n = 2\pi n T$$

を表わしている。

図1のグラフで表わす self energy の Imaginary part は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi^{(1)}(\omega_k, k) &= -\frac{\pi}{8\rho} (1 - e^{-\beta\omega}) \sum \frac{\omega}{k} \frac{\omega_1}{k_1} \frac{\omega_2}{k_2} \left[ \{k \cdot k_1 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)\} \frac{k_2}{\omega_2} \right. \\ &\quad \left. - \{k \cdot k_2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2)\} \frac{k_1}{\omega_1} - \{k_1 \cdot k_2 - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)\} \frac{k}{\omega} \right]^2 (1 + n_1) n_2 \\ &\quad \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2) \delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}$$

である。

まず、 $k$  が thermal momentum  $k_T$  に比較して十分小さい場合の (16) 式の計算をする。積分変数を  $k_1, k_2$  にとると、この場合、 $k_1, k_2 \sim k$  の order からの寄与が、積分に主にきいていることがわかる。dimensionless の量、 $x_1 = k_1/k$ ,  $x_2 = k_2/k$  を導入すると、(16) 式は、

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi^{(1)}(\omega_k, k) &= -\frac{1}{16\pi\rho} \frac{k^5 T}{\omega_k} \int_0^\infty \left[ \frac{2x_1 + x_2^2 - x_1^2 - 1}{2} x_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x_2 + x_1^2 - x_2^2 - 1}{2} x_1 - \frac{1 + 2x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(2x_1 - x_2^2 + 1 + x_1^2)(2x_1 + x_2^2 - 1 - x_2^2)}} \delta(1 + x_1^{\frac{3}{2}} - x_2^{\frac{3}{2}}) \quad (17)$$

となる。ここで、積分は、1 の order の定数を与える。

図1のグラフの中間状態の積分で、積分変数が  $k$  の order の領域が効いているということから、図2のグラフも同じ order の寄与をすることがわかる。

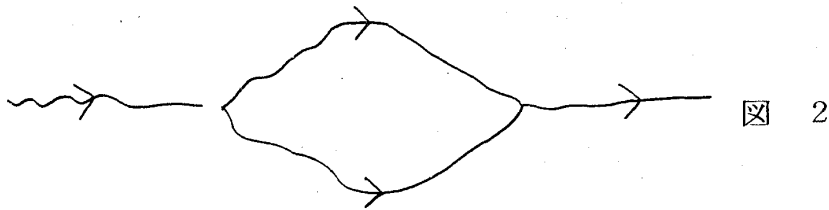


図 2

図1の場合と同様にして、

$$\begin{aligned} & \text{Im } \pi^{(2)}(\omega_k, k) \\ &= -\frac{1}{32\pi\rho} \cdot \frac{k^5 T}{\omega_k} \int_0^\infty \left[ \frac{1 + 2x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2}{2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2x_2 + x_1^2 - x_2^2 - 1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} - \frac{2x_1 + x_2^2 - x_1^2 - 1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} \right] \\ & \quad \cdot \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(2x_1 - x_2^2 + 1 + x_1^2)(2x_1 + x_2^2 - 1 - x_2^2)}} \\ & \quad \delta(1 - x_1^{\frac{3}{2}} - x_2^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \quad (18)$$

が求められる。(17) 同様、(18) の積分は、1 の order の定数を与える。

次に、thermal な表面波のエネルギー巾を与える。その order は (16) 式等から簡単に estimate できて、 $\frac{k_T^5}{\rho}$  である。このエネルギー巾を温度の order のエネルギーで割ったものが、

$$\frac{k_T^5}{\rho T} = 0.16 \cdot T^{\frac{7}{3}} \quad (19)$$

であることと、後でわかるように、thermal な excitation では、図 1, 図 2 のグラフが主な寄与をしていることから、thermal な表面波は  $T \lesssim 1^\circ \text{K}$  では十分よい mode であることがわかる。さらに、 $k \ll k_T$  の mode のエネルギー巾について考える。

(17) (18) の大きさの order  $k^5 T / \rho \omega_k$  を  $\omega_k$  で割った  $\frac{k_T^3 k^2}{\rho T}$  を (19) と比較して、長波長でも、図 1, 図 2 による damping があまり大きくないことが確かめられる。

