

Discrete Series とある種の楕円型作用素

広島大 理 堀田良之

1° 表現論から

(π, H) を半単純 Lie 群 G の既約な discrete series unitary 表現とする. 即ち, G 上の 2 乗可積分な函数のなす Hilbert 空間 $L^2(G)$ 上の正則表現に対して, G の作用と可換な isometry $H \hookrightarrow L^2(G)$ が存在するものとする. K を G の極大 compact 群とすると表現 π を K に制限した $\pi|_K$ は compact 群 K の無限次元表現を与えるが, K の一つの既約表現 (の同値類) τ に対して, $m_\pi(\tau)$ によって τ の $\pi|_K$ における重複度を表わす. 即ち,

$$\pi|_K = \bigoplus_{\tau} m_\pi(\tau) \tau.$$

既約 unitary 表現に対して $m_\pi(\tau) < \infty$ なることはよく知られている.

R. Blattner は discrete series に関する Harish-Chandra の指標公式から $m_\pi(\tau)$ に関するある explicit formula を予想した (Moscow Congress ; still conjectural). 文献

の不足もあって、以下それを述べよう。

まず Harish-Chandra の指標公式を復習する。 G が discrete series 表現をもてば compact Cartan 部分群が存在する故、それを T と記し、 $T \subset K$ と仮定する。 G がある単連結な複素 Lie 群の実型式になっていると仮定すると、 T は torus になり以下の weight に関する議論もスムーズにゆく。 $\hat{T}$ によって T の指標のなす Abel 群を表わし、 $\mathcal{F}$ によって $\hat{T}$ を加法的に記した lattice を表わす ($\mathcal{F} \ni \lambda \mapsto e^\lambda \in \hat{T}$ が同型)。従って (G, T) に関する root 系 Σ は $\Sigma \subset \mathcal{F}$ と見做せ、 $\mathcal{F}$ は Killing form による通常の内積 $(,)$ をもつ。

$$\mathcal{F}' = \{ \lambda \in \mathcal{F} ; (\lambda, \alpha) \neq 0 \ (\alpha \in \Sigma) \}$$

$$T' = \{ t \in T ; e^\alpha(t) \neq 1 \ (\alpha \in \Sigma) \}$$

とおく。尚 Σ に一つの順序を固定し、それによる正の root 系を P と記す。又、 (G, T) の Weyl 群を $W = N_G(T)/T$ と記す。ここに $N_G(T)$ は T の G 中での正規化群で、 W は T 、及び $\hat{T} \simeq \mathcal{F}$ に内部自己同型的に働く。

さて一般に既約 unitary 表現の指標は G 上の distribution として定義され、 G の正則元とよばれるもののなす open dense な部分集合 G' の上では実解析的な函数になっていることが知られているが、今の場合 $G' \cap T = T'$ と

なっていることに注意しておく。従って表現の指標の T' への制限が意味をもつ。Discrete series に関する Harish-Chandra の基本定理は次のように述べられる:

Discrete series 表現 π に対してある $\Lambda \in \mathcal{F}'$ が存在して、その指標を Θ_π とすると T' 上 Λ の制限 $\Theta_\pi|_{T'}$ は

$$\Theta_\pi|_{T'} = (-1)^n \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{s\Lambda} / \prod_{\alpha \in P} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})$$

なる函数。 逆に $\Theta_\pi|_{T'}$ が上のように表わせる π は同値を除いて一意的。但し、 $\varepsilon(s)$ は $s \in W$ の置換表現の符号、 $e^{s\Lambda}$ は s の e^Λ への働き、そして $n = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} G/K$ 。尚上の $\Lambda \in \mathcal{F}'$ は $(\Lambda, \alpha) > 0$ ($\alpha \in P$) とすると π に対して一意的にとれる。かかる Λ に対して π を満たす discrete series 表現を以下 π_Λ と記すことにする。

次に Blattner の予想する explicit formula を述べるために今一つ記号を導入する。Compact pair (K, T) に関する root 系を Σ_k とすると自然に $\Sigma_k \subset \Sigma$ と見做せる (compact roots とよばれるもの)。前に固定した正の root 系 P に対して、 $P_k = P \cap \Sigma_k$, $P_n = P - P_k$ とおく。ここで、 $\rho_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_k} \alpha$, $\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P_n} \alpha$ とおくと、 $\rho_k, \rho_n \in \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ であるが、我々の仮定の下では $\rho_k \pm \rho_n \in \mathcal{F}$ なることがわかる。さて $\Lambda \in \mathcal{F}$, $(\Lambda, \alpha) > 0$ ($\alpha \in P$) に

