

4つの単項式の和で定義 された曲面について

東北大理 石田正典

§0 正規な代数曲面の特異点は、例外集合が非特異有理曲線の輪となるような非特異化を持つとき、カスプ特異点と呼ばれる。カスプ特異点はヒルベルト、モジュラー曲面の構成に際して現われることが知られている。またその双対性、変形問題等Ⅳ型曲面の話にも関連して多くの人に興味をもたれ研究士られているようである。

カスプ特異点の中で局所的に一方の方程式で定義されるものは

$$T_{p,q,r}: x^p + y^q + z^r - xyz = 0, \quad 2 \leq p \leq q \leq r$$

$1/p + 1/q + 1/r < 1$, により $\mathbb{C}^3$ の原点に出来る特異点と解析的に同型であることが知られている。さて、この方程式で定義される $\mathbb{C}^3$ 内の曲面がどんな曲面か、まず曲面の分類表に入れてみようとしたのが、4つの単項式の和で定

義また曲面を調べようとした動機である。

結果は次のようになる。Xをその非特異モデルとすると非正則数 $\rho(X)$ は常に 0 で

$$\rho_g(X) = 0 \Leftrightarrow X: \text{有理曲面}$$

$$\Leftrightarrow (P, q, r) = (2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 3, 9), (2, 3, 10), (2, 3, 11), \\ (2, 3, 12), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 4, 8), (2, 5, 5), (2, 5, 6), \\ (2, 6, 6), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 4), (4, 4, 4),$$

$$\rho_g(X) = 1 \Leftrightarrow X: K3\text{-曲面} \Leftrightarrow$$

$$(P, q, r) = (2, 3, 13), (2, 3, 14), (2, 3, 15), (2, 3, 16), (2, 3, 17), (2, 3, 18), \\ (2, 4, 9), (2, 4, 10), (2, 4, 11), (2, 4, 12), (2, 5, 7), (2, 5, 8), (2, 5, 9), \\ (2, 5, 10), (3, 3, 7), (3, 3, 8), (3, 3, 9), (3, 4, 5), (3, 4, 6),$$

$$\dim \phi_{|K|}(X) = 1, K(X) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(P, q, r) = (2, 3, n), n \geq 19, (2, 4, n), n \geq 13, (3, 3, n) \\ n \geq 10, (2, 6, 7), (2, 6, 8), (2, 7, 7), (2, 7, 8), (2, 8, 8), (3, 5, 5), \\ (3, 5, 6), (3, 6, 6).$$

$$\dim \phi_K(X) = 1, K(X) = 2 \Leftrightarrow$$

$$(p, q, r) = (2, 6, 9), (3, 4, 7)$$

$$\dim \phi_{|K|}(X) = 2, \text{ その他すべて}$$

これを行なうにあたり若干難点と思われたのは、この曲面を $\mathbb{C}^3$ で考えた場合、原点でカスプ特異点をもつため、その非特異化を記述するのが面倒なことである。この問題は次のように解消された。

曲面を $\mathbb{C}^3$ でなく少し小さい $(\mathbb{C}^*)^3$ の中で考えると非特異で、 $(\mathbb{C}^*)^3$ は代数的トーラスであるから、それをトーラスとする適当な非特異トーラス埋込みを作ると、その中でその曲面の閉包をとると即ちにその曲面の非特異完備化が得られ、その非特異化はトーラス埋込みの言葉で記述されるからである。また曲面の幾何種数はコバンスキーの結果により、ニュートン多面体の内部の格子点の数として得られる。またリーマン・ロッホを使うことも可能である。

§1 N を階数が $r \geq 2$ の自由 $\mathbb{Z}$ -加群, M を N の双対加群 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ とする。群環 $\mathbb{C}[M] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{C} e_m$ は付加的トラス T_N のアフィン環である。

さて $f = \sum_{i=0}^n a_i e(m_i)$ ($a_i \neq 0, i=0, \dots, n$) を $\mathbb{C}[M]$ の既約元とする。 r 次元コーワリット空間 $M_{\mathbb{R}}$ の中で格子点の有限集合 $\{m_0, \dots, m_n\}$ の凸包を $\square(f)$ とおく。この多面体 $\square(f)$ の次元が $r' < r$ であれば, f は r' 変数の多項式に還元されるので, ここでは $\square(f)$ の次元は r に等しいとする。

多面体 $\square(f)$ の支持関数

$$h_f: N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_0 = \{c \in \mathbb{R} : c \geq 0\}$$