次に、高次のグラフ図 3, 図 4 を考える。

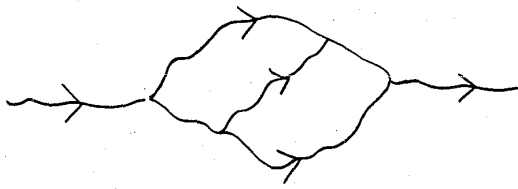


図 3

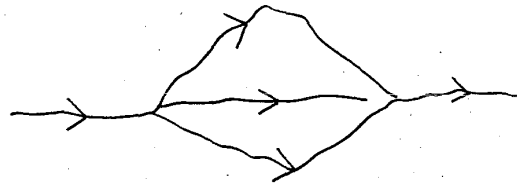


図 4

図 4 は  $H_s^{(2)}$  を用いた最低次のグラフである。 $k \ll k_T$  の場合における図 3, 図 4 の self energy の Imaginary part を考える。この場合、図 2 の場合とちがって、図 3, 図 4 とともに中間状態は、 $k_T$  の order からの寄与が主である。

$\text{Im } \pi^{(3)}$ ,  $\text{Im } \pi^{(4)}$  は同じ order で

$$\text{Im } \pi^{(3)}, \quad \text{Im } \pi^{(4)} \sim \frac{k^3 k_T^7}{\rho^2 T} \quad (20)$$

したがって、 $\text{Im } \pi^{(1)}$ ,  $\text{Im } \pi^{(2)}$  と比較して、 $\text{Im } \pi^{(3)}$ ,  $\text{Im } \pi^{(4)}$  がききだす領域は、

$$\frac{k_T^5}{\rho T} \left( \frac{k_T}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \gg 1 \quad (21)$$

である。数値的には、(21) の条件は

$$5.1 \cdot 10^5 \cdot T^{\frac{16}{3}} \gg k \quad (21)'$$

となる。

ところで, (21) の条件は,

$$v_T = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_T},$$

そして,  $\tau_T$  を thermal な表面波の collision time とした時の collisionless から, hydro の領域にうつる条件

$$k v_T \tau_T \ll 1 \quad (22)$$

と比較して,  $(\frac{k}{k_T})^2$  だけ order にちがいがある。これは, bulk sound の場合<sup>4)</sup> とちがって,  $\text{Im } \pi^{(1)}$ ,  $\text{Im } \pi^{(2)}$  で,  $k$  の order の中間状態がきいていることによるからで, もし, 中間状態を thermal momentum にとれば, これらの条件は一致する。

### §3 $\text{He}^3$ の collision time

§2 の議論により, thermal な表面波が  $T \lesssim 1^\circ\text{K}$  では十分よい mode になっていること。また, momentum を thermal より小さくしていった時, どこまで collisionless mode として取り扱えるか等の条件が明らかになった。この § では, この表面波と  $\text{He}^3$  の相互作用による  $\text{He}^3$  の collision time の計算をする。

まず,  $\text{He}^4$  の表面における  $\text{He}^3$  の energy は,

$$\epsilon_p = \frac{p^2}{2 m_3^*} + \Delta \quad (23)$$

で与えられる。ここで,  $m_3^* \cong 2 m_3$  (以下の計算は  $m_3^* = 2 m_3$  として行う。),  $m_3$  は  $\text{He}^3$  の bare mass,  $\Delta$  は bulk  $\text{He}^4$  中の  $\text{He}^3$  の最低エネルギーから量って  $-2^\circ\text{K}$  程度である。次に,  $\text{He}^3$  と表面波の相互作用を考える。表面波による流れに  $\text{He}^3$  が乗っているためのエネルギー変化は, bulk の場合と同様に,

$$H_i^{(1)} = \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad (24)$$

$$H_i^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} m_3 \cdot v^2 \quad (25)$$

で与えられる。

ここで,  $\delta m_3^* = m_3^* - m_3$ ,  $p$  は  $\text{He}^3$  の momentum,  $v$  は表面波による流れの速度である。次に, 表面が平面から変形することによる  $\Delta$  の変化を考える。ここで,  $m_3^*$  への影響を一応考えないことにする。 $\text{He}_3$ ,  $\text{He}^4$  の相互作用が short range であることを考慮すると,  $\Delta$  の変化は, 変位  $Q$  に直接関係するのではなく, 表面の curvature に依存することが期待される。Appendixでみるように, このようにして得られた相互作用は,  $H_i^{(1)}$ ,  $H_i^{(2)}$  と比較して小さくなることが証明できる。相互作用は,  $H_i^{(1)}$ ,  $H_i^{(2)}$  だけで考える。