対して discrete series 表現 π_Λ を考える. $\lambda = \Lambda - \rho_k + \rho_n \in \mathfrak{F}$ とおくと, その指標 Θ_{π_Λ} の $T' \wedge \alpha$ 制限は, Harish-Chandra の公式により

$$\Theta_{\pi_\Lambda} | T' = (-1)^n \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{s(\lambda + \rho_k - \rho_n)} / \prod_{\alpha \in P} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}).$$

ここで,

$$\Delta_k = \prod_{\alpha \in P_k} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}), \quad \Delta_n = \prod_{\alpha \in P_n} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})$$

とおくと, それぞれ(一般に) T 上の 2 価の函数であるが,

Weyl 群の元 $s \in W$ の働きにより $(\Delta_k \Delta_n)^s = \Delta_k^s \Delta_n$ なることがわかる. 従って $\Delta_k^s = \Delta_n$. 即ち

$$\Delta_n = \Delta_k^s = \prod_{\alpha \in P_n} (e^{\frac{s\alpha}{2}} - e^{-\frac{s\alpha}{2}}) = (-1)^n e^{-s\rho_n} \prod_{\alpha \in P_n} (1 - e^{s\alpha}).$$

従って形式的な展開

$$(1-x)^{-1} = \sum_{l \geq 0} x^l$$

を用いると, $\Theta_{\pi_\Lambda} | T'$ の exponential sum による表示は

$$\sum_{s \in W} \varepsilon(s) \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_l)} e^{s(\lambda + \rho_k + \alpha_1 + \dots + \alpha_l)} / \Delta_k,$$

但し 2 番目の和は P_n の元の l 個の (順序を問わぬ) 組

$(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ を $l \geq 0$ に対して走る. ここで一般に weight

$\nu \in \mathfrak{F}$ に対して $Q(\nu)$ によって $\nu = \alpha_1 + \dots + \alpha_l$

$(\alpha_i \in P_n, l = 0, 1, \dots)$ とかける場合の数 (分割数) を

表わすと, weight に関するよく知られた事実を用いて, 上

の式は

$$\sum_{\mu \in D} \left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) Q(w(\mu + \rho_k) - (\lambda + \rho_k)) \right) \frac{\sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{s(\mu + \rho_k)}}{\Delta_k}$$

と変形できる. 但し, $D = \{\mu \in \mathfrak{F}; (\mu, \alpha) \geq 0 (\alpha \in P_k)\}$. Δ_k

更に,

$$b_\lambda(\mu) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) Q(w(\mu + \rho_k) - (\lambda + \rho_k))$$

$$\chi_\mu = \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{s(\mu + \rho_k)} / \Delta_k$$

とみると, χ_μ は Weyl の指標公式により最高 weight を μ とする K の既約表現の指標. 又我々の仮定 $(\Lambda, \alpha) > 0$ の下では $b_\lambda(\mu)$ は非負な整数になることがわかる.

こうして少くとも形式的には

$$\Theta_{\pi_\Lambda} | T' = \sum_{\mu \in D} b_\lambda(\mu) \chi_\mu$$

と展開される. そこで Blattner は, 表現 π_Λ を K に制限したとき, 最高 weight を μ とする既約表現 τ_μ が $\pi_\Lambda|_K$ における重複度 $m_{\pi_\Lambda}(\tau_\mu) = m_\Lambda(\mu)$ は実際

$$m_\Lambda(\mu) = b_\lambda(\mu) \quad (\Lambda = \lambda + \rho_k - \rho_n)$$

を満たすのではないか? と予想した.

実際 $m_\Lambda(\mu)$ をそのような本物の重複度とすると

$$\Theta_{\pi_\Lambda} | T' = \sum_{\mu \in D} m_\Lambda(\mu) \chi_\mu$$

が成立するものであるが, 逆に上のような展開が $m_\Lambda(\mu)$ を

$b_\lambda(\mu)$ におきかえて成立するにしても $m_\Lambda(\mu) = b_\lambda(\mu)$ なる保証は何もない。

今のところ知られている一般的な結果は、以下に述べる方法で

$$m_\Lambda(\mu) \leq b_\lambda(\mu)$$

なること、しかもすべての π_Λ ではなく、‘大部分の’ π_Λ に対してのみである (W. Schmid を始めとする)。

2° 実現による方法

以下に述べることに關する詳しい記述は [2] を参照されたい。本質的なアイデアは Schmid [1] による。

Discrete series 表現 π_Λ ($(\Lambda, \alpha) > 0$ ($\alpha \in P$), $\Lambda = \lambda + \rho_k - \rho_n$) に対して最高 weight を λ とする K の表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ を考え、対称空間 G/K 上の K -principal bundle $G \rightarrow G/K$ に付随する vector bundle を $E_{V_\lambda} = G \times_K V_\lambda$ とする。このとき λ から決まる K の (既約とは限らぬ) 有限次元表現 $V_\lambda^1, \dots, V_\lambda^n$ が存在し、それぞれに付随する G/K 上の vector bundles を $E_{V_\lambda^i}$ と記すとき、楕円複体

$$(E_\lambda) \quad 0 \rightarrow C^\infty(E_{V_\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{D}} C^\infty(E_{V_\lambda^1}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}} C^\infty(E_{V_\lambda^n}) \rightarrow 0$$