は $h_f(\alpha) = \min \{ \langle x, \alpha \rangle : x \in \square(f) \}$ により定義される。 h_f は $N_{\mathbb{R}}$ を適当に多面錐に分割すると各錐で線型関数と等しくなる。そのような分割の中で最も粗いものがあり, それを $\Delta(f)$ とおく。この $\Delta(f)$ の元 σ に対し $\sigma^* = \{x \in \square(f); \langle x, \alpha \rangle \leq \langle y, \alpha \rangle, \forall y \in \square(f), \forall \alpha \in \sigma\}$ と定義するとこれは $\Delta(f)$ と $\square(f)$ の面の集合との 1対1対応

となる。この $N_{\mathbb{R}}$ の多角錐分割に対応した T_N -埋込みを $Z(f)$ また f の定める部分多様体 ($f=0$) $\subset T_N$ の $Z(f)$ での閉包を $X(f)$ とおくと、 $X(f)$ は $Z(f)$ の豊富なカルキ因子でしかも $Z(f)$ のどの T_N -軌道も含んでいる。トーラス埋込みは常にマッコーレーであるから、 X のカルキ因子もマッコーレーであり $X(f)$ は双対化加群 $\omega_{X(f)}$ をもつ。

定理 (ホッジ, コバンスキー) $H^0(X(f), \omega_{X(f)})$ の次元は多面体 $\square(f)$ の内部にある M の点の数に等しい。

具体的には、 $\{m'_1, \dots, m'_r\}$ を M の一つの基底とし $x_1 = e(m'_1), \dots, x_r = e(m'_r)$ とおくと、留数写像

$$H^0(\omega_{Z(f)}(X(f))) \rightarrow H^0(\omega_{X(f)})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$g \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r}{f} \mapsto g \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r}{df}$$

が同型となり $H^0(\omega_{Z(f)}(X(f)))$ は $\left\{ \frac{e(m)}{f} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_r}{x_r} : m \in \text{int} \square(f) \cap M \right\}$ を基底として持つ。

§2 さてここで f が $r+1$ 個の単項式の和の

場合を考えよう。すなわち $f = \sum_{i=0}^r a_i e(m_i)$ で $\square(f)$ は r 次元錐体とする。

$e(m_0)$ は T_N の可逆正則関数であるから f を $e(m_0)f$ で置きかえることにより, $m_0 = 0$ と仮定できる。そのとき $m_1, \dots, m_r$ は一次独立であり, それらで生成された M の部分加群を M' とする。当然 M' の M での指数は有限となる。 N' を M' の双対加群とし $\{n_1, \dots, n_r\}$ を $\{m_1, \dots, m_r\}$ に双対な N' の基底とする。すなわち $\langle m_i, n_j \rangle = \delta_{ij}$ とする。そのとき $N'_R = N_R$ の多角錐分解は

$$\{R_0 n_1 + \dots + R_0 n_r : 0 \leq j_1 < \dots < j_r \leq r, p = 0, \dots, r-1\}$$

となる。ここで $m_0 = -m_1 - \dots - m_r$ である。この分解に対応する $T_{N'}$ -埋込みを $Z'(f)$ とおけば, $Z'(f)$ は r 次元射影空間 $\mathbb{P}^r$ で $x_i/x_0 = e(m_i)$, $i = 1, \dots, r$ となる斉次座標系 $(x_0, \dots, x_r)$ を持つ。また $T_{N'}$ での f の零点集合の $Z'(f) = \mathbb{P}^r$ での閉包 $X'(f)$ は $a_0 x_0 + \dots + a_r x_r = 0$ で与えられる超平面である。ここで $M \subset \frac{1}{\alpha} M'$ となるような自然数 α をとり, 同じ $\Delta(f)$ に対応する $T_{\alpha N'}$ -埋込みを $Z'(f)^{(\alpha)}$ とおけば, $Z'(f)^{(\alpha)}$ も r 次元射影空間であり, 包含

写像 $dN' \hookrightarrow N'$ に対応する写像 $\varphi: \mathbb{D}^r \rightarrow \mathbb{D}^r$ は $(Y_0: \dots: Y_r)$ を $Y_i/Y_0 = e(m_i/d)$ となるような $Z(f)^{(d)}$ の斉次座標系とすると, $\varphi: (Y_0: \dots: Y_r) \mapsto (Y_0^d: \dots: Y_r^d)$ となる。したが, 2 超平面 $X'(f) \subset \mathbb{D}^r$ の φ による引き戻し $X'(f)^{(d)}$ は, フェルマ多様体 $(Y_0^d + \dots + Y_r^d = 0) \subset \mathbb{D}^r$ となる。 φ の $X'(f)^{(d)}$ への制限 $\psi: X'(f)^{(d)} \rightarrow X'(f)$ は φ と同じ N'/dN' をガロア群とするアーベル写像で, その中間にある $X(f)$ は $X'(f)^{(d)}$ の N'/dN' の部分群 N/dN' による商多様体となる。一般に $X(f)$ は有理特異点を持つ。