以上のように, 表面波と  $\text{He}^3$  面の相互作用が求められた。これを用いて, 次に,  $\text{He}^3$  の life time の計算にうつるまず,  $H_i^{(1)}$  を用いて,  $\text{He}^3$  が表面波を吸収又は放出することによる damping は, 図5のグラフから得られる。

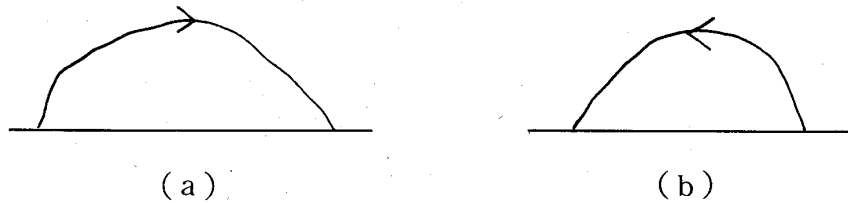


図 5

表面波を吸収する図5(a)の場合には,

$$\begin{aligned} & \text{Im } \Sigma^{(1a)}(p, \epsilon_p) \\ &= -\pi \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (n_k + 1) \left( \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} \right) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2 \frac{\omega_k}{2\rho k} \delta(\epsilon_p + \omega_k - \epsilon_{p+k}) \end{aligned} \quad (26)$$

となる。したがって, この process が real に起こるためには, 次の条件が必要である。

$$\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m_3^*} \leq \omega_k \quad (27)$$

$p$  を  $\text{He}^3$  の thermal momentum  $p_T = (2 m_3^* T)^{\frac{1}{2}} = 5.25 T^{\frac{1}{2}}$  として, (27) の条件から決まる表面波の critical momentum を求める。

$$k_c = \frac{2 T}{m_3^* \frac{\alpha}{\rho}} = 1.14 \cdot 10^7 T \quad (28)$$

$k_c$  を hydro-mode と collisionless-mode の移り変わりの条件 (21)' と比較すると,  $T \sim 1^\circ\text{K}$  では,  $k_c$  のあたりで collisionless mode であることがわかる。

以上のことを考慮して (26) の計算を行う。  $\omega_{k_c} \ll T$  であるため, 図 5 (b) もまったく同じ寄与があり, 二つ合せて,

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma^{(1)}(p_T; \epsilon_{p_T}) &= -\frac{4}{15\pi} \left( \frac{\delta m_3^{*2}}{m_3^*} \right) \frac{\rho}{m_3^{*4} \alpha^2} p_T^7 \\ &= 2.0 \cdot 10^{-2} T^{\frac{7}{2}} \text{ } ^\circ\text{K} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

次に, higher order のグラフを考える。

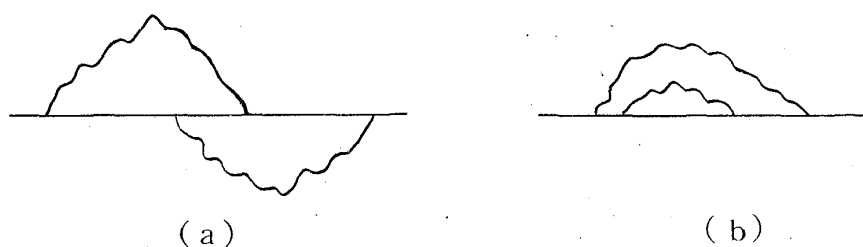


図 6

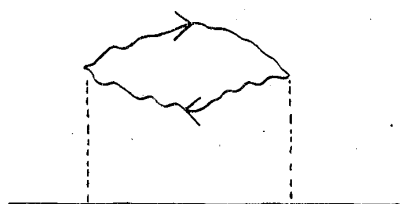


図 7

図6は $Hi^{(1)}$ の4次, 図7は $Hi^{(2)}$ の2次のグラフである。これらのグラフで表わされる self energy の Imaginary part は, まず, 図6(a)の type で, 同じ寄与を与えるふたつのグラフがあることに注意して,