が構成される。ここで $C^\infty(E_i)$ は E_i の sections の空間を表わし、微分作用素 $\mathcal{D}$ はすべて一階である。

注意: K の double covering を $\tilde{K}$ とするとき (単連結ならば K 自身), G/K 上の spinor bundle ($\tilde{K}$ の tangent space における isotropy 表現に対する Spin 表現に付随するもの) に対して, 最高 weight を $\lambda - \rho_n$ とずらして Dirac 作用素

$$D: C^\infty(E_{V_{\lambda-\rho_n}} \otimes \text{Spin}) \rightarrow C^\infty(E_{V_{\lambda-\rho_n}} \otimes \text{Spin})$$

が考えられる. これを埋め込み $E_{V_\lambda} \hookrightarrow E_{V_{\lambda-\rho_n}} \otimes \text{Spin}$ に関して “ほどいたもの” が long complex $\mathbb{E}_\lambda$ である. 即ち

$$\mathcal{D} + \mathcal{D}^*: C^\infty(\bigoplus_i E_{V_\lambda^i}) \rightarrow C^\infty(\bigoplus_i E_{V_\lambda^i})$$

が上の Dirac 作用素と同型 (詳しくは [2]).

さて複体 $\mathbb{E}_\lambda$ を L^2 -sections の範囲で考えると,

実現定理: ほとんどの λ に対してはその高次の L^2 -cohomology が消え, 0 次の L^2 -cohomology

$$H_{L^2}^0(\mathbb{E}_\lambda) = \text{Ker}(\mathcal{D}: L^2(E_{V_\lambda}) \rightarrow L^2(E_{V_\lambda^1}))$$

が G の表現空間として初めの π_λ に同値な表現を与える,

が証明できる. 因みに, これは岡本, Narasimhan, Schmid, Parthasarathy らによる一連の仕事の中で示されたことと同等であるが, parametre λ に関する詳しい条件については [2] を参照されたい.

この π_λ の実現を用いて Blattner の数 $b_\lambda(\mu)$ を考察しよう. さて複体 $\mathbb{E}_\lambda$ は実解析的である. 即ち, 実解析的多様体

としての G/K 上で, vector bundles E_{V_λ} , 微分作用素 $\mathcal{D}$ の係数はすべて実解析的である. 実解析的 vector bundle E の実解析的 sections の空間を $\mathcal{A}(E)$ と書いて, base space に一点 o を固定したとき次のように Krull filtration を入れる. 即ち, m_o を o で消える函数のなす ideal とするとき,

$$\mathcal{A}_o^{(l)}(E) = m_o^l \mathcal{A}(E) \quad (l=0, 1, 2, \dots)$$

なる部分加群を考えると

$$\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}_o^{(0)}(E) \supset \mathcal{A}_o^{(1)}(E) \supset \dots \supset \mathcal{A}_o^{(l)}(E) \supset \dots,$$

$$\bigcap_l \mathcal{A}_o^{(l)}(E) = (0).$$

又 E_o を o における E の fibre, T_o^* を o における cotangent space とすると自然に

$$\mathcal{A}_o^{(l)}(E) / \mathcal{A}_o^{(l+1)}(E) \simeq E_o \otimes S^l(T_o^*)$$

なる同型がある ($S^l(\cdot)$ は l 階の対称積). 今複体 E_λ の初項

$$\mathcal{D} : \mathcal{A}(E_{V_\lambda}) \rightarrow \mathcal{A}(E_{V_\lambda^1})$$

を考え, o として G/K の原点 $\{K\}$ をとると, $\mathcal{D}$ が一階だから

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_o^{(l)}(E_{V_\lambda})) \subset \mathcal{A}_o^{(l-1)}(E_{V_\lambda^1}).$$

従って,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_0^{(l)} : \mathcal{A}_0^{(l)}(E_{V_\lambda}) / \mathcal{A}_0^{(l+1)}(E_{V_\lambda}) & \rightarrow & \mathcal{A}_0^{(l-1)}(E_{V_\lambda^\perp}) / \mathcal{A}_0^{(l)}(E_{V_\lambda^\perp}) \\ \downarrow \text{IS} & & \downarrow \text{IS} \\ V_\lambda \otimes S^l(T_0^*) & \longrightarrow & V_\lambda^\perp \otimes S^l(T_0^*) \end{array}$$

なる写像を引き起す ($l=0, 1, 2, \dots$). ここで 0 を G/K の原点ととったから, V_λ, T_0^* は K の表現空間で $\mathcal{D}_0^{(l)}$ 達は K の働きと可換であり, $\text{Ker } \mathcal{D}_0^{(l)}$ は又 K の表現を与える.

