

2変数の p 進 L 関数について

九大理 小塚和人 (Kazuhito Kozuka)

§1. 序

K を類数 1 の虚 2 次体, $-d_K$ を K の判別式, $\mathcal{O}$ を K の整数環とする. E を K 上定義され, $\mathcal{O}$ による虚数乗法を持つ楕円曲線とし, χ を E の K 上の量指標, ψ を χ の導手とする. E の Weierstrass model

$$(1.1) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

を, $g_2, g_3 \in \mathcal{O}$ で, (1.1) の判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ が 64 を割る素因子のみで割り切れるように固定する. $p(x)$ を (1.1) に関する Weierstrass 関数, L を $p(x)$ の周期格子とし, $\Omega_\infty \in L$ を, $L = \Omega_\infty \mathcal{O}$ となるように固定しておく.

p を $6d_K f$ と素で, K において $(p) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ と分解する有理素数とする. $K_{\mathfrak{p}}$ を K の $\mathfrak{p}$ による完備化とし, p 進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ と同一視する. $\mathbb{C}_p$ を $K_{\mathfrak{p}}$ の代数閉包の完備化, $\mathcal{O}_p$ を $\mathbb{C}_p$ の整数環とする. $\bar{\mathbb{Q}}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ の複素数体 $\mathbb{C}$ における代数閉包とし, $\bar{\mathbb{Q}}$

の $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定して, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}_p$ とも見ることにする.

K の量指標 ψ に対し, $L(\psi, s)$ を ψ に関する原始的な Hecke L 関数とする. K の整イデアル $\mathfrak{o}$ に対し, $R_{\mathfrak{o}}$ を K の ray class field mod $\mathfrak{o}$ とする. $\mathfrak{o}$ が ψ の導手で割り切れる時, 各 $\sigma \in \text{Gal}(R_{\mathfrak{o}}/K)$ に対し, $L_{\mathfrak{o}}(\sigma, \psi, s)$ を ψ と σ に対する部分ゼータ関数とする.

K の原始的な類指標 χ , 及び整数 $0 \leq j < k$ に対し,

$$(1.2) \quad L_{\infty}(\overline{\psi^{k+j}\chi}, k) = (1 - \psi^{k+j}\chi(\mathfrak{g})/N\mathfrak{g}^{j+1})(1 - \overline{\psi^{k+j}\chi}(\mathfrak{g})/N\mathfrak{g}^k) \\ \times (2\pi/\sqrt{d_K})^j |\Omega_{\infty}|^{-(k+j)} L(\overline{\psi^{k+j}\chi}, k)$$

とおく.

Damerell の定理により, (1.2) の右辺は $\mathbb{Q}$ に属する. ここでは (1.2) を本質的な値として補間する 2 変数の p 進巾級数を構成し, それを用いた K のアーベル拡大の類数公式を紹介させて頂きます.

§2. Eisenstein 級数の p 進的性質

整数 $k \geq 1$ に対し,

$$K_k(z, s) = \sum_{w \in L, w \neq -z} (\bar{z} + \bar{w})^k |\bar{z} + \bar{w}|^{-2s}, \quad \text{Re}(s) > 1 + k/2$$

とし, これの全 s 平面への解析接続も $K_k(z, s)$ と書く. 整数 $k > j \geq 0$ に対し,

$$E_{j,k}(z) = (k-1)! (2\pi/\sqrt{d_K})^j |\Omega_{\infty}|^{-2j} K_{k+j}(z, k)$$

とおく. さらに, $E_k(z) = E_{0,k}(z)$ とおく.

$\sigma(z)$ を L の Weierstrass σ 関数とし, $\theta(z) = \Delta \exp(-6\Delta_2 z^2) \sigma(z)^{12}$

とおく. ここに, $\Delta_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{\omega \in L - \{0\}} \omega^{-2} |\omega|^{-2x}$ である.

