

Stability of Volterra difference equations

早稲田大学理工学部 室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)

Department of Mathematical Science, Waseda University

東京理科大学理学部 石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)

Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

Volterra 差分方程式

$$\begin{cases} x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=-\infty}^i a_{i,j} f_{i-j}(x_j), & i = 0, 1, 2, \dots, \\ x_j = \phi_j, & -\infty < j \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

について考える. ここで $0 < q < 1$ であり, 関数 $f_j(x) (0 \leq j < +\infty)$ が与えられ, $a_{i,j} \geq 0$ ($-\infty < j \leq i$), $\sum_{j=-\infty}^i a_{i,j} > 0$ かつ $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^i a_{i,j} = +\infty$ とする. さらに, $\phi_j, -\infty < j \leq 0$ と

$b_i = \sum_{j=-\infty}^0 a_{i,j} f_{i-j}(\phi_j), i \geq 0$ は有界であり, 次を満たす狭義単調増加関数 $f(x)$ が存在するとする.

$$\begin{cases} f(0) = 0, & 0 < \frac{f_j(x)}{f(x)} \leq 1, \quad x \neq 0 \quad (0 \leq j < +\infty), \\ f(x) \neq x \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ が存在し有限である.} \end{cases} \quad (1.2)$$

これまでに, 有限個の遅れを持つ非線形微分方程式に対して, Muroya, Ishiwata, Guglielmi [3] と Uesugi, Muroya, Ishiwata [5] の結果が得られており, 本報告では, これらの結果を非有界遅れの差分方程式 (1.1) に応用する. (1.1) の零解の大域漸近安定性の十分条件には若干の制約はあるが, Volterra 積分微分方程式の差分法の安定性解析にも応用可能である (Vecchio [6] と Song, Baker [4] 参照).

ここで, 定義を述べておく.

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ と非負の整数 i_0 に対して, (1.1) の解 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が $\sup\{|x_{i_0-j}| \mid 0 \leq j < +\infty\} < \delta$ のとき, $|x_i| < \varepsilon, i = i_0, i_0 + 1, \dots$ となる $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在することである.

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域吸引性**を持つとは, (1.1) のすべての解が $i \rightarrow \infty$ に対し, 0 に収束することである.

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域漸近安定**であるとは, 一様安定であり, かつ大域吸引性を持つことである.

定義 1.4 (1.1) の零解が**一様漸近安定**であるとは, 一様安定であり, かつ, (1.1) の任意の解 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が $|x_j| < \delta, -\infty < j \leq 0$ ならば, $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0$ となる $\delta > 0$ が存在することである.

2 Volterra 差分方程式への応用

この節では、非有界遅れを持つ (1.1) の零解の大域漸近安定性の十分条件を考える。有限個の遅れを持つ差分方程式に対する条件と比べて、証明に少し特別な工夫が必要である。

補題 2.1 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする。任意の $i \geq i_0$ に対し、 $x_i \geq 0$ (respect. $x_i \leq 0$)

となるような非負の整数 i_0 が存在し、 $\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j}$ は有界であると仮定する。このとき、 $\tilde{b}_{i,i_0} =$

$-\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j} f_{i-j}(x_j)$ は有界で、 $\limsup_{i \rightarrow \infty} x_i \leq \frac{\limsup_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0}}{1-q}$ (respect. $\liminf_{i \rightarrow \infty} x_i \geq \frac{\limsup_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0}}{1-q}$) となる。

さらに、a) $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0} = 0$ 、もしくは b) $\liminf_{j \rightarrow \infty} (\liminf_{i \rightarrow \infty} a_{i,j}) > 0$ 、かつ、 $\inf_{j \geq 0} f_j(x) \geq \underline{f}(x)$ (respect. $\sup_{j \geq 0} f_j(x) \leq \underline{f}(x)$)、 $x \in (-\infty, +\infty)$ と $f(0) = 0$ を満たすような $(-\infty, +\infty)$ で狭義単調増加関数 $\underline{f}(x)$ が存在すると仮定する。このとき、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ が成り立つ。

$\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j} = \sum_{k=(i-i_0)+1}^{\infty} a_{i,i-k}$ であることに注意しよう。(1.1) が convolution タイプ、すなわち、 $a_{i,j} = a_{i-j}$ 、 $-\infty < j \leq i$ のとき、条件 $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0} = 0$ は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$ と同等である。なぜならば、これは任意の正定数 $i_0 \geq 0$ に対して、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=(i-i_0)+1}^{\infty} a_k = 0$ と同等であるからである。