さて Δ を $\Delta(f)$ の細分で格子 N に関して非特異なものとする。すなわち対応する T_N -埋込み Σ が非特異多様体となるとする。 $\lambda: \Sigma \rightarrow Z(f)$ を自然な固有写像とする。

命題 1 $X(f)$ の λ による引き戻し $\lambda^*(X(f))$ は既約かつ非特異である。

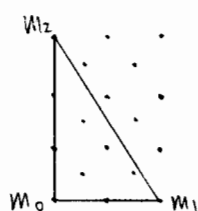
(証明) $\varphi_i: Z(f) \rightarrow \mathbb{D}^r$ を包含写像 $N \hookrightarrow N'$ に対応する写像とする。そのとき, 合成写像 $\varphi_i \circ \lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{D}^r$ による $\mathbb{D}^r$ の一般の

超平面の引き戻しは、ベル42の定理により、既約かつ非特異である。したがって、どの一つも0でない $b_0, \dots, b_r$ が存在して $b_0 x_0 + \dots + b_r x_r = 0$ で定義された超平面 H の引き戻し $(\varphi_0 \circ \lambda)^{-1}(H)$ が既約かつ非特異となる。一方 $\tilde{Z}$ には T_N , $\mathbb{P}^r$ には $T_{N'} = T_N / (N/N')$ が作用していて、これは射 $\varphi_0 \circ \lambda$ と可換であるから、 $t \in T_N$ が存在して $tX'(t) = H$ として $t(\varphi_0 \circ \lambda)^{-1}(H) = (\varphi_0 \circ \lambda)^{-1}(X'(t))$ となり $\lambda^{-1}(X(t)) = (\varphi_0 \circ \lambda)^{-1}(X'(t))$ は既約かつ非特異となる。

おわり

§3 $r=2$ の場合、この場合 $Z(t)$ は $\varphi_1: Z(t) \rightarrow \mathbb{P}^2$ による3点 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ の逆像以外の点では非特異で $X'(t)$ はこれらの点を通っているのので $X(t) = \varphi_1^{-1}(X'(t))$ は非特異曲線となる。

写像 $\psi: X(t) \rightarrow X'(t)$ の被覆の様子はトーラス $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_2$ の写像 φ_1 の様子から次のようになっていることがわかる。



$$[R_{m_2} \cap M : \mathbb{Z}_{m_2}] = l_1, [R_{m_1} \cap M : \mathbb{Z}_{m_1}] = l_2$$

$$[R_{(m_2-m_1)} \cap M : \mathbb{Z}_{(m_2-m_1)}] = l_0$$

$$[M : M'] = n \quad \text{と おく と, } \varphi_1 \text{ は}$$

3点 $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1$ で分岐する n 次のアベル写像で P_i 上の点での分岐指数は $n/l_i, i=0,1,2$ となる。これにフルビッツの種数公式を適用すると $X(\varphi)$ の種数は

$$2g-2 = n(-2) + \sum_{i=0}^2 l_i (n/l_i - 1)$$

より, $g = (n+2-l_0-l_1-l_2)/2$ となる。コバンスキーにより, これは三角形 $\Delta(\varphi)$ の内部にある M の点の数に等しいが, $l_0+l_1+l_2$ がこの三角形の境界の点の数に等しいことに注意すれば, これを直接確認することも, できておずかしくなる。

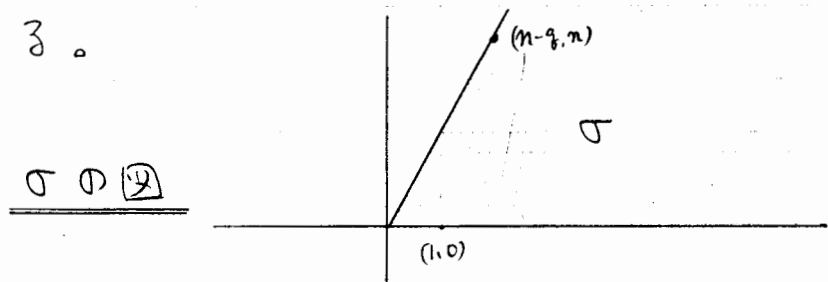
§4 $r=3$ の場合 これが標題の4つの単項式で定義された曲面のことである。 $\varphi_1: \mathbb{Z}(\varphi) \rightarrow \mathbb{P}^3$ はトーラス $\mathbb{P}^3 \supset T_N$ の上では不分岐であるが, 分岐するとすればそれは4つの座標超平面 $(x_0=0), (x_1=0), (x_2=0), (x_3=0)$ 上であ