K の f と素な整イデアル $\mathfrak{m}$ に対し,

$$\Theta(z, \mathfrak{m}) = \theta(z)^{N\mathfrak{m}} / \theta(\psi(\mathfrak{m})z)$$

とおく. $\Theta(z, \mathfrak{m})$ は, L を周期に持つ楕円関数で,

$$\Theta(z, \mathfrak{m}) = \Delta(L) / \Delta(\mathfrak{m}^{-1}L) \cdot \prod_{\ell \in \mathfrak{m}^{-1}L / L - \{0\}} \Delta(L) / (p(z) - p(\ell))^6 \in K(p(z)).$$

となる. ここに, $\Delta(L)$, $\Delta(\mathfrak{m}^{-1}L)$ はそれぞれ格子 L , $\mathfrak{m}^{-1}L$ の判別式である. $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{f}$ の単数で, $\mathfrak{m}$ を法として 1 に合同なものの全体の個数とする.

$E_{j,k}(z)$ に関して, 次の性質が成り立つ ([8] §2);

(2.1) 整数 $k \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus L$ と, f と素な K の整イデアル $\mathfrak{m}$ に対し,

$$(d/dz)^k \log \Theta(z+\alpha, \mathfrak{m}) \Big|_{z=0} = 12(-1)^{k-1} \{ N\mathfrak{m} E_k(\alpha) - \psi(\mathfrak{m})^k E_k(\psi(\mathfrak{m})\alpha) \}$$

となる.

(2.2) ψ^{k+j} の導手が $g \in \mathfrak{f}$ を割り切るとき, gf と素な K の整イデアル $\mathfrak{m}$ に対し,

$$E_{j,k}(\psi \mathfrak{m}) \Omega_{\infty}/g = (k-1)! (2\pi/\sqrt{d_k})^j \Omega_{\infty}^{-(k+j)} (g^{k+j}/Ng^j) \cdot \mathcal{L}_{(g)}(\sigma_z, \overline{\psi^{k+j}}, k)$$

となる. ここに, $\sigma_z = (\mathfrak{m}, R_{(g)}/K)$ である.

(2.3) 整数 $k > j \geq 0$ に対し, 次を満たす多項式 $P_{j,k}(X_1, \dots, X_{k+j})$

$\in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{k+j}]$ が存在する.

$\deg P_{j,k} \leq j+1$, $\deg_{g_{X_1}} P_{j,k}(X_1, \dots, X_{k+j}) \leq j-1$ かつ

$$E_{j,k}(z) = (-E_1(z))^j E_k(z) + 2^{-j} P_{j,k}(E_1(z), \dots, E_{k+j}(z)).$$

(2.4) $g \in \mathcal{U}$ と, $g \nmid$ と素な K の整イデアル $\mathfrak{o}$ に対し,

$$E_{j,k}(\Omega_\infty/g) \in K(E_g), \quad E_{j,k}(\Omega_\infty/g)^{(\mathfrak{o}, K(E_g)/K)} = E_{j,k}(\psi(\mathfrak{z})\Omega_\infty/g)$$

となる.

$g \in \mathcal{U}$ と, 整数 $n, m \geq 0$ に対し, $g_m = g\psi(\bar{g}^m)$, $g_{n,m} = g\psi(g^n \bar{g}^m)$

とおく. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.1. $g \in \mathcal{U}$, $(g, \bar{g}) = 1$ とする. このとき, 整数 $k > j \geq 0$ に対し, $\mathbb{C}_p$ において,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{ \bar{g}_m^j E_{j,k}(\Omega_\infty/g_m) - (-\bar{g}_m E_1(\Omega_\infty/g_m))^j E_k(\Omega_\infty/g_m) \} = 0$$

となる. さらに, $\lim_{m \rightarrow \infty} \{ -\bar{g}_m E_1(\Omega_\infty/g_m) \} \in \mathcal{J}^\times$ が存在し, これは g のとり方によらない.

$$\Omega_g = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ -\bar{g}_m E_1(\Omega_\infty/g_m) \} \text{ とおく.}$$

$\hat{E}$ を E の演算を parameter $t = -2\alpha/y$ で展開して得られる形式群とする. $\hat{E}$ から乗法的形式群 G_m への $\mathcal{J}$ 上の同型 η を, $\eta(T) = \Omega_g T + \dots$ となるようにとることができる. $\lambda: \hat{E} \rightarrow G_a$ を $\hat{E}$ の logarithm とする.

