

シークエントと証明活動

佐々木克巳

Katsumi Sasaki

Faculty of Science and Engineering,
Nanzan University

概要

学校教育における証明活動は、4つの相、すなわち、問題の理解、証明の構想、証明の構成、振り返りに分けられている(辻山 [4] など)。本稿では、この各相におけるシークエントのよさを考察する。主な考察は、証明の構想、証明の構成に対して行うが、その内容の多くは佐々木 [2],[3] で述べたことである。本稿では、それらの考察を含め、シークエントのよさを4つの相に対応付ける形で整理する。

1 はじめに

シークエントは、Gentzen [1] が与えた、証明の形式体系 **LK** の基本表現である。[1] のシークエントには、「証明の筋道をシークエントの変化で表現できる」という特徴があるが、本稿では、その特徴を活かしつつ、少し表現を変えた形をシークエントという。具体的には、 $n+1$ 個の述語 $P, P_1, \dots, P_n$ に対し、表現

$$P_1, \dots, P_n \Rightarrow P$$

をシークエントという ($n = 0, 1, 2, \dots$)。 $P_1, \dots, P_n$ をこのシークエントの左辺、 P を右辺という。シークエントの左辺の述語の順番と重複は区別しないものとする。このシークエントも、[1] のシークエントの特徴「証明の筋道はシークエントの変化で表現できる」を持つ。より具体的には、証明の各段階に、その段階の「使える性質」と「導きたい性質」をそれぞれ左辺と右辺としたシークエントを対応付けると、その対応付けられたシークエントの変化が、証明の筋道となる。本稿では、 n 個のシークエント $S_1, \dots, S_n$ からシークエント S への変化を

$$\frac{S_1 \quad \dots \quad S_n}{S}$$

と表現し、これを推論規則という ($n = 0, 1, 2, \dots$)。各 S_i をこの推論規則の上式、 S を下式という。証明の筋道は、この推論規則を組み合わせた図式で表現できることになる。

本稿は、シークエントのよさを、証明活動における各相(問題の理解、証明の構想、証明の構成、振り返り)において考察する。以下の各節でその考察を示す。

2 シークエントと問題の理解

この節では、問題の理解におけるシークエントのよさを考察する。そのよさは、自然に考察できるとおり、

- 証明すべき問題をシークエントで表現することで、問題の仮定と結論をより明らかにできること

である。ただし、このよさは、フローチャートなどの図式でもいえることである。たとえば、次の問題1をシークエントで表現すると、

「ABCD は図1のような四角形」, $AB=AD$, $CB=CD \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$

となり、「図1のような」の部分は正確ではないが、他の部分の仮定と結論が明らかになっている。フローチャートでも、上のシークエントの左辺 (の明らかな部分) と右辺を最初にかくことで、それを確認できる。

問題1. 図1の四角形ABCDが $AB=AD$, $CB=CD$ を満たすとき、 $\angle ABC = \angle ADC$ を証明せよ。

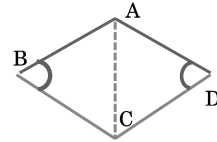


図 1: 問題1の図

3 シークエントと証明の構想

この節では、証明の構想におけるシークエントのよさについて、[2],[3] の概要を述べる。そのよさは、

- フローチャートでは表現できない推論を、シークエントの変化で表現できること
- 証明の構想の過程を、シークエントの変化でできること

である。フローチャートと比べてみると、第1のよさは明らかであるが、第2のよさも、フローチャートでは証明の構想の過程を表現できないことから、そのよさは顕著に現れると考える。以下例を挙げる。

第1のよさの例は、背理法である。背理法はシークエントの変化では、

$$\frac{\neg P, P_1, \dots, P_n \Rightarrow \text{矛盾}}{P_1, \dots, P_n \Rightarrow P}$$

と表現できるが、フローチャートでは表現できない。ただし、“ $\neg P$ ” は、「 P でない」の記号表現である。

第2のよさの例を挙げる。前節の問題1には、次の2つの構想がある。構想1は結論から逆方向に進める構想で解析的方法と呼ばれ、構想2は仮定から順方向に進める構想で総合的方法と呼ばれている。

構想1

- (1) $\angle ABC = \angle ADC$ を示すには、 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ を示せばよい。
- (2) (1) の合同を示すには、3組の辺がそれぞれ等しいことを示せばよい。
- (3) (2) の3組のうち、2組の辺は仮定からそれぞれ等しく、残り1組は共通辺なので等しい。

構想2

- (1) 2つの仮定から、 $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ の2組の辺がそれぞれ等しいので、残り1組の辺が等しければ合同がいえる（使える性質に加えられる）。
- (2) 残り1組の辺は共通辺なので等しく、(1) の2つの三角形は合同である。
- (3) (2) の結果から、 $\angle ABC = \angle ADC$ である。

2つの構想は異なるが、それらから構成される証明の筋道は同じで、以下のフローチャートで表現される。

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD(\text{仮定}) \\ CB = CD(\text{仮定}) \\ AC = AC(\text{共通辺}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$$

つまり、このフローチャートからは、もともなった構想の過程を読み取ることはできない（構想1か、構想2か、あるいは別の構想かを区別できない）。

一方、2つの構想の過程は、シークエントの変化では区別できる。具体的には、以下のとおりである。ただし、シークエントの左辺の記号“ $\uparrow$ ”は「下式のシークエントの左辺と同じ列」を表す。