補題 2.2 $f(x) \neq x$ で $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする。 x_i が 0 のまわりで振動し、

$\lambda = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i q^{i-k} \sum_{j=-\infty}^k a_{k,j} < +\infty$ ならば、 x_i は有界である。

注意 2.1 $f(x) \neq x$ で $\lambda < +\infty$ ならば、補題 2.2 より、0 のまわりを振動する (1.1) の任意の解 x_i は上にも下にも有界である。

ここで、 $r_1 = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i q^{i-k} \left(\sum_{j=0}^k a_{k,j} \right)$ とおく。次の主定理の証明ができる。

定理 2.1 $f(x)$ が $(-\infty, +\infty)$ で連続で、任意の $L < 0$ に対して $-r_1 f(-r_1 f(L)) > L$ とする。また、次式を仮定するとき、(1.1) の零解は大域漸近安定である。

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} \left(\limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{i,i-k} \right) = 0. \quad (2.1)$$

(証明) 補題 2.1 より、(1.1) の解 x_i が 0 のまわりで振動すると仮定する。

I) はじめに、 $f(x) \neq x$ の場合を考えよう。(1.1) の解 x_i は補題 2.2 によって有界である。 $\underline{x} = \liminf_{i \rightarrow \infty} x_i < 0$ を仮定し、 $M = \sup_{-\infty < i < +\infty} |f(x_i)| < +\infty$ とおく。また、任意の $0 < \epsilon < \bar{x}$ と $[0, \epsilon]$ での連続関数 $F(x) = -r_1 f(-r_1 f(\underline{x} - x) + 2x) - 3x$ をとる。 $F(0) = -r_1 f(-r_1 f(\underline{x})) > \underline{x}$ となるので、 $x = 0$ での $F(x)$ の連続性により、 $F(\epsilon_0) = -r_1 f(-r_1 f(\underline{x} - \epsilon_0) + 2\epsilon_0) - 3\epsilon_0 > \underline{x}$ となる定数 $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ が存在する。 $\underline{x} = \liminf_{i \rightarrow \infty} x_i < 0$ により、この $\epsilon_0 > 0$ に対し、 $i \geq i_0$ ならば、 $x_i > \underline{x} - \epsilon_0$ となる正整数 i_0 が存在する。仮定 (2.1) より、 $\epsilon_1 = (1-q)\epsilon_0/M > 0$ に対して、

$$\sum_{j=-\infty}^{(i-k_1)-1} a_{i,j} = \sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{i,i-k} < \epsilon_1, \quad i \geq i_1 \geq 2k_1 + i_0, \quad \text{かつ} \quad q^{k_1+1} < \epsilon_0/M.$$

となる正整数 i_1 と $k_1 \geq i_0$ が存在する。このとき、 $l \geq i_1$ と $\bar{b}_{l,l-k_1} = - \sum_{j=-\infty}^{(l-k_1)-1} a_{l,j} f_{l-j}(x_j)$ に対して、

$$|\bar{b}_{l,l-k_1}| \leq \left(\sum_{j=-\infty}^{(l-k_1)-1} a_{l,j} \right) M = \left(\sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{l,l-k} \right) M < \epsilon_1 M = (1-q)\epsilon_0,$$

となり、よって、 $i \geq i_1 + k_1$ に対して、 $|\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1}| \leq \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} (1-q)\epsilon_0 < \epsilon_0$ 。

a) x_{i+1} , $i \geq i_1 + k_1$ の上界を考える。

$$x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=i-k_1}^i a_{i,j} f_{i-j}(x_j) + \bar{b}_{i,i-k_1}, \quad i \geq i_1 + k_1.$$

i) ある $i \geq i_1 + k_1$ に対して、 $x_{i+1} > x_i$ であり、 $\underline{x} - \epsilon_0 < x_{\underline{g}(i)} = \min_{i-k_1 \leq j \leq i} x_j < 0$ となる正整数 $\underline{g}(i) \in \{i-k_1, i-k_1+1, \dots, i\}$ が存在する場合を仮定する。このとき、(1.1) により、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\leq q^{i-\underline{g}(i)+1} x_{\underline{g}(i)} - \left(\sum_{k=\underline{g}(i)}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^k a_{k,j} \right) f(\underline{x} - \epsilon) - \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1} \\ &\leq - \left(\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^k a_{k,j} \right) f(\underline{x} - \epsilon) + \epsilon_0 \leq -r_1 f(\underline{x} - \epsilon) + \epsilon_0 \leq R_{\underline{x}} \end{aligned}$$