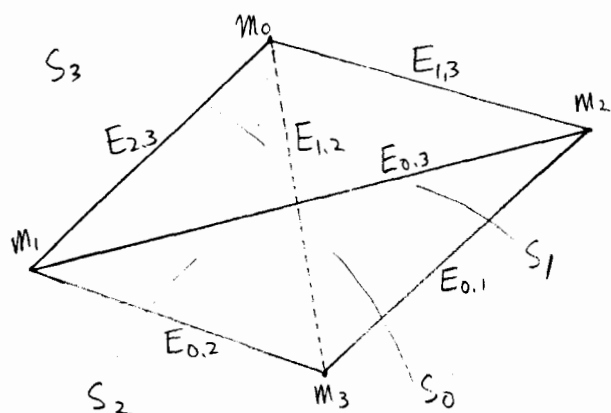
る。それらを $X(f) = \mathbb{P}^2$ に制限すると $\mathbb{P}^2$ 上の 4 つの直線となる。それらをそれぞれ $L_0, \dots, L_3$ とおく。 $a_0, \dots, a_3 \neq 0$ の仮定より、 X のうち 3 本が同一点を通ることはない。したがって、これらは 6 つの交点をもつ。 $Z(f)$ はこれら 6 点の上で巡回商特異点を持ち得る。さて Δ を $\Delta(f)$ の 2 次元以下の錐全部のつくる Δ の部分複体とする。対応する T_N -埋込み $Z(f)^\circ$ は $\mathbb{P}^3$ から 4 点 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ を除いた開部分多様体であるが平面 $X(f)$ はこれらの 4 点を含まない。ので $X(f)$ の非特異化は Δ を細分して $Z(f)^\circ$ を非特異化し X への $X(f)$ の引き戻しを考えれば十分である。2 次元の錐の非特異化は容易で σ を 2 次元の錐とすると、原点から出て $\sigma \cap N$ の凸包の境界にある N の各点を結ぶ半直線で σ を分割することにより非特異化が得られる。 H を σ を含む平面とし、 $H \cap N$ の適当な $\mathbb{Z}$ -座標、互いに素な 2 つの整数 $0 \leq r < n$ に対し σ が次頁の図のような錐とすると、 $n=1$ なら非特異で $n > 1$ の場合、対応す

る T_N -埋込みの σ に対応する軌道の特異点は、
 $\zeta = e^{2\pi i/n}$ に対し平面を $p: (x, y) \mapsto (\zeta x, \zeta^p y)$ で
生成される位数 n の巡回群の作用による、巡
回商空間と直線の直積の特異点と等しい。指
数 $[N: N' + H \cap N]$ を l とすると $X(f)$ は σ に対
応する軌道を l 回横断しているのので、この巡
回商特異点を l 個持つ。 Δ の各二次元錐に上
記の細分を行なう、たものを $\hat{\Delta}^0$ とし、対応する
 T_N -埋入を $\hat{\Delta}^0$ とすれば、 $X(f) \subset Z(f)$ の $\hat{\Delta}^0$ への引
き戻し $\hat{X}(f)$ はこれらの巡回商特異点の極小非
特異化に他ならない。この場合例外集合は、
非特異有理曲線の鎖で y 軸の固有引き戻しを
 $\hat{D}_x$ 、 x 軸の固有引き戻しを $\hat{D}_y$ また n/g が
 $a_1 - \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} - \dots - \sqrt{a_n}$ と連分数に展開され
るとすると、自己交点数の列は

$$\hat{D}_x \text{ --- } (-a_1) \text{ --- } (-a_2) \text{ --- } \dots \text{ --- } (-a_n) \text{ --- } \hat{D}_y$$

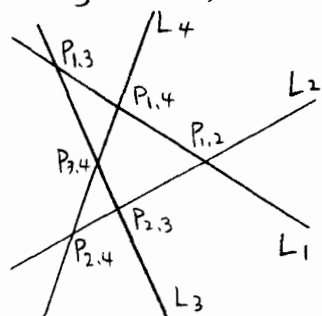
となる。





$\{m_0, m_1, m_2, m_3\}$ で張られる 4 面体とし、 $S_1, \dots, S_4$ をその 4 つの面、 $E_{i,j}$ $0 \leq i < j \leq 3$ を 6 つの辺で、

上図のようとする。 $6 \text{vol}(V) = n$, $2 \cdot \text{area}(S_i) = b_i$, $i=0,1,2,3$, $\text{length}(E_{i,j}) = d_{i,j}$, $0 \leq i < j \leq 3$ とおく。但し N の $t+1$ 個の元 $v_0, \dots, v_t$ で張られた t 次元多面体 W の t 次元体積 $\text{vol}_t(W)$ を $[(\sum_{i=1}^t R(v_i - v_0)) \cap N : \sum_{i=1}^t \mathbb{Z}(v_i - v_0)] / t!$ で定義し、 $\text{vol}_3 = \text{vol}$, $\text{vol}_2 = \text{area}$, $\text{vol}_1 = \text{length}$ とする。