§3. 2変数 p 進 $\mathcal{L}$ 関数の構成

χ を K の類指標, f_χ を χ の導手とする. R_χ を $\text{Ker } \chi$ に対応する R_{f_χ}/K の中間体とする. F が R_χ を含む K のアーベル拡大のとき, χ を $\text{Gal}(F/K)$ の指標ともみることとする.

$\kappa_1: \text{Gal}(K(E_{g^m})/K) \cong \mathbb{Z}_p^\times$, $\kappa_2: \text{Gal}(K(E_{g^m})/K) \cong \mathbb{Z}_p^\times$ をそれぞれ, $\text{Gal}(K(E_{g^m})/K)$, $\text{Gal}(K(E_{g^m})/K)$ の E_{g^m} , E_{g^m} の作用を表す同型とする.

ν を $\mathbb{Z}_p^\times$ の有限指標とすると, $\nu \circ \kappa_1$, $\nu \circ \kappa_2$ はそれぞれ $\text{Gal}(K(E_{g^m})/K)$, $\text{Gal}(K(E_{g^m})/K)$ の有限指標になる. $\nu_g, \nu_{\bar{g}}$ をそれぞれ $\nu \circ \kappa_1$, $\nu \circ \kappa_2$ によって導入される K の類指標とする.

χ は, $\chi = \chi_1(\nu_\chi)_g(\nu'_\chi)_{\bar{g}}$ と表すことができる. ここに, χ_1 は導手が p と素な K の類指標, ν_χ, ν'_χ は $\mathbb{Z}_p^\times$ の有限指標である. ν_χ, ν'_χ はさらに, $\nu_\chi = \varphi \omega^i$, $\nu'_\chi = \varphi' \omega^i$ と分解される. ここに, φ, φ' は $\mathbb{Z}_p^\times$ の第 2 種指標, ω は Teichmüller 指標, i, i' は $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ の元である.

$f_\chi = g_\chi g^{\nu_\chi} \bar{g}^{\nu'_\chi}$, $(g_\chi, p) = 1$ とする. g_χ は χ_1 と (i, i') にのみ依存し, $R_{\chi_1} \subset K(E_{g_\chi})$ となる. g_χ を g_χ の生成元とする. ν_χ, ν'_χ の導手はそれぞれ p^{ν_χ} , $p^{\nu'_\chi}$ となる.

整数 $m \geq 1$ と, p と素な K の整イデアル $\mathfrak{m}$ に対し, $\Theta(z + \Omega_{g_\chi}/g_\chi, \mathfrak{m}) \in K(E_{g_\chi})(\beta(\mathfrak{m}), \beta'(\mathfrak{m}))$ となり, 従って, 各 $\sigma \in \text{Gal}(K(E_{g_\chi})/K)$ に対し, 関数 $\Theta(z + \Omega_{g_\chi}/g_\chi, \mathfrak{m})^\sigma$ が自然に定義される.

$$\Lambda_m(z, \mathfrak{m}) = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(K(E_{g_\chi})/R_{\chi_1}(E_{g^m}))} \Theta(z + \Omega_{g_\chi}/g_\chi, \mathfrak{m})^\sigma$$

とおく. これは, $R_{\chi_1}(E_{\bar{g}^m})$ 係数の $\rho(z)$ と $\rho'(z)$ の有理関数になる.