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi^{(2a)}(p, \epsilon_p) &= 2 \int \frac{d^2 k_1 d^2 k_2}{(2\pi)^4} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \frac{\omega_1}{2 \rho k_1} \\ &\cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \frac{\omega_2}{2 \rho k_2} \cdot \frac{1}{\epsilon_p - \omega_{k_1} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_1}} \cdot \frac{1}{\epsilon_p + \omega_{k_2} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_2}} \\ &\cdot n(k_1)(n(k_2)+1) \pi \delta(\epsilon_p + \omega_{k_1} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_1} + \omega_{k_2} - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_2}) \quad (30) \end{aligned}$$

となる。

(30)は,  $p$  を thermal momentum にとり,  $He^3$  の thermal momentum に比較し, 表面波の thermal momentum を無視する近似をとれば解析的に計算できる。この近似の範囲で図6(b)も同じ結果を与えることに注意し, (a), (b) 合わせて,

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi^{(2)}(p, \epsilon_p) &\approx - \frac{\Gamma(\frac{9}{2}) \zeta(\frac{7}{2})}{96 \pi} \left( \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} \right) \frac{1}{m_3^{*3} \alpha^2} p_T^{10} \\ &= - 2.4 \times 10^{-2} T^5 \text{ } ^\circ K \quad (31) \end{aligned}$$

となる。ここで,  $\zeta(x)$  はツェータ関数で, また,  $\zeta(\frac{7}{2})$  はほとんど1に等しい定数である。また,  $p_T \gg k_T$  とした近似は,  $p_T = 5.25 \cdot 10^7 \cdot T^{\frac{1}{2}}$ ,  $k_T = 2 \cdot 10^7 T^{\frac{2}{3}}$  を考えるとあまりよい近似とはいえないかもしれない。しかし, (30)を $\frac{k_T}{p_T}$ で展開すると, (31)の次の項は $(\frac{k_T}{p_T})^2$ から現われる。このことを考慮して, (31)はせいぜい factor 2 程度の範囲で正しい値を与えていることを期待する。

次に, 図7の寄与も図6の場合と同じ様に  $p_T \ll k_T$  として計算できる。

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi^{(3)}(p, \epsilon_p) &= - \frac{\Gamma(\frac{15}{2}) \zeta(\frac{13}{2})}{3 \cdot 2^{11} \pi} \cdot \left( \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} \right)^2 \cdot \frac{m_3^2}{m_3^{*5} \alpha^2} p_T^{10} \\ &= - 5.6 \cdot 10^{-2} T^5 \text{ } ^\circ\text{K} \end{aligned} \quad (32)$$

$T^5$  に比例する damping は, (31), (32) を合わせて, 数値的には  $8.0 \cdot 10^{-2} T^5$   $^\circ\text{K}$  になる。したがって,  $T \sim 0.4 \text{ } ^\circ\text{K}$  を境にして damping は, それより高い温度では  $T^5$ , 低い温度では  $T^{\frac{7}{2}}$  で変化する。

次に, さらに高次のグラフを考える。この時には, 分布函数のかかっていない momentum 積分があらわれるが, この積分は,  $Hi^{(1)}$ ,  $Hi^{(2)}$  どちらの場合にも発散してしまう。したがって, 適当な cut-off momentum  $k_0$  を導入しなければならない。 $k_0$  で cut-off すると  $Hi^{(1)}$  を用いた perturbation は,  $\frac{1}{8\pi} \left( \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} \right)^2 \cdot \frac{k_0^5}{\rho \omega_{k_0}}$  による展開であることがわかる。ここで, この展開 parameter は,  $Hi^{(1)}$  の二乗を中間状態のエネルギー  $\omega_{k_0}$  で割り, さらに momentum space の面積  $\pi k_0^2 / (2\pi)^2$  を掛けて求めた。 $Hi^{(2)}$  による展開の parameter も同様にして求め,  $\frac{1}{16\pi} \cdot m_3 \left( \frac{\delta m_3^*}{m_3^*} \right) \cdot \frac{k_0^3}{\rho}$  である。これらの展開 parameter は,  $k_0$  を  $1.4 \cdot 10^8$  より小さくすれば 1 より小さい。 $k_0$  が上の値より小さいのは reasonable であろう。

最後に, bulk sound の影響を考えておこう。bulk の中を伝わってきた sound は表面において表面張力を考慮することにより, 次の境界条件を満足しなければならない。それは, 速度ポテンシャル  $\phi$  を用いて,