$0 \leq i < j \leq 3$ に対し $X(t) = \mathbb{P}^2$ の直線 L_i と L_j の交点を $P_{i,j}$ とおく。このとき有限アーベル群 $\psi: X(t) \rightarrow \mathbb{P}^2$ は次数が n で、各 L_i の引き戻し

$(\psi^{-1}(L_i))_{\text{red}}$ を C_i とおけば、 C_i は S_i の相対内部の N の点の数を種数として持つ非特異既約曲線で、 C_i の L_i 上の次数は a_i , また C_i と C_j の交わり

り $\psi^{-1}(P_{ij})$ は l_{ij} 個の点から成り、これらの点は $E_{ij} \in \square(f)$ に対応する $\Delta(f)$ の元 σ_{ij} から出来る巡回商特異点となる。

さて、一般に巡回商特異点を持つ曲面 $X(f)$ のオイラー数 e 及び普遍因子 K_X を $\mathbb{Q}$ カル + $\mathbb{I}$ 因子と見たときの自己交点数 K_X^2 も容易に計算できる。まず $e(\mathbb{P}^2 \setminus (L_0 \cup \dots \cup L_3)) = 1$, $e(\mathbb{P}^1 - 3 \text{ points}) = -1$, $e(\text{point}) = 1$ より、被覆の様子から

$$e(X(f)) = n - \sum_{i=0}^3 b_i + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} l_{ij}$$

が得られ、 L を $\mathbb{P}^2$ の直線とすると $\psi^{-1}(L)$ は $(n/b_i)C_i$, $i=0, \dots, 3$ と線型同値であるから、

$$\begin{aligned} K_{X(f)} &\sim \psi^{-1}(-3L) + \sum_{i=0}^3 \left(\frac{n}{b_i} - 1\right) C_i \\ &\sim \psi^{-1}\left((-3 + \sum_{i=0}^3 \left(\frac{n}{b_i} - 1\right)(b_i/n))L\right) \\ &\sim \psi^{-1}\left((1 - (\sum_{i=0}^3 b_i)/n)L\right) \end{aligned}$$

となり、 ψ の次数は n であるから

$$K_{X(f)}^2 = (n - \sum_{i=0}^3 b_i)^2 / n$$

を得る。

§5 さて次に巡回商特異点を解消した時の e と K^2 の変化を見てみよう。

$0 \leq g < n$, $(n, g) = 1$, $\zeta = e^{2\pi i/n}$ とし $P: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$
 $P(x, y) = (\zeta x, \zeta^g y)$ で生成される巡回群 $\langle P \rangle$ での
 $\mathbb{C}^2$ の商空間を X とおく。 $\mathbb{C}^2$ の原点の像を $P \in X$
 とすると X は P だけで特異性をもつ。 $D_x =$
 $\mathfrak{m}_P \times \mathbb{C} / \langle P \rangle$, $D_y = \mathbb{C} \times \mathfrak{m}_P / \langle P \rangle$ とおくと D_x, D_y は X
 の既約因子で nD_x, nD_y はそれぞれ X の正則関
 数 x^n, y^n で定義されたカル4工因子となる。
 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の極小非特異化とする。前に
 述べたように例外集合は自己交点数が n/g の
 連分數展開に現われる数列の負となる非特異
 有理曲線の鎖である。これを (n, g) 型の巡回商
 特異点 (呼ぶことにする。 x と y を入れかえ
 た場合, 型は変化するが, それを (n, g') とす
 る容易に分かるように $gg' \equiv 1 \pmod{n}$ となる。
 連分數展開の数列 $a_1, \dots, a_n$ から逆に n, g は
 $n = d(a_1, \dots, a_n)$, $g = d(a_2, \dots, a_n)$ となる。但し, 数
 列 $c_1, \dots, c_t$ に対して

$$d(c_1, \dots, c_t) = \det \begin{pmatrix} c_1 & 1 & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & c_t \end{pmatrix}$$

と定義する。また $b_i = d(a_{i+1}, \dots, a_n)$ とおくと

カル + 工 因子 mD_x の引き戻し $\pi^*(mD_x)$ は

$$b_0 D_x + b_1 C_1 + \dots + b_n C_n \text{ となる。 } \therefore b_0 = n, \\ b_1 = g, b_n = 1 \text{ である。 } \therefore \text{注意しよう。また} \\ b_{i+1} = a_i b_i - b_{i+1} \text{ の等式を満たす。 } \pm 2 \pi^*(P) \\ = \sum_{i=1}^n C_i \text{ の } C_i \text{ を除いた } \sum_{i=2}^n C_i \text{ は 1 点に縮小して} \\ \text{乙, 乙は } (n, g) = (b_1, b_2) \text{ を型とする。巡回的性} \\ \text{質点となる。 } X \text{ の曲面 } X' \text{ におき } D_x, D_g, C_1$$