I_{χ_1} を $6P44_{\chi_1}$ と素な K の整イデアル全体の集合とし,

$$\mathcal{S}_{\chi_1} = \{ \mu: I_{\chi_1} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \mu(n)=0 \text{ for almost all } n \in I_{\chi_1}, \sum_{n \in I_{\chi_1}} \mu(n)(Nn-1)=0 \}$$

とおく. 各 $\mu \in \mathcal{S}_{\chi_1}$ に対し,

$$\Lambda_m(z; \mu) = \prod_{n \in I_{\chi_1}} \Lambda_m(z, n)^{\mu(n)}$$

とおく. さらに,

$$C_{m, \mu, \chi_1}(T) = \Lambda_m(\chi(\bar{g})^{-m} \lambda(T); \mu), \quad g_{m, \mu, \chi_1}(T) = \lambda'(T)^{-1} d/dT \log C_{m, \mu, \chi_1}(T)$$

とおく. $C_{m, \mu, \chi_1}(T)$, $g_{m, \mu, \chi_1}(T)$ は共に, $R_{\chi_1}(E_{\bar{g}^m})[[T]] \cap \mathcal{G}[[T]]$ に属する.

各 $z \in \text{Gal}(R_{\chi_1}(E_{\bar{g}^m})/K)$ に対し, $k_2(z)$ は $\text{mod } p^m$ で一意に定義され, 従って, $(1+T)^{k_2(z)}$ は $\text{mod } ((1+T)^{p^m}-1)$ で一意に定義される. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 3.1. 各 $\sigma \in \text{Gal}(R_{\chi_1}/K)$ に対し,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\substack{z \in \text{Gal}(R_{\chi_1}(E_{\bar{g}^m})/K) \\ z|_{P_{\bar{g}^m}} = \sigma}} g_{m, \mu, \chi_1}^z(T_1) (1+T_2)^{k_2(z)} \in \mathcal{G}[[T_1, T_2]]$$

が存在する.

命題 3.1 の極限級数を, $g_{\mu, \chi_1}^\sigma(T_1, T_2)$ と書くことにする.

$i = \eta^{-1}: G_m \cong \hat{\mathbb{G}}$ とし,

$$h_{\mu, \chi_1}(T_1, T_2) = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_{\chi_1}/K)} \chi_1^{-1}(\sigma) g_{\mu, \chi_1}^{\sigma}(i(T_1), T_2)$$

とおく. さらに, $\tau(\nu_{\chi}^{-1}, J_{p^{n_{\chi}}}) = \sum_{a=1}^{p^{n_{\chi}}} \nu_{\chi}^{-1}(a) J_{p^{n_{\chi}}}^a$, $\tau(\nu'_{\chi}, J_{p^{n'_{\chi}}}) = \sum_{a=1}^{p^{n'_{\chi}}} \nu'_{\chi}(a) J_{p^{n'_{\chi}}}^a$ とおき,

$$(h_{\mu, \chi_1})_{(\nu_{\chi}, \nu'_{\chi}^{-1})}(T_1, T_2) = \tau(\nu_{\chi}^{-1}, J_{p^{n_{\chi}}})^{-1} \tau(\nu'_{\chi}, J_{p^{n'_{\chi}}})^{-1} \\ \times \sum_{\substack{1 \leq a \leq p^{n_{\chi}} \\ 1 \leq b \leq p^{n'_{\chi}}}} \nu_{\chi}^{-1}(a) \nu'_{\chi}(b) h_{\mu, \chi_1}(J_{p^{n_{\chi}}}^a(1+T_1)-1, J_{p^{n'_{\chi}}}^b(1+T_2)-1)$$

とおく. ここに, 整数 $n \geq 0$ に対し, J_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根であるが, 以後これは, $i(J_{p^n}-1) = -2\beta(\Omega_{\infty}/\psi(g^n))/p'(\Omega_{\infty}/\psi(g^n))$ となるようにとられているものとする.