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (33)$$

のように表わされる。したがって, 振動数  $\omega$ , 波数ベクトル  $k$  の phonon の速度ポテンシャルは, 次のように phase shift する。

$$\phi = A \sin(k_z \cdot z - \delta) e^{i k x}$$

$$\delta = \frac{\alpha k_z (k_x^2 + k_y^2)}{\rho \omega^2} \quad (34)$$

ただし、表面は  $z = 0$  にとってある。ここで、 $k$  の order を phonon の thermal momentum

$$k_{pT} = \frac{T}{c} = 5.8 \cdot 10^6 T$$

にとると、

$$\delta \sim \left( \frac{k_{pT}}{k_T} \right)^3 = 2.4 \cdot 10^{-2} T$$

である。また、He<sup>3</sup> との相互作用の領域は、表面の He<sup>3</sup> の  $z$  方向へのひろがり  $d \sim 10^{-8}$  cm の範囲に限定されるため、 $z \sim d$  とおける。そして、 $k_{pT} d > \delta$  である。bulk sound と表面の He<sup>3</sup> の相互作用の場合も、(24)、(25) の  $H_i^{(1)}$ 、 $H_i^{(2)}$  の形を考える。しかし、phonon では表面波とちがって、図5のような吸収、放出は real には起こらない。したがって、最低次は Born 散乱 type が考えられる。一方、(34) を量子化して生成、消滅演算子を使って書けば、

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\vec{k}} i \left( c/2 \rho |\vec{k}| \right)^{\frac{1}{2}} \left( a_{\vec{k}}^+ - a_{-\vec{k}} \right) k_z d e^{i \vec{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (35)$$

となる。(35) と (13) を比較すれば、phonon による damping と表面波による damping の order のちがいが計算できる。momentum をすべて thermal momentum で置き換える、phonon の場合、phase space の積分は三次元的で、表面波と比較して、momentum の一乗 factor がちがってくるに注意すれば、phonon の damping が  $(k_{pT}/k_T)^6 (k_{pT} d)^4$  だけ order が小さいことがわかる。この order は、明らかに無視できる。

#### §4 discussion

前の節で得られた He<sup>3</sup> の表面波による collision time がどの程度まで有効であるかを議論しておく。表面波による collision time は、

$$\frac{1}{\tau_0} = 2.2 \cdot 10^{10} (0.25 T^{\frac{7}{2}} + T^5) \quad (36)$$

また,  $\text{He}^3$  どうしによる collision time を,  $a$  を cross-diameter として次の式で与えたとすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_3} &= n_3 \cdot a \cdot \frac{p_T}{m_3^*} = \frac{n^{\frac{2}{3}} X a p_T}{m_3^*} \\ &= 4.1 \cdot 10^{10} T^{\frac{1}{2}} \cdot a X \end{aligned} \quad (37)$$

ここで,  $a$  は  $\text{\AA}$  を単位にとっている。  $\tau_3 \gg \tau_s$  の条件は, (36), (37) を比較することにより,

$$X \ll 5.4 \cdot 10^{-1} \frac{1}{a} (0.25 T^3 + T^{\frac{9}{2}}) \quad (38)$$

であれば満足される。(38) の条件は実現可能であろう。

この論文を終るに当り, 熱心にこの問題を議論してくださった恒藤教授に感謝の意を表したい。

## Appendix

Lekner<sup>5)</sup> によって与えられたように  $N$  コの  $\text{He}^4$  原子からなる系において, 1 コの  $\text{He}^4$  原子を  $\text{He}^3$  原子に置き換えた時の波動関数を  $f(\mathbf{x}_1) \Psi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N)$  —  $\Psi_0(\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N)$  は pure  $\text{He}^4$  の基底状態の波動関数 — と書くと,  $\text{He}^3$  で置き換えたことによる基底状態のエネルギー変化は,

$$E = \frac{1}{3m_3} \int d^3x \{ (\nabla f)^2 \cdot n(\mathbf{x}) + r f^2(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}) \} \quad (\text{A-1})$$

$$I = \int d^3x f(\mathbf{x}) n(\mathbf{x}) \quad (\text{A-2})$$

ここで,

$$n(\mathbf{x}_1) = \int \Psi_0^2 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \quad (\text{A-3})$$

$$\nu(\mathbf{x}_1) = \int \Psi_0 (-\nabla_1^2) \Psi_0 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \quad (\text{A-4})$$