の $X \setminus \Lambda$ の像をそれぞれ D_x, D_g, C_1 とかく。
補題 1 自己交点数 D_x^2 と D_g^2 との差、

をもち $\pi^* D_x - D_x < X$ の自己交点数の -1/2 倍
 は g/n に等しい。

(証明) Λ に關する帰納法で証明する。

$\Lambda = 0$ となる $n = 1, g = 0$ の時は $X = X'$ であるから
 自明である。帰納法の仮定より X' に対し
 補題は正しく C_1 はこの場合 D_x の後目であるから
 $\therefore C_1^2 - C_1^2 = b_2/b_1$ となる。

$$\begin{aligned} (b_0 D_x)^2 &= (b_0 D_x + b_1 C_1)^2 \\ &= b_0^2 D_x^2 + 2b_0 b_1 + b_1^2 C_1^2 \\ &= b_0^2 D_x^2 + 2b_0 b_1 + b_1^2 C_1^2 \\ &= b_0^2 D_x^2 + 2b_0 b_1 - b_1(a_1 b_1 - b_2) \end{aligned}$$

$$= b_0^2 \bar{D}_x^2 + b_0 b_1$$

両辺を b_0^2 で割れば補題を得る。

おわり

補題 2

K_X^2 と $K_{X'}^2$ の差は $(n-3-1)^2/gn$

(証明)

差は $-(\pi^1(K_X) - K_{X'})^2$ であり,

$$K_X = -D_X - D_Y, \quad \pi^1(D_X) = D'_X + (3/n)C'_1, \quad \pi^1(D_Y) = D'_Y + (1/n)C'_1$$

より $\pi^1(K_X) = -D'_X - D'_Y - (3+1)/n \cdot C'_1$ であり, 一方

$$K_{X'} = -D'_X - D'_Y - C'_1 \quad \text{であるから,} \quad \pi^1(K_X) - K_{X'} = (n-3-1)/n \cdot C'_1$$

であり $C_1'^2$ は補題 1 より

$$C_1'^2 = -a_1 + b_2/b_1 = -b_0/b_1 = -n/g$$

$$\text{だから 差は } -((n-3-1)/n)^2 \cdot (-n/g) = (n-3-1)^2/gn$$

となる。

おわり

補題 3

$$g^X = d(a_1, \dots, a_{s-1}), \quad g^{1X} = d(a_2, \dots, a_{s-1})$$

$$\text{とおく} \quad gg^X = ng^{1X} + 1.$$

(証明)

すべし 2 の $2 \leq t \leq s$ に対し

$$d(a_1, \dots, a_{t-1})d(a_2, \dots, a_t) = d(a_1, \dots, a_t)d(a_2, \dots, a_{t-1}) + 1$$

を示す。 $t=2$ なるは明らか。 $t \geq 3$ に対し $t-1$

に対し t は正しいと仮定する。このとき,

$$d(a_1, \dots, a_t)d(a_2, \dots, a_{t-1}) + 1$$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 \cdot d(a_2, \dots, a_t) - d(a_3, \dots, a_t)) d(a_2, \dots, a_{t-1}) + 1 \\
&= a_1 \cdot d(a_2, \dots, a_t) d(a_2, \dots, a_{t-1}) - d(a_3, \dots, a_t) d(a_2, \dots, a_{t-1}) + 1 \\
&= a_1 \cdot d(a_2, \dots, a_t) d(a_2, \dots, a_{t-1}) - d(a_2, \dots, a_t) d(a_3, \dots, a_{t-1}) \\
&= (a_1 \cdot d(a_2, \dots, a_{t-1}) - d(a_3, \dots, a_{t-1})) d(a_2, \dots, a_t) \\
&= d(a_1, \dots, a_{t-1}) d(a_2, \dots, a_t)
\end{aligned}$$

よ、こゝに對してモ正しし

お終り

定義 ここで $\sigma(n, g) = a_1 + \dots + a_n - 3n + 1$

とおきこの巡回商特異点の偏差と呼ぶことに
する。 $\sigma(n, g) = \sigma(n, g^*) = -\sigma(n, n-g)$ が成り
立つ。

命題 K_X^2 と $K_{X'}^2$ の差は $\sigma(n, g) + n - 3 + (g + g^* + 2)/n$.