となる。ここで $R_{\underline{x}} = -r_1 f(\underline{x} - \epsilon_0) + 2\epsilon_0$ である。

ii) $x_{i+1} > x_i$ かつ、ある $i \geq i_1 + k_1$ に対して、 $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k_1} \geq 0$ となる場合を仮定する。

$x_j \geq 0$, $i-k_1 \leq j \leq i$ $q^{k_1+1} M < \epsilon_0$ かつ $|\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1}| < \epsilon_0$ なので、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q^{k_1+1} x_{i-k_1} - \left(\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^k a_{k,j} f_{k-j}(x_j) \right) + \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1} \\ &\leq - \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{(i-k_1)-1} a_{k,j} f(\underline{x} - \epsilon) + 2\epsilon_0 \leq R_{\underline{x}}. \end{aligned}$$

となる。ゆえに、i) と ii) の両方の場合に対して、 $x_{i+1} \leq R_{\underline{x}}$, $i \geq i_1 + k_1$ を得る。

b) 次に $x_{i+1} = - \sum_{j=i-k_1}^i a_{i,j} f_{i-j}(x_j) + \bar{b}_{i,i-k_1}$, $i \geq i_1 + 2k_1$ の下界を考えよう。

iii) ある $i \geq i_1 + 2k_1$ に対し、 $x_{i+1} < x_i$ であり、 $R_{\underline{x}} \geq x_{\bar{g}(i)} = \max_{i-k_1 \leq j \leq i} x_j > 0$ となる正整数 $\bar{g}(i) \in \{i-k_1, i-k_1+1, \dots, i\}$ が存在する場合を仮定する。

このとき、同様に、 $x_{i+1} \geq -r_1 f(R_{\underline{x}}) - \epsilon_0 > S_{\underline{x}}$ を得る。ここで、 $S_{\underline{x}} = -r_1 f(R_{\underline{x}}) - 2\epsilon_0$ である。

iv) $x_{i+1} < x_i$ および、ある $i \geq i_1 + 2k_1$ に対し、 $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k_1} \leq 0$ の場合を仮定する。このとき、同様に、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q^{k_1+1} x_{i-k_1} - \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^i a_{k,j} f_{k-j}(x_j) + \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1} \\ &\geq - \left(\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{(i-k_1)-1} a_{k,j} \right) f(R_{\underline{x}}) - 2\epsilon_0 \geq S_{\underline{x}}. \end{aligned}$$

このように, iii) と iv) の両方の場合に対し, $x_{i+1} \geq S_{\underline{x}}, i \geq i_1 + 2k_1$ を得る. $S_{\underline{x}} - \epsilon_0 = F(\epsilon_0) > \underline{x}$ なので, $x_{i+1} \geq S_{\underline{x}} > \underline{x} + \epsilon_0, i \geq i_1 + 2k_1$ となる. これは矛盾する. よって, $\underline{x} = 0$ であり, 補題 2.1 より, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ を得る.

II) $f(x) = x$ の場合に対し, 同様に $\limsup_{i \rightarrow \infty} |x_i| < +\infty$ を得る. 残りは I) と同様に証明できる. よって, 結論を得る. $\square$

(1.1) の convolution タイプに対して, 条件 (2.1) は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$ になる.

定理 2.1 を特に $f(x) = x$ と $f(x) = e^x - 1$ に適用すると, 次の定理を得る.

定理 2.2 (1.1) に対して, (2.1) を仮定し, 次の条件が成り立つとする.

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{ならば,} & r_1 < 1, \\ f(x) = e^x - 1 & \text{ならば,} & r_1 \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

このとき, (1.1) の零解は大域漸近安定である.

特に, $f_j(x) = x, 0 \leq j < \infty$ となる線形の場合に対し, (2.1) と次が成り立つとする.

$$\begin{cases} a_{i,i} \geq q, i \geq 0 & \text{ならば,} & r_1 < 1 + q \\ a_{i,i} < q, i \geq 0 & \text{ならば,} & \bar{r}_1 < 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで, $\bar{r}_1 = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i (q - \liminf_{l \rightarrow +\infty} a_{i,l})^{i-k} (\sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j})$ である. このとき, (1.1) の零解は大域漸近安定である. この場合, $q_x - a_{i,i}x = (q - a_{i,i})x, i \geq 0$ なので, $q \geq 1$ も考えられる.

定理 2.2 は (1.1) の零解の一樣漸近安定である十分条件を導くのに便利である.