構想1：

$$\frac{\frac{\uparrow \Rightarrow AB = AD \quad (3) \quad \uparrow \Rightarrow CB = CD \quad (3) \quad \uparrow \Rightarrow AC = AC \quad (3)}{\uparrow \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ADC \quad (2)}}{AB = AD, CB = CD \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC \quad (1)}$$

構想2：

$$\frac{\uparrow \Rightarrow AC = AC \quad (2) \quad \triangle ABC = \triangle ADC, \uparrow \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC \quad (3)}{AB = AD, CB = CD \Rightarrow \angle ABC = \angle ADC \quad (1)}$$

どちらの図式においても、推論規則(1),(2),(3)は各構想のステップ(1),(2),(3)に対応しており、構想の過程が区別できている。

4 シークエントと証明の構成

この節では、証明の構成におけるシークエントのよさを考察する。本稿では、証明の構成のうち、証明の構想でできた筋道を日本語で表現することに焦点を絞って考察する。証明の構成においては、シークエントよりフローチャートの方がよい点もあり、よさの考察に、シークエントの特徴の考察を含めることにする。より具体的には、2つの特徴

- シークエントの変化からは、証明の筋道を読み取れないことがあること
- 易しい推論と難しい推論を区別できること

を考察する。前者の特徴に対しては、改善のための工夫を考察し、後者の特徴（よさ）に対しては、それをより高める工夫を考察する。

前者の特徴は次の例に現れる。

例 4.1 証明の構想のあるステップで、シークエント $P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q$ が対象になったとする。このとき、2つの推論

(1) P と $P \rightarrow Q$ から Q が導かれる

(2) P と $\neg P \vee Q$ から Q が導かれる

のどちらを用いても、その推論は、推論規則

$$\frac{}{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}$$

で表される。つまり、上の推論規則から、もともなった推論がどちらなのかを読み取ることができない。ただし、 Γ は述語の列、“ $P \rightarrow Q$ ” は「 P ならば Q 」，“ $P \vee Q$ ” は「 P または Q 」の記号表現である。

一方、フローチャートでは、もともなった推論がそのまま矢印に反映されるので、上の例のようなことは起こらない。

上の例 4.1 のような推論に対して、[3] は、シークエントに波線をつけて、もともなった推論を読み取れるようにした。結果として、例 4.1 の2つの推論は、次のように表現されている。

(1)

$$\frac{}{\overline{\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}}}$$

(2)

$$\frac{}{\overline{\overline{P, P \rightarrow Q, \neg P \vee Q, \Gamma \Rightarrow Q}}}$$

詳細は、[3] に譲るが、もとの推論は、波線のついた述語をたどることで読み取れることがわかる。

後者のよさは、前節で述べた第1のよさ「フローチャートでは表現できない推論を、シーケントの変化で表現できること」が前提になっている。ここでは、フローチャートで表現できない推論を「難しい推論」、表現できる推論を「易しい推論」とよんでいる。[3]は、難しい推論を

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_n}{S}$$

と表現し、これも推論規則に加えることで、シーケントの変化の図式から、難しい推論が容易にわかるようにした。難しい推論は、証明を日本語で表現するときに注意が必要であり、それが強調されていることは、証明の構成に役立つと考える。

難しい推論の1つである背理法の日本語表現が困難であることを、具体的に述べる。背理法による証明の筋道

$$(x \neq 1 \Rightarrow \text{「条件に反する」}) \Rightarrow x = 1$$

を考える。この筋道は、

$x \neq 1$ とすると、与えられた条件に反する。故に、 $x = 1$ である。

と表現すべきで、

$x \neq 1$ とすると、与えられた条件に反するので $x = 1$ である。

と表現すべきではない。後者の表現は

$$x \neq 1 \Rightarrow (\text{「条件に反する」}) \Rightarrow x = 1$$

とも解釈できてしまうからである。

また、上の証明の筋道が、

$$\frac{x \neq 1 \Rightarrow \text{「条件に反する」}}{x = 1}$$

と、難しい推論に対応する推論規則で表現されていると、その推論の日本語表現には注意が必要だと意識することができる。

なお、シーケントの変化を表す図式に、この節の2つの工夫を加えた図式を、[3]では、LKP 構想図とよんでいる。

5 シークエントと振り返り

この節では、振り返りにおけるシーケントのよさを考察する。

フローチャートのよさは、前節の LKP 構想図 (2つの工夫を加えたシーケントの変化の図式) でも、概ねいえる。LKP 構想図はそうのように作られているからである。シーケント独自のよさに焦点を絞ると、3節で述べたよさが、ここでも活きる。すなわち、前節の LKP 構想図が、証明の構想の過程と難しい推論の場所を示していることから、それを利用した振り返りを行える。たとえば、次のような振り返りの活動が容易になる。

- 証明の構想の過程で目標がどのように変わったのかを振り返ることから，証明における発想を一般化することを活動
- 難しい推論の位置を変えることで，より日本語表現をしやすい筋道を考察する活動

参考文献

- [1] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen. I-II, *Mathematische Zeitschrift*. 39, 1934-5, (2):pp. 176-210, (3):pp. 405-431.
- [3] 佐々木克巳. 証明の構想を表現する新しい図式の提案, 数学教育学会誌, 2015 年度数学教育学会春季年会発表論文集, 数学教育学会, 2015, pp. 208-210.
- [3] 佐々木克巳. シークエントによる証明の構想の図式化南山大学 教職センター紀要/The Nanzan Journal of Teacher Education,(2),pp. 46-60, 2017
- [4] 辻山洋介. 学校数学における証明の構想の意義に関する研究, 日本数学教育学会誌. 数学教育学論究 95, 2011, pp. 29-44.