証明) r に関する帰納法で $\tilde{X} \rightarrow X'$ につ
いて正しいと仮定する。すなわち、 $g' = k_1$ に對し

$$K_{X'}^2 - K_{\tilde{X}}^2 = a_2 + \dots + a_n - 2n + (g' + g^* + 2)/g$$

である。 $K_X^2 - K_{\tilde{X}}^2 = (K_X^2 - K_{X'}^2) + (K_{X'}^2 - K_{\tilde{X}}^2)$ であ
るが、補題2によりこれは

$$\begin{aligned}
&(n^2 + g^2 - 2ng - 2n + 2g + 1)/g + a_2 + \dots + a_n - 2n + (g' + g^* + 2)/g \\
&= a_2 + \dots + a_n - 2n + (n(n+g') + (ng^* + 1) + g^2 - 2ng + 2g)/gn \\
&\text{に等しく、補題3および } n + g' = a_1 g \text{ より、こ}
\end{aligned}$$

れは

$$\begin{aligned} & a_2 + \dots + a_n - 2\lambda + (na_1 + g^* + g - 2n + 2)/n \\ &= a_1 + \dots + a_n - 2\lambda + 2 + (g + g^* + 2)/n \end{aligned}$$

に等しい。

おまけ

一方明らかに, $e(X) - e(\tilde{X}) = -\lambda$ であるから, (n, g) の型の巡回商特異点を解消することにより, オイラー数と普遍因子の自己交点数の和 $e + K^2$ は $\sigma(n, g) - 3 + (g + g^* + 2)/n$ だけ減少することがわかる。

§6 さて §4 のつづきで, $E_{ij}, 0 \leq i < j \leq 3$ に対応する $\Delta(f)$ の二次元錐を σ_{ij} とし, C_i と C_j を前節の D_x, D_y にそれぞれ対応させた時の交点の巡回商特異点の型を (n_{ij}, g_{ij}) とし $g_{j,i}$ を $n_{ij} = 1$ ならば 0, $n_{ij} > 1$ の時は $0 < g_{j,i} < n$ かつ $g_{ij} g_{j,i} \equiv 1 \pmod{n_{ij}}$ となる整数とする。曲面 $X(f)$ の非特異化 $\tilde{X}(f)$ の構造層 $\mathcal{O}_{\tilde{X}(f)}$ の構造層 $\mathcal{O}_{\tilde{X}(f)}$ のオイラー数 $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}(f)})$ は, 曲面のリーマン・ロッホの定理により

に於ける結果を証明するに於ては、
 (1) 2. 次の幾何的補題を用いる。この補題を用
 いる。容易に示される。この補題を用

$$P_g = 2n + 4/m - \sum_{0 \leq i < j \leq 3} \sigma(m, g_{i,j}) - \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (g_{i,j} + g_{j,i})/m / 12$$

$$0 \leq i < j \leq 3, \quad 2 \leq a_1 = a_2 = \dots = a_4 = 1$$
 として仮定する。この場合 $m_{i,j} = m, g_{i,j} = 1$
 凸多角形と M との交わりが 4 の頂点 $m_0, \dots, m_3$
 及び特殊な場合として、4 面体凸多角形の境界
 上をいかる。

面体凸多角形の内部に含まれる M の点の数の公式
 が得られる。この公式により、これは 4

$$P_g = \frac{2n - 3 \sum_{i=0}^3 b_i + \left(\frac{2}{3} b_i \right)^2 / m - 12 - \sum_{0 \leq i < j \leq 3} g_{i,j} (\sigma(m, g_{i,j}) - 4 + (g_{i,j} + g_{j,i})/m)}{12}$$

P_g の公式

有限群の作用に於ける結果を示す。この結果は、
 P_g 幾何的補題であるが $X(g)$ は g の曲線の
 と計算される。 $\chi(\theta g_{i,j}) = 1 - g + P_g, \quad g: \text{不正則数}$

$$= 2n - 3 \sum_{i=0}^3 b_i + \left(\frac{2}{3} b_i \right)^2 / m + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} g_{i,j} \left(\sigma(m_{i,j}, g_{i,j}) - 3 + (g_{i,j} + g_{j,i})/m_{i,j} \right) - \sum_{j=1}^6 g_j$$

$$12 \chi(\theta g_{i,j}) = e(X(g_{i,j})) + K_{X(g_{i,j})}^2$$

終点補題

$m_1, m_2, m_3 \in M$ が一次独立で、

$\{0, m_1, m_2, m_3\}$ の張る 4 面体が、 M の点をこの 4 点しか含まなければ、互いに素な整数 $0 \leq f < n$ とある適当な M の $\mathbb{Z}$ -座標系に対して

$\{m_1, m_2, m_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (p, n, 1)\}$ (順不同) となる。