一般に, 各 $f(T_1, T_2) \in \mathcal{F}[[T_1, T_2]]$ に対し, $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{F}$ 値 measure ν_f が対応しており ([7] §6), 各 $(j_1, j_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, Γ 変換 $\Gamma_f^{(j_1, j_2)}: \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \mathcal{F}$ が

$$\Gamma_f^{(j_1, j_2)}(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*} \langle x_1 \rangle^{a_1} \langle x_2 \rangle^{a_2} \omega^{j_1}(x_1) \omega^{j_2}(x_2) d\nu_f$$

により定義される. ここに, $x \in \mathbb{Z}_p^*$ に対し, $\langle x \rangle = x/\omega(x)$ である. 乗法群 $1+p\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元 u を固定すると, 中核数 $f^{(j_1, j_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{F}[[T_1, T_2]]$ が存在して,

$$\Gamma_f^{(j_1, j_2)}(x_1, x_2) = f^{(j_1, j_2)}(u^{a_1}-1, u^{a_2}-1)$$

となる. $Uf(T_1, T_2) = f(T_1, T_2) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p f(J(1+T_j)-1, T_2)$, $D_j = (1+T_j)^{d_j}/dT_j$

($j=1, 2$) とおく. このとき, $(h_{\mu, \chi_1})_{(\nu_{\chi}, \nu'_{\chi}^{-1})}(T_1, T_2)$ の定義と, §2 で述べたことから, 次の命題が導かれる.

命題 3.2. $k_1 > -k_2 \geq 0$, $k_1 \equiv k_2 \equiv 0 \pmod{p-1}$ なる整数 k_1, k_2 に対し,

$$\begin{aligned} \Gamma_{(h_{\mu, \chi_1})_{(v_{\chi_1}, v_{\chi_1}^{-1})}}^{(-1, 0)}(k_1-1, -k_2) &= (D_1^{k_1-1} D_2^{-k_2}) (U_1(h_{\mu, \chi_1})_{(v_{\chi_1}, v_{\chi_1}^{-1})}) \Big|_{(0,0)} \\ &= -12 g_{\chi_1}^{k_1} v_{\chi_1}(g_{\chi_1}) e_{g_{\chi_1}} [K(E_{g_{\chi_1}}) : R_{g_{\chi_1}}] \\ &\quad \times \sum_{a \in I_{\chi_1}} \mu(a) (Na - \psi^{k_1} \bar{\psi}^{k_2} \chi(a)) \\ &\quad \times \chi_1(v_{\chi_1}^{-1})_3 (g^{n_{\chi_1}}) \psi^{k_1}(g^{n_{\chi_1}}) \bar{\psi}^{k_2}(g^{n_{\chi_1}}) \tau(v_{\chi_1}^{-1})_{p^{n_{\chi_1}}}^{-1} \\ &\quad \times \Omega_g^{1-k_1+k_2} (k_1-1)! L_{\infty}(\overline{\psi^{k_1-k_2} \chi}, k_1) \end{aligned}$$

となる.

$$g_{\mu, \chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = h_{\mu, \chi_1}^{(i_1-1, -i_2)}(u^{-1}(1+T_1)-1, (1+T_2)^{-1}-1) \quad \text{とおく. このとき,}$$

き,

$$(3.1) \quad g_{\mu, \chi_1}^{(i_1, i_2)}(\varphi(u)u^{a_1}-1, \varphi(u)u^{a_2}-1) = \Gamma_{(h_{\mu, \chi_1})_{(v_{\chi_1}, v_{\chi_1}^{-1})}}^{(-1, 0)}(a_1-1, -a_2)$$

となる.

各 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $\ell(\alpha) \in \mathbb{Z}_p$ を, $\langle \alpha \rangle = u^{\ell(\alpha)}$ となるものとする.

$$(3.2) \quad A_{\mu, \chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = -12 \omega^{i_1}(g_{\chi_1}) e_{g_{\chi_1}} [K(E_{g_{\chi_1}}) : R_{g_{\chi_1}}] (1+T_1)^{\ell(g_{\chi_1})} \\ \times \sum_{a \in I_{\chi_1}} \mu(a) (Na - (1+T_1)^{\ell(\chi(a))} (1+T_2)^{\ell(\bar{\chi}(a))} \omega^{i_1}(\chi(a)) \omega^{i_2}(\bar{\chi}(a)) \chi_1(a))$$