$$r = \frac{m_4 - m_3}{m_4}$$

で、E と I を与えると、 $M_{\min}(E/I)$  で与えられる。また、その時 f は、方程式

$$\nabla(n \nabla f) + (\lambda n - r \nu) f = 0 \quad (\text{A-5})$$

$$\lambda = 2 m_3 (E/I)_{\min} \quad (\text{A-6})$$

を満足する。したがって、pure He<sup>4</sup> における密度分布 n，運動エネルギーの密度  $\nu$  がわかれば，f および  $\lambda$  は決めることができる。この方法を用いて Saam<sup>6)</sup> は平らな He<sup>4</sup> 表面についた He<sup>3</sup> のエネルギーを計算し，bulk の中に入った He<sup>3</sup> 原子のエネルギーと比較して，約 1.3°K 低い実験値とあまりちがわない束縛エネルギーを得ている。彼は，境界を x-y 平面に平行とし，He<sup>4</sup> 原子 1 個あたりの束縛エネルギー  $\epsilon_B = 7.15^\circ\text{K}$ ，bulk He<sup>4</sup> の密度  $n_b$  を用いて，密度分布 n を

$$n_0(z) = \frac{n_b}{1 + e^{\alpha z}} \quad (\text{A-7})$$

$$\alpha/2 = (2 m_4 \cdot \epsilon_B)^{\frac{1}{2}}$$

のように与え， $\nu(z)$  についても 13 aym の議論を用いて近似的に決めている。

上述の方法を用いて曲率半径 R の He<sup>4</sup> 表面における He<sup>3</sup> 原子の基底状態について考える。He<sup>4</sup> が半径 R の円筒を作っているとし，円筒の中心軸を z 軸とした円筒座標を用いて議論する。(A-5)，(A-6) によれば，曲率半径が有限であることの影響は，n， $\nu$  をとおしてあらわれているはずである。すなわち，n， $\nu$  が  $n = n_0 + \delta n$ ， $\nu = \nu_0 + \delta \nu$  と  $\frac{1}{R}$  の order の量まで展開して求めたとすると，He<sup>3</sup> のエネルギーの変化は，(A-1)，(A-2) より，

$$\delta \frac{E}{I} = \frac{1}{2 m_3} \int d^3 x \left[ \{(\nabla f_0)^2 - \lambda_0 f_0^2\} \delta n + r f_0 \delta \nu \right] / \int d^3 x f_0^2 n_0 \quad (\text{A-8})$$

ただし,  $f_0, \lambda_0$  は境界が平面の時の  $\text{He}^3$  の波動関数及びエネルギーである。したがって,  $\frac{1}{R}$  の曲率半径を持った表面近くでの pure  $\text{He}^4$  系の密度及び運動エネルギーの変化を考えなければならない。そのうち, まず  $n$  について考える。van der Waals の mean field theory によれば, 気体 — 液体の境界での密度  $n(\mathbf{x})$  に対する方程式が

$$-\nabla^2 n + \frac{\delta}{\delta n} n^2 (1-n)^2 = 0 \quad (\text{A-9})$$

で与えられる。ただし長さは適当に dimension を落としてある。境界を  $x-y$  平面に平行な平面にとると, (A-9) から,

$$n_0(z) = \frac{1}{2} (1 - \tanh z) \quad (\text{A-10})$$

が得られる。したがって, (A-9) は (A-7) のような解を与えるもっとも簡単な方程式であろう。(A-7) と (A-10) を比較すると,  $n$  は  $n_b$  で, 長さは  $2\alpha$  を用いて dimension が落とされていることがわかる。以下この単位を用いることにする。(A-9) を用いて, 半径  $R$  の円筒の表面付近での密度の分布を考える。 $R \gg 1$  の場合を考えているから表面付近では,  $r$  を  $R$  で近似することができる。(A-9) から  $n = n_0 + \delta n$ ,  $\delta n$  は  $\frac{1}{R}$  の order とした時の  $\delta n$  に対する方程式は,  $r$  を  $R+x$  で書き換えると,

$$(\delta n)'' + 2(1 - 3 \tanh^2 x) \delta n = \frac{1}{2R} (\cosh x)^{-2} \quad (\text{A-11})$$

となる。ここでダッシュは  $x$  についての微分を表わす。 $x \rightarrow \infty$  で  $\delta n \rightarrow 0$  になる (A-11) の解は,

$$\begin{aligned} \delta n &= -\frac{h_0}{R} \eta(x) \\ \eta(x) &= \frac{1}{4} \cosh^4 x - \frac{1}{12} \sinh^4 x \\ &\quad - \frac{1}{3} \int^x \cosh^4 x' dx' \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