§ 7 さて $r=3$ の一般の場合に戻り、 $r=2$ の時の結果から、各 $0 \leq i \leq 3$ に対し $C_i \subset X(H)$ の種数 g_i は $(b_i + 2 - \sum_{j=0}^3 l_{ij})/2$ となる。但し $i=j$ のとき $l_{ij}=0$ 、 $i > j$ のとき $l_{ij}=l_{ji}$ とした。また因子としては $\psi_i^{-1}(L_i) = (n/b_i)C_i$ であるから、 C_i の自己交点数は b_i^2/n となる。非特異化 $\hat{X}(H)$ への C_i の固有引き戻しも $\tilde{C}_i$ とすれば、補題 1 により

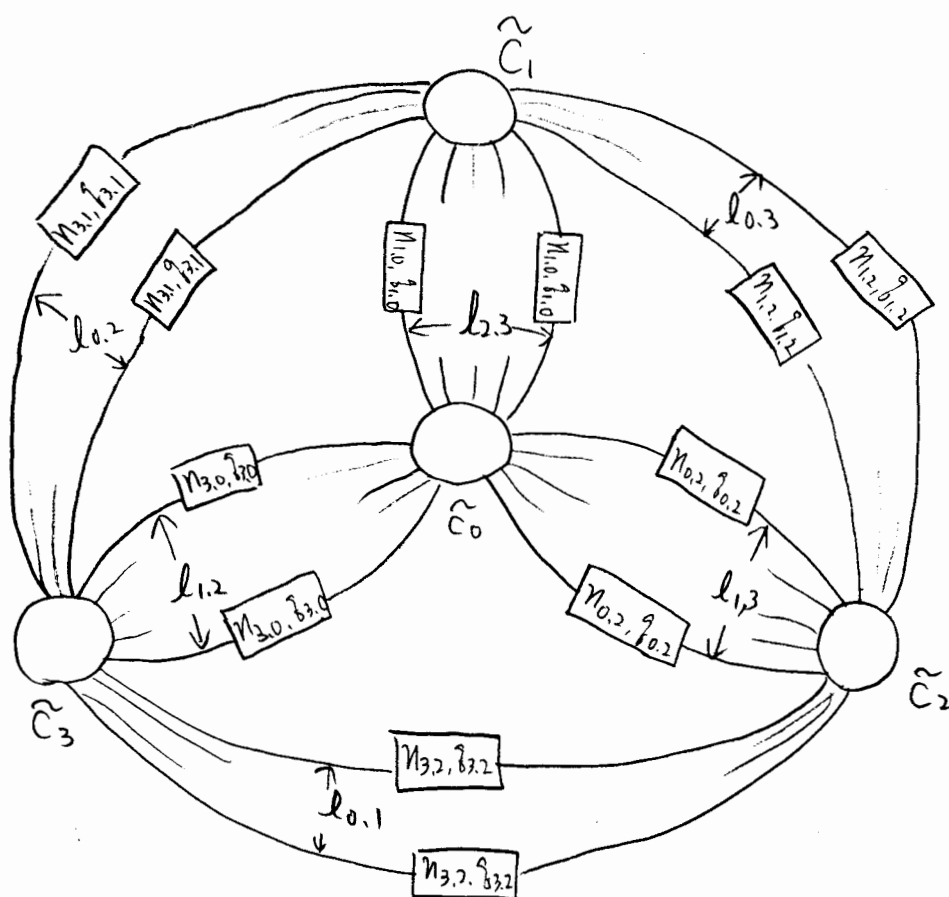
$$\tilde{c}_i^2 = b_i^2/n - \sum_{0 \leq i < j \leq 3} l_{ij} g_{ij}/n_{ij}$$

となる。

さて最後に非特異化 $\hat{X}(H)$ のトーラス T_N に入っている部分の曲線のグラフを描きたり、図の簡略化のため、非特異有理曲線の鎖

$$-(a_1) - (a_2) - \dots - (a_n) -$$

を記号 $\boxed{n, g}$ で書き換える。和 $L_{00} \cup \dots \cup L_3$ の $\tilde{X}(H)$ への引き戻しのグラフは次のように書き表わされる。



$T_{p,f,r}=0$ で定義された曲面の小平次元は、この図を用いて、各 (p,f,r) について 30 分以内で計算できる。

文献'

A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and toroidal varieties
Functional Analysis and Applications, 11/4 (1977)

—, Newton polyhedra and the genus of complete intersection
Functional Analysis and Applications, 12/1 (1978)

小田忠雄, 凸体の幾何学と代数的幾何学, 数学
第33巻2号, 1981年春季号

M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, to
appear in Symposia in Math., 1, ed. S. Iitaka and T. Morikawa
Kinokuniya and North-Holland, 1982. (これの(4.13)
に終点補題のことが書いてある)