とおく. $\mathcal{S}_{0, \chi_1} = \{\mu \in \mathcal{S}_{\chi_1} \mid a \in I_{\chi_1}, \chi_1(a) \neq 1 \text{ のとき, } \mu(a) = 0\}$ とおき,

$H_{\chi_1}^{(i_1, i_2)}$ を $\{A_{\mu, \chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \mid \mu \in \mathcal{S}_{0, \chi_1}\}$ によって生成される $\mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]]$ のイデアルとする. このとき, [7]補題 28 と同様に,

$$(3.3) \quad \begin{cases} H_{\chi_1}^{(i_1, i_2)} = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]] \quad (i_1, i_2) \neq (0, 0), (1, 1), & H_{\chi_1}^{(0, 0)} = T_1 \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]] + T_2 \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]], \\ H_{\chi_1}^{(1, 1)} = (T_1 + 1 - u) \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]] + (T_2 + 1 - u) \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]] \end{cases}$$

となる.

$$(3.4) \quad g_{\chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = g_{\mu, \chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) / \Omega_g A_{\mu, \chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) (1+T_2)^{\ell(\psi(\bar{g}^{\mu}))}$$

とおく. これは, $\mu \in \mathcal{S}_{\chi_1}$ のとり方に無関係となる. 命題 3.2,

及び (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) から, 次の定理が得られる.

定理 3.3. $g_{\chi_1}^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{J}[[T_1, T_2]]$ で, $k_1 > -k_2 \geq 0$, $k_1 \equiv k_2 \equiv 0 \pmod{p-1}$ なる整数 k_1, k_2 に対し,

$$g_{\chi_1}^{(i_1, i_2)}(\psi(u)u^{k_1}-1, \psi(u)u^{k_2}-1) = (\psi^{k_1}\chi_1(\psi'_x)_g)(\bar{g}^{n_x})\tau(\psi_x^{-1}, I_{p^{n_x}})^{-1} \\ \times \Omega_g^{-(k_1-k_2)}(k_1-1)! L_{\infty}(\overline{\psi^{k_1-k_2}\chi}, k_1)$$

となる.

§4. 類数公式について

類数公式について説明する為に, まず, 1変数 p 進関数に関する結果を述べる.

§3 と同様, χ を K の類指標とし, $\chi = \chi_1(\psi_x)_g(\psi'_x)_{\bar{g}}$, $\psi_x = \psi\omega^{i_1}$, $\psi'_x = \psi'\omega^{i_2}$, $t_x = g_x \bar{g}^{n_x} \bar{g}^{-n'_x}$, $(t_{x_1}, p) = (g_x, p) = 1$ とする.

$$a_{\chi_1, \psi'_x, i_1} = \begin{cases} -1 & (\chi_1 = \psi'_x = 1, i_1 = 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad \text{とおく. このとき, 次の命題が}$$

成り立つ.

命題 4.1. $g_{\chi_1, \psi'_x, i_1}(T) \in T^{a_{\chi_1, \psi'_x, i_1}} \mathcal{J}[[T]]$ が存在して, $k > 0$,

$k \equiv 0 \pmod{p-1}$ なる整数 k に対し,

$$g_{\chi, \nu'_x, i_1} (\Psi(u)u^k - 1) = \Omega_g^{-k} \tau(\nu'_x, J_{p^{n_x}})^{-1} (k-1)! (\Psi^k \chi(\nu'_x)_g) (g^{n_x}) \\ \times (1 - \Psi^k \chi(g)/N_g) \Omega_\omega^{-k} L(\overline{\Psi^k \chi}, k)$$

となる.

$$L_p(\chi, s) = (\chi(\nu'_x)_g)^{-1} (g^{n_x}) g_{\chi, \nu'_x, i_1} (\Psi(u)u^{1-s} - 1) \text{ とおく.}$$