となる。ただし, (A-11) には,  $\delta n \propto (\cosh x)^{-2}$  という解も存在するが, これ

は、表面の一樣な平行移動に対応するので落としている。また、(A-12) は  $x \rightarrow -\infty$  で  $e^{-2x}$  に比例して発散する。したがって、当然  $\delta n \sim n_0$  のあたりでは使えなくなる。(A-12) を (A-8) に代入すると、 $\frac{1}{R}$  の order の density の変化による  $\text{He}^3$  エネルギーへの影響が計算される。 $f_0(x) = \psi_0(x)/n_0^{\frac{1}{2}}(x)$  で、 $\psi_0$  を導入し、また、dimension はもとにもどすと、

$$\delta \left( \frac{E}{I} \right)^{(n)} = - \frac{1}{2 m_3} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{2 \alpha R}$$

$$\int d^3 x \frac{n_0'}{n_0} \eta \left[ \left( \psi_0' - \frac{1}{2} \psi_0 \frac{n_0'}{n_0} \right)^2 - \lambda_0 \psi_0^2 \right] / \int d^3 x \psi_0^2 \quad (\text{A-13})$$

と求まる。

さて、(A-13) と (24), (25) で与えられている  $\text{Hi}^{(1)}$ ,  $\text{Hi}^{(2)}$  との order の比較に移る。そのために thermal fluctuation による表面の変位の order  $\bar{Q}$  およびそれにもなう流れの大きさ  $\bar{V}$  を estimate しておく。それぞれ二乗平均  $\langle Q \cdot Q \rangle$  および  $\langle V \cdot V \rangle$  から estimate すると、

$$Q \sim 1.2 \cdot 10^{-8} T^{\frac{1}{2}}$$

$$V \sim 3.7 \cdot 10^3 T^{\frac{3}{2}}$$

これから、曲率半径の order は

$$R = 1 / |\nabla^2 Q| \sim 2.1 \times 10^{-7} T^{-\frac{11}{6}}$$

となる。したがって、たとえば  $\text{Hi}^{(1)}$  の order は  $\text{Hi}^{(1)} \sim 0.71 T^{\frac{5}{2}} \text{ } ^\circ\text{K}$  となる。一方、(A-13) は、 $\alpha = 2.3 \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$  また、 $\frac{1}{2 m_3 \alpha^2} \cdot \lambda_0$  は、 $\text{He}^4$  の chemical potential から量った  $\text{He}^3$  のエネルギーで、Saam の計算結果は、 $3.1 \text{ } ^\circ\text{K}$  になっていることに注意すれば、 $\bar{\text{Hi}}^{(1)}$  と比較して order が  $10^{-1}$  程度小さくなることが期待される。実際、Saam の結果を用いて、(A-13) を数値計算することにより上の結論を

確かめることができる。ただし、 $\delta n$  の  $x \rightarrow -\infty$  での発散は、 $\delta n \sim n_0$  あたりで cut する。最後に、運動エネルギー密度  $\nu$  を通しての  $\text{He}^3$  のエネルギー変化を考える。 $\nu$  の曲率半径  $R$  への依存は、近似的にもあまりうまく estimate できない。しかし、境界が平面の時、(A-5)、(A-6) 式で  $n$  と  $\nu$  の座標依存が、 $\lambda_0$  の計算に同じようにきいていることから、 $\nu$  を通しての影響も (A-13) と同じ order になることが期待される。実際、(A-4) において、 $\frac{1}{R}$  の order の項として、波動関数  $\Psi_0$  の変化および方向からくる項を無視すると、 $r$  方向の微分から、

$$\nu(x) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} n_0$$

を得る。これを (A-8) に代入して、order が (A-13) と変わらないのを確かめるのはやさしい。

#### 参 考 文 献

- 1) A.F.Andreev, Sov. Phys. JETP. 23 939, (1966)
- 2) A.F.Andreev and D.A.Konpaneets, Sov. Phys. JETP. 34, 13, 16, (1972)
- 3) B.U.Felderhof, Physica, 48 541 (1970)
- 4) C.J.Pethick and D.Ter Haar, Physica, 32, 1905 (1966)
- 5) J.Lekner, Phil. Mag. 22, 669, (1970)
- 6) W.F.Saam, Phys. Rev. A4, 1278, (1971)