

氏 名	かげ やま まさる 影 山 優
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3097 号
学位授与の日付	平 成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	On the bounded condition of an o-minimal structure (ある順序極小構造の有界条件について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 森 脇 淳 教 授 河 野 明 教 授 重 川 一 郎

論 文 内 容 の 要 旨

影山氏の主論文は、モデル理論から定まるグロンダンディック環の決定を扱うものである。20世紀の数学を考える上で、位相幾何学・代数幾何学において果たされてきたグロンダンディック環の役割は極めて重要である。特に、通常ホモロジー・コホモロジー群の定義が困難である一般のスキーム上でのグロンダンディック環はその簡便な定義から有用な道具として用いられているものである。これを、モデル理論において拡張したものが影山氏の研究対象である。

まず、モデル理論から定まるグロンダンディック環の定義から述べよう。 M をある理論を満たすモデルとする。 M の有限直積の中で理論の言語を用いて定義される部分集合を定義可能集合という。さらに二つの定義可能集合 X と Y が同型であるとは X と Y の間に定義可能な全単射が存在するときをいう。 $K_0(M)$ は定義可能集合 X から定まるシンボル $[X]$ で生成されるアーベル群で以下の関係式を満たすものである： X と Y を M^n で $X \cap Y = \emptyset$ のとき、

$$[X \cup Y] = [X] + [Y]$$

となる。さらに環構造は、二つの定義可能集合 X と Y に対して、

$$[X \times Y] = [X] \cdot [Y]$$

で定める。このようにして定まる環構造を決定しようというのが影山氏の研究テーマである。

影山氏は、その構造を決定するための理論として、モデル理論で活発に研究されている順序付のアーベル群の o -最小展開という理論を採用している。これは、その理論のモデルとなる順序付のアーベル群の定義可能集合は有限区間（一点も含む）の有限和になるような理論のことである。この理論に対してのグロンダンディック環の決定には次の有界条件が本質的である：有界条件を満たすとは、その理論のモデルの有限直積の二つの同型な定義可能集合を考えたとき一方が有界なら他方も有界であるということである。実際、グロンダンディック環は有界条件を満たすとき、 $Z[T]/(T^2+T)$ と同型で、満たさないとき、 Z と同型になる。この結果は影山氏が藤田氏との共同研究で得られた結果であり、Journal of Algebra に発表されている。さらに、モデル理論の世界的権威であるフルショフスキーのモチビック積分についての論文で引用されている。影山氏の博士論文はこの結果をさらに順序付体上の順序付ベクトル空間の o -最小展開に拡張したものである。主定理は、この場合、必ず有界条件を満たすことになり、そのグロンダンディック環は常に $Z[T]/(T^2+T)$ と同型になるということである。以上が影山氏の博士論文の要旨である。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

影山氏の主論文は、モデル理論から定まるグロンダンディック環の決定を扱うものである。これは通常のグロンダンディック環のモデル理論的類似物であり、その計算はきわめて困難なものである。影山氏はこの環をモデル理論で活発に研究されている順序付のアーベル群の o -最小展開という理論において深い研究をした。まず、参考論文にあがっている「Grothendieck rings of o -minimalexpanions of ordered abelian groups」は藤田氏との共同研究で、この分野の著名な雑誌

である Journal of Algebra に発表されており、モデル理論の世界的権威であるフルショフスキーのモチビック積分についての論文で引用されている。このことから、その論文の意義はわかると思うが、実際、この方面では決定的な結果で、理論が有界条件を満たすときは、そのグロンデンディック環は $Z[T]/(T^2+T)$ と同型で、そうでないとき、 Z と同型であると主張するものである。影山氏の主論文はこの結果をもとに、順序付体上の順序付ベクトル空間の $\circ$ -最小展開に拡張したものである。主定理は、この場合、必ず有界条件を満たすことになり、そのグロンデンディック環は常に $Z[T]/(T^2+T)$ と同型になるということである。スカラー構造が入るという条件だけで、共同研究の結果では残っていた一つの場合を消せるという驚くべき結果である。

ここでは、すこしその証明方法について言及したい。有界条件を満たさないとすると、有界な定義可能集合と有界でない定義可能集合の間に定義可能な同型が存在することになる。 $\circ$ -最小構造をもつモデルの定義可能集合には細胞分割というもの存在着して、これを用いることで、もう少し簡単な有界な定義可能集合と有界でない定義可能集合の間に定義可能な同型が存在することになる。そうすると、単調性定理を用いることができる状況になり、矛盾を得るといった流れである。技術的に複雑な部分もあるが、証明そのものは、きわめて簡潔で、美しいものである。結果の重要さもさることながら、証明の明瞭さの点からも学位論文として価値の高いものであると判定した。影山氏のこの分野におけるさらなる新しい発見を大いに期待している。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。