最後に, $a_0 > \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ かつ $f(x) = f_0(x) = e^x - 1$ という条件のもとで, 次の convolution タイプの差分方程式

$$x_{i+1} = x_i - \sum_{j=-\infty}^i a_{i-j} f_{i-j}(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

に対する大域的漸近安定性の条件を考える.

定理 2.3 条件 (1.2) と $-\infty < j \leq i$ において $a_{i,j} = a_{i-j} \geq 0$ に加え,

$$\begin{cases} \bar{r}_1 > \bar{r}_2 \geq 0, & \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \leq 2, & \text{かつ} \\ \bar{r}_1 + \bar{r}_2 > 1 & \text{ならば,} & \bar{r}_1 + \bar{r}_2 - \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} e^{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 1} \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ならば, (2.4) の零解が大域的漸近安定である. ここで, $\bar{r}_1 = a_0$ および $\bar{r}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ である.

3 $|f_i(x)| \leq |x|, i \geq 0$ の一般的な場合

ここで, 次の方程式の解 x_i の有界性の条件と零解の大域吸引性の条件を考えよう.

$$x_0 = \phi_0, \quad x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=0}^i a_{i,j} x_j + b_i, \quad b_i = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{i,j} \phi_j, \quad i \geq 0. \quad (3.1)$$

(3.1) より, $|x_0| = |\phi_0|$, $|x_{i+1}| \leq \sum_{j=0}^i |\tilde{a}_{i,j}| |x_j| + |\tilde{b}_i|$, $i \geq 0$ となる. ここで, $\tilde{b}_i = b_i$, $i \geq 0$, $\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j}$, $0 \leq j \leq i-1$ かつ $\tilde{a}_{i,i} = -q + a_{i,i}$ である.

このとき, Crisci 他 [2] の定理 3.1 と系 3.1 を改良する次の定理を得る.

定理 3.1 $A = \sup_{0 \leq j \leq i} |\tilde{a}_{i,j}| < +\infty$ と $B = \max(|\phi_0|, \sup_{i \geq 0} |\tilde{b}_i|) < +\infty$ を仮定と, $|x_i| \leq (1+A)^i B$, $i \geq 0$ である. 特に, $\bar{A}_0 = \sup_{i \geq i_0} \sum_{j=i_0}^i |\tilde{a}_{i,j}| < 1$ となるような正整数 i_0 が存在するならば, x_i は有界であり, また $|x_i| \leq (1+A)^{i_0} B / (1 - \bar{A}_0) < +\infty$, $i \geq i_0$ となる. さらに, $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = 0$ 及び $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=k_1+1}^i |a_{i,i-k}|) = 0$ ならば, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ となる.

Crisci 他 [1] の証明と同様に, さらに次の定理を得る.

定理 3.2 $\bar{A} = \sup_{j \geq 0} \sum_{i=j}^{\infty} |\tilde{a}_{i,j}| < 1$ および $\bar{B} = |\phi_0| + \sum_{i=0}^{\infty} |\tilde{b}_i| < +\infty$ ならば, $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \leq \bar{B} / (1 - \bar{A}) < +\infty$ であり, さらに $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ となる.

線形方程式

$$x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=0}^i a_{i,j} x_j + b_i, \quad b_i = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{i,j} \phi_j, \quad i \geq 0 \quad (3.2)$$

に対して, (3.2) の零解の大域安定性に関する次の定理を得る (Crisci 他 [2] の定理 3.1 および系 3.1 を参照).

定理 3.3 線形方程式 (3.2) に対し, 次を仮定する.

$$\begin{cases} \tilde{c}_{i,j} = a_{i-1,j} - a_{i,j}, & 0 \leq j \leq i-2, \quad i \geq 2 \\ \tilde{c}_{i,i-1} = -q + a_{i-1,i-1} - a_{i,i-1}, & i \geq 1, \quad \tilde{c}_{i,i} = 1 + q - a_{i,i}, \quad i \geq 0 \\ \tilde{d}_0 = b_0 \quad \text{と} \quad \tilde{d}_i = b_i - b_{i-1}, & i \geq 1. \end{cases}$$

i) $C = \sup_{0 \leq j \leq i} |\tilde{c}_{i,j}|$ および $D = \max(|\phi_0|, \sup_{i \geq 0} |\tilde{d}_i|) < +\infty$ を仮定するとき, $|x_i| \leq (1+C)^{i_0} D$, $i \geq 0$

となる. 特に $\bar{C}_0 = \sup_{i \geq i_0} \sum_{j=i_0}^i |\tilde{c}_{i,j}| < 1$ となる正整数 i_0 が存在するならば, x_i が有界であり, $|x_{i+1}| \leq (1+C)^{i_0} D / (1 - \bar{C}_0) < +\infty$, $i \geq i_0$ である. さらに,

