

領域変形と熱方程式の基本解

東大 理 小沢 真

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域で C^∞ 境界 γ をもつものとする。
 $f(x) \in C^\infty(\gamma)$ を fix し、 $\mathcal{U}_x$ で $x \in \gamma$ における単位外向き
 法線 vector を表わすとする。 $\gamma_\varepsilon = \{x + \varepsilon f(x) \mathcal{U}_x; x \in \gamma\}$
 は ε が 0 に十分近いとき $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 超曲面をあらわすから、 Ω_ε
 で γ_ε が囲む有界領域をあらわすとする。 $U_\varepsilon(x, y, t)$
 , $x, y \in \Omega_\varepsilon, t > 0$ で 熱方程式 (Dirichlet 条件 at γ_ε)
 の基本解とする。次の公式がなりたつ。⊗ 定理 1 ~ 7 に
 ついては [5] または [6] を参照。

定理 1.

$x, y \in \Omega, t > 0$ fix のとき

$$\delta U(x, y, t) = \int_0^t \int_{\gamma} \frac{\partial U(x, z, t-\tau)}{\partial \mathcal{U}_z} \frac{\partial U(y, z, \tau)}{\partial \mathcal{U}_z} f(z) d\sigma_z$$

==で $\delta U(x, y, t)$ は 次式で定義される。

$$\delta U(x, y, t) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (U_{\varepsilon}(x, y, t) - U(x, y, t)).$$

(注: Laplacian の Green 函数 にかんする Hadamard 変分公式 [2] が熱方程式の基本解に対しても、ほぼ似た形で成立することを定理 1 は示している。長年に亘り、この定理がみつからなかったという事は、不思議でなるない。)

さて、次式で 熱方程式の基本解のトレース (partition function) を定義する。

$$\text{Tr}(t, \varepsilon) \equiv \int_{\Omega_{\varepsilon}} U_{\varepsilon}(x, x, t) dx$$

そのとき、

定理 2.

$$\delta \text{Tr}(t) = \int_{\Omega} \delta U(x, x, t) dx$$

== で

$$\delta \text{Tr}(t) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (\text{Tr}(t, \varepsilon) - \text{Tr}(t, 0))$$

と定義した。

今 $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_j > \dots$

で Laplacian (Dirichlet 条件) の固有値達 (重複度に応じて、並べておく) とする。 $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ で L^2 の正規直交基底を張る固有函数達とする。 $\varphi_j(x)$ は λ_j の固有空間に属するとする。その時

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \varphi_j(x) \varphi_j(y)$$

と Fourier 展開される。この式を定理 1, 定理 2 に適用して、次の結果を得る。

定理 3

$$S\left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t}\right) = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \int_{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial \bar{z}}\right)^2 \rho(z) d\sigma_z$$

(注: Dirichlet 級数の変分が Dirichlet 級数で再び書ける
という意味で、非常に示唆的な内容を含んでいる。)

次の漸近展開式 Minakohisundaram-Pleijel [4] はよく知られている。

$t \downarrow 0$ に対し.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(t; \varepsilon) \sim & a_n(\varepsilon) t^{-\frac{n}{2}} + a_{n-1}(\varepsilon) t^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} \\ & + \dots + a_{n-k}(\varepsilon) t^{-\frac{n}{2} + \frac{k}{2}} + \dots \end{aligned}$$

我々は $\delta \text{Tr}(t)$ に対しても同様の漸近展開式が成立することを証明できる。

定理 4

$t \downarrow 0$ のとき.

$$\begin{aligned} \delta \text{Tr}(t) \sim & b_n t^{-\frac{n}{2}} + b_{n-1} t^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} + \dots \\ & + \dots + b_{n-k} t^{-\frac{n}{2} + \frac{k}{2}} + \dots \end{aligned}$$

Minakshisundaram-Pleijel の展開と、定理 4 をくらべて、次の事が成立すること予想される。

予想

$$b_{n-k} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a_{n-k}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

この予想は $k=0, 1$ の場合 肯定的に解けている。一般のときは未解決である。

定理 5

$$b_n = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a_n(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad b_{n-1} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a_{n-1}(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

次のような式の $t \downarrow 0$ での漸近挙動について調べる。

$$B(z, t) \equiv \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \frac{\partial U(x, z, t-\tau)}{\partial z^2} \frac{\partial U(x, z, \tau)}{\partial z^2} dx$$

擬微分作用素を用いた議論により、次の公式がなりたつ。

定理 6 $t \downarrow 0$ のとき

$$B(z, t) \sim B_n(z) t^{-\frac{n}{2}} + B_{n-1}(z) t^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}} + \dots \\ + B_{n-k}(z) t^{-\frac{n}{2} + \frac{k}{2}} + \dots$$

と漸近展開される。 $B_{n-k}(z)$ は $z \in Y$ の C^∞ 函数。

④ 研究集会では、 $B_{n-k}(z)$ が境界 Y の幾何を反映している事、および、古典的な不変式論を用いて、その形が定まってしまふ事 (Atiyah-Bott-Patodi [1] の思想) などについて言及した。それらについては、[6] に収録されているので参照されたい。

さて、 $B_n(z) = C_n$, $B_{n-1} = C_{n-1} \times (n-1) H_1(z)$ がなりたつ事が証明できる。 C_{n-1} は n によるみ依存した非零な数、 $H_1(z)$ は $z \in Y$ における第 1 平均曲率。

定理6の“解析”への寄与について述べて終わりにしたい。
 11. 定理6より,

$$t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \left(\frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z \in \gamma} \sim C_n t^{-\frac{n}{2}} + O(t^{-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}})$$

であるが、Tauber型定理が適用できて、次の定理を得る。

定理7

$\lambda \rightarrow \infty$ のとき

$$\sum_{-\lambda_j < \lambda} \left(\frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z \in \gamma} \sim \frac{C_n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \lambda^{\frac{n}{2}+1} + o(\lambda^{\frac{n}{2}+1})$$

が成り立つ。

$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) \varphi_j(y)$ の $N \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動は、

Hörmander [3] などによって調べられている。(もちろん、もっと古くから) しかし、 x, y とともに Ω の内部を動くときに議論が制限されるという問題点があった。境界近傍での固有函数の挙動については、定理7が、
 良く、その状況を表現していると思われる。

文献

- [1] Atiyah-Bott-Patodi ; On the heat equation and the index theorem. *Inventiones math.* 19, 279-330 (1973).
- [2] Hadamard ; Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. *Oeuvres, C.N.R.S. Tom. 2*, 515-631 (1968) Hadamard の論文は 1908 年に出版
- [3] Hörmander ; The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121, 193-218 (1968)
- [4] Minakshisundaram-Pleijel ; Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. *Canad. J. Math.*, 1, 242-256 (1949).
- [5] Ozawa ; Perturbation of domains and Green kernels of heat equations. *Proc. Japan Acad.*, 54 A, 322-325 (1978)
- [6] ——— ; 東京大学修士論文 129p