K の整イデアル $\mathfrak{o}$ に対し, $\text{Cl}(\mathfrak{o})$ を K の ray class group mod $\mathfrak{o}$ とする. $k_{\mathfrak{o}}$ を $\mathfrak{o}$ に属する最小の正の有理整数とする. 各 $C \in \text{Cl}(\mathfrak{o})$ に対し, $\chi_{\mathfrak{o}}(C) \in R_{\mathfrak{o}}$ を [5] §2 で定義された ray class invariant とする.

$$S^{(p)}(\chi) = \sum_{C \in \text{Cl}(\mathfrak{h}_x)} \chi^{-1}(C) \log_p \chi_x(C) \in \mathbb{C}_p$$

とおく. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 4.2. $\chi \neq 1$ のとき,

$$L_p(\chi, 1) = -(1/12 k_{\mathfrak{h}_x} e_{\mathfrak{h}_x} \tau(\nu'_x, J_{p^{n_x}})) (1 - \chi(g)/p) S^{(p)}(\chi)$$

となる.

H を K の有限次アーベル拡大, h_H , $R^{(p)}(H)$, $d_{H/K}$, w_H をそれぞれ, H の類数, H の p 進単数規準, H の K 上の相対判別式の生成元, H に属する 1 の根の個数とする. 各 $\chi \in \widehat{\text{Gal}(H/K)}$ に対し, χ が導入する K の原始的な類指標も χ と書くことにする.

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p^\times$ に対し, $\alpha/\beta \in \mathcal{G}^\times$ のとき, $\alpha \sim \beta$ と書くことにする. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.3. $\prod_{\chi \in \widehat{\text{Gal}(\mathcal{H}_K/\mathcal{G})}} L_p(\chi, 1)/(1-\chi(s)/p) \sim h_H R^{(p)}(H)/W_H \sqrt{d_{H/K}}$ となる.

χ_0 を K の自明な類指標とする. F_∞, F'_∞ をそれぞれ $K(E_{\mathcal{G}_\infty})$, $K(E_{\mathcal{G}'_\infty})$ に含まれる K の $\mathbb{Z}_p$ 拡大, F_n, F'_n をそれぞれ F_∞/K , F'_∞/K の中間体で, K 上 p^n 次のものである. また, K_∞, K_∞^- をそれぞれ, K の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大, anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大, K_n, K_n^- をそれぞれ, K_∞/K , K_∞^-/K の中間体で, K 上 p^n 次のものである. このとき, 次の系が成り立つ.

系 以下の (1)~(4) が成り立つ. (φ は第 2 種指標を動く.)

$$(1) \prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} g_{\chi_0}^{(0,0)}(\varphi(u)-1, 0)/(1-\varphi(\varphi(s))/p) \sim h_{F_n} R^{(p)}(F_n)/\sqrt{d_{F_n/K}}$$

$$(2) \prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} g_{\chi_0}^{(0,0)}(0, \varphi(u)-1)/(1-\varphi(\varphi(s))/p) \sim h_{F'_n} R^{(p)}(F'_n)$$

$$(3) \prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} g_{\chi_0}^{(0,0)}(\varphi(u)-1, \varphi(u)-1) \sim h_{K_n} R^{(p)}(K_n)/\sqrt{d_{K_n/K}}$$

$$(4) \prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} g_{\chi_0}^{(0,0)}(\varphi(u)-1, \varphi^{-1}(u)-1) \sim h_{K_n^-} R^{(p)}(K_n^-)/\sqrt{d_{K_n^-/K}}$$

文献

- [1] J. Coates and A. Wiles, On p -adic L -functions and elliptic units, J. Austr. Math. Soc. (Series A), 26 (1978), 1-25.
- [2] E. de Shalit, The Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication, Perspec. Math. Orland, Academic Press 1987.
- [3] C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. Dorsay, 82-01.
- [4] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p -adic L -functions, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40 (1986) 77-90.
- [5] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).
- [6] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Berlin - Heidelberg - New York, Springer 1976.
- [7] R. Yager, On two variable p -adic L -functions, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.
- [8] R. Yager, p -adic measures on Galois groups, Invent. Math., 76 (1984), 331-343.