補題: $\bigoplus_{l \geq 0} \text{Ker } \mathcal{D}_0^{(l)}$ は K の表現として $\bigoplus_{\mu \in D} b_\lambda(\mu) \tau_\mu$ に同値; 即ち, 最高 weight μ なる K の既約表現の $\bigoplus_{l \geq 0} \text{Ker } \mathcal{D}_0^{(l)}$ における重複度は Blattner の数 $b_\lambda(\mu)$ に等しい.

(証明は若干の cohomological な議論による [2]).

$$H_a^0(E_\lambda) = \text{Ker}(\mathcal{D} : \mathcal{A}(E_{V_\lambda}) \rightarrow \mathcal{A}(E_{V_\lambda^\perp}))$$

に filtration を $\{ \mathcal{A}_0^{(l)}(E_{V_\lambda}) \cap H_a^0(E_\lambda) \}$ によって導入すると, その graduating に関して

$$(I) \quad g_r(H_a^0(E_\lambda)) \subset \bigoplus_{l \geq 0} \text{Ker } \mathcal{D}_0^{(l)}.$$

一般に K の (無限次元) 表現 H が与えられたとき, K -finite な元 ($K \cdot v$ が有限次元を張るような元 v) のなす部分空間を H° と書く. このとき $\bigcap_l \mathcal{A}_0^{(l)} = (0)$ より K の表現空間として

$$H_a^0(E_\lambda)^\circ \simeq g_r(H_a^0(E_\lambda)).$$

又最初の π_λ が実現されている L^2 -cohomology 空間に関しては, 楕円性より $H_{L^2}^0(E_\lambda) \subset H_a^0(E_\lambda)$ だから

$$(II) \quad H_{L^2}^0(E_\lambda)^* \hookrightarrow H_a^0(E_\lambda)^*.$$

かくして我々は K の表現空間の包含列

$$H_{L^2}^0(E_\lambda)^* \hookrightarrow H_a^0(E_\lambda)^* \simeq g_2(H_a^0(E_\lambda)) \hookrightarrow \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ker } \mathcal{D}_0^{(i)}$$

を得る. 実現定理より最初の空間が K の表現 $\bigoplus_{\mu \in D} m_\lambda(\mu) \tau_\mu$

を与え, 補題により最後の空間が $\bigoplus_{\mu \in D} b_\lambda(\mu) \tau_\mu$ を与える.

従って 1° に述べた $m_\lambda(\mu) \leq b_\lambda(\mu)$ が得られる. さらに注意すると;

◎ Blattner 予想 $m_\lambda(\mu) = b_\lambda(\mu)$ と (I), (II) の包含関係が共に等号であることは同値である.

注意 1. W. Schmid [1] は大方の λ に対しては complex analysis (on G/T) を用いて (I) において等号が成立することを示しているようである. しかし方法はまわりくどく, もっと直接的なものが望まれる.

注意 2. 最初の parametre $\Lambda \in \mathfrak{F}'$ に対し正の root 系 $P = \{ \alpha \in \Sigma; (\Lambda, \alpha) > 0 \}$ が特別のタイプのとき ($\alpha + \beta \notin \Sigma$ for $\alpha, \beta \in P_n$), G/K は複素多様体になり E_λ は Dolbeault complex になる. このとき π_Λ は holomorphic discrete series 表現とよばれる. この場合, G/K の自然な有界領域としての実現 (Harish-Chandra,

imbedding) による座標系を考え, E_{V_λ} を適当に trivialize しておくと $H_a^0(E_\lambda)^*$ は (holomorphic な) 多項式で表わせる sections ($= V_\lambda$ -値函数) の全体になっており, (I) における等号は容易である. Harish-Chandra は, ほぼ 20 年前, この条件の下では constant function が L^2 になること, 従って (G/K が有界領域より) すべての多項式は L^2 , 即ち (II) において $H_{L^2}^0(E_\lambda)^* = H_a^0(E_\lambda)^*$ なることを示した. holomorphic discrete series に対しては問題は古昔に解決済みで, 逆に (よく知られているように) 1° で述べた指標公式もこの方法で求められるわけである.

— x —

[1] W. Schmid, Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups, Thesis at Univ. of Calif. - Berkeley 1967.

[2] R. Hotta and R. Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series (preprint).