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=k_1+1}^i |\tilde{c}_{i,i-k}|) = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (b_i - b_{i-1}) = 0$$

ならば, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ となる.

ii) もし, $\bar{C} = \sup_{j \geq 0} \sum_{i=j}^{\infty} |\tilde{c}_{i,j}| < 1$ かつ $\bar{D} = \sum_{i=0}^{\infty} |b_{i+1} - b_i| + |b_0| < +\infty$ ならば, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq \bar{D} / (1 - \bar{C}) < +\infty$ となり, さらに $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ である.

例 3.1 $a_{i,j} = a$, $0 \leq j \leq i$ とする. この場合, (2.1) は満足しないが, $2q < a < 2$ および $\sum_{i=0}^{\infty} |b_{i+1} - b_i| + |b_0| < +\infty$ のとき, $\bar{C}_0 < 1$ は $|1 + q - a| + q < 1$ となり, 定理 3.3 より, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ が成り立つ.

4 応用

次の Volterra 差分方程式を考える.

$$x_{i+1} = x_i - \sum_{j=-\infty}^i a_{i-j} f(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

ここで, $f(x) = e^x - 1$, $a_j = \lambda c_j$, $0 \leq j < +\infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lambda$, さらに, $i = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$c_0 = \int_0^1 (1-t)k(t)dt, \quad c_{i-j} = \int_0^1 \int_0^1 k(i-j+u-s)dsdu, \quad -\infty < j \leq i-1, \quad (4.2)$$

かつ $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = \int_i^{i+1} \int_{-\infty}^u k(u-s)dsdu = \int_0^{\infty} k(t)dt = k^* < +\infty$ である.

このとき, (4.1) に定理 2.2 の結果を応用できる. たとえば, $k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$ とおくと, $k^* = 1$ および $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^1 (1-t)e^{-\alpha t^2} dt \geq \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^1 (1-t)(1-\alpha t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} (\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{12})$ である. ここで少なくとも, $\alpha \leq \frac{1}{4\pi}$ に対して, $c_0 > \frac{1}{2}$ を得て, 条件 $a_0 > \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が成り立ち, 特に, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j/a_0 \leq 1/e$ ならば, 定理 2.3 の (2.5) を満足し, (4.1) の零解は $0 < \lambda \leq 2$ ならば, 大域漸近安定である.

定理 2.2 を (4.1) の $f(x) = x$ の場合に適用すると, (4.1) の零解の一樣漸近安定性の十分条件を得る. たとえば, $0 < \lambda < 2$ ならば, $k(t) = te^{-t}$ の (4.1) の場合の零解は一樣漸近安定である (cf. Song, Baker [4]).

他の応用として, 次の離散 Wazewska-Czyzewska-Lasota モデルがある (Wazewska, Czyzewska, Lasota [7] 参照).

$$y_{i+1} = qy_i + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e^{-\gamma y_{i-j}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < q < 1, \gamma > 0, \beta_j \geq 0, \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j > 0. \quad (4.3)$$

正の平衡点 y^* は $y^* = \beta e^{-\gamma y^*} / (1-q)$ の正根で, 定理 2.2 の (2.2) より, $\gamma y^* \leq 1$ ならば, y^* は大域漸近安定である.

参考文献

- [1] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, Stability results on some direct quadrature methods for Volterra integro-differential equations, *Dynam. Systems Appl.* **7** (1998), 501-518.
- [2] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, A priori bounds on the solution of a nonlinear Volterra discrete equation. Special issue: Hereditary systems qualitative properties and applications, Part I. *Stab. Control Theory Appl.* **3** (2000), 38-47.
- [3] Y. Muroya, E. Ishiwata, N. Guglielmi, Global stability for nonlinear difference equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* (2007), doi:10.1016/j.jmaa.2006.12.028.
- [4] Y. Song, Ch.T.H. Baker, Qualitative behavior of numerical approximations to Volterra integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **172** (2004), 101-115.
- [5] K. Uesugi, Y. Muroya, E. Ishiwata, On the global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.* **294** (2004), 560-580.
- [6] A. Vecchio, Stability of backward differentiation formulas for Volterra integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **115** (2000), 565-576.
- [7] M. Wazewska-Czyzewska, A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of the red-blood cells systems, *Ann. Polish Math. Soc. Series III, Appl. Math.* **17** (1988), 23-40.