

非拡大写像に対するエラー項を持つ Ishikawa イタレーション の強収束定理

拓殖大学・工学部 木内 博文 (Hirobumi Kiuchi)

Faculty of Engineering,
Takushoku University

1 導入

C を Banach 空間の閉凸集合とする. 写像 $T : C \rightarrow C$ が非拡大であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C)$$

が成り立つときをいう. 非拡大写像 $T : C \rightarrow C$ に対して, エラー項付きのイタレーション

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + \gamma'_n v_n \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0, 1]$ における数列で

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n &= \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n &< \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C の有界点列である. このイタレーション (1) は, 1998 年に Y. Xu によって導入された. $\gamma_n = \gamma'_n = 0$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) の時は, (1) は Ishikawa 型であり, $\beta'_n = \gamma'_n = 0$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) の時は, (1) はエラー項付きの Mann 型である.

非拡大写像 $S : C \rightarrow C$, $T : C \rightarrow C$ に対して, エラー項付きのイタレーション

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + \gamma'_n v_n \end{cases} \quad (3)$$

を考える. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0, 1]$ における数列で (2) を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における有界点列である. このイタレーション (3) は G. E. Kim, H. Kiuchi と W. Takahashi によって 2002 年に導入された.

一方, 1998 年に W. Takahashi と T. Tamura によってエラー項を持たない Ishikawa イタレーション ((3) で $\gamma_n = \gamma'_n = 0$ ($\forall n \in \mathbf{N}$)) の弱収束と強収束に関する定理が証明された. 本論文では, これらのうち強収束に関する定理をエラー項付きの場合へと拡張した結果を紹介する.

2 関連するトピック

1995年に, L. S. Liuは

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T y_n + u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n + v_n \end{cases}$$

で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ の強収束を研究した. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}$ は $[0, 1]$ における数列で

$$\alpha_n + \beta_n = \alpha'_n + \beta'_n = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における点列で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$$

を満たす. この時, エラー項 $\{u_n\}, \{v_n\}$ は o に収束するので, この定義はエラー項のランダム性に反する (Y. Xu).

1998年に Y. Xu は, X を一様に滑らかな Banach 空間, $S : X \rightarrow X$ を強増大作用素, $f \in X$ とし, 写像 $T : X \rightarrow X$ が $Tx = x - Sx + f$ で定義されている時, (1) の強収束を研究した. また, 1998年に Y. Xu は, C を一様に滑らかな Banach 空間の有界閉凸集合とし, $T : C \rightarrow C$ を強擬縮小写像とする時に, (1) の強収束を研究した.

2002年に L. Qihou は, C を一様凸 Banach 空間のコンパクト凸集合とし, $T : C \rightarrow C$ が L - α 一様 Lipschitz で漸近的準非拡大写像である時に,

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^n y_n + \gamma_n u_n \\ y_n = \alpha'_n x_n + \beta'_n T^n x_n + \gamma'_n v_n \end{cases} \quad (4)$$

で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ の強収束を研究した. ただし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0, 1]$ における数列で (2) を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における有界点列である.

近年, G. E. Kim, H. Kiuchi と W. Takahashi は, S, T が中間的意味で漸近的非拡大写像である時に, イタレーション (1) と (3) の強収束と弱収束を研究した. また, G. E. Kim と H. Kiuchi はイタレーション (4) の強収束を研究し, L. Qihou の結果を改良した.

3 強収束定理

X を Banach 空間とする. X が狭義凸であるとは, $x, y \in X$ が $\|x\| = \|y\| = 1$ と $x \neq y$ を満たすならば

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

が成り立つ時をいう. X が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in X$ が $\|x\|, \|y\| \leq 1$ と $\|x - y\| \geq \varepsilon$ を満たすならば

$$\|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$$

が成り立つ時をいう. 次が成り立つことが知られている.

- 一様凸 Banach 空間は狭義凸 Banach 空間である.
- Hilbert 空間は一様凸 Banach 空間である.
- l^p は一様凸 Banach 空間である ($1 < p < \infty$).

以降, 常に (1) と (3) で定義されるイタレーションの $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\alpha'_n\}, \{\beta'_n\}, \{\gamma'_n\}$ は $[0, 1]$ における数列で (2) を満たし, $\{u_n\}, \{v_n\}$ は C における有界点列であるとする.

補題 3.1 ([4]). C を Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. $\{x_n\}$ を (3) で定義されるイタレーションとする. この時, 任意の $z \in F(S) \cap F(T)$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ が存在する.

補題 3.2 ([4]). C を一様凸 Banach 空間の閉凸集合とし, T は C から C への非拡大写像で不動点を持つとする. (1) で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ は

- (i) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\alpha_n, \beta_n \in [a, b]$, $\beta'_n \in [0, b]$, または
- (ii) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\alpha'_n, \beta'_n \in [a, b]$, $\beta_n \in [a, 1]$

を満たすとする. この時, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - Tx_n) = o$.

Banach 空間 X の凸性のモジュラスとは, 次で定義される関数 $\delta: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ のことである.

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x + y\|}{2} \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

次が成り立つことが知られている.

- δ は広義増加関数である.
- X が一様凸であるための必要十分条件は, $\delta(\varepsilon) > 0$ ($\forall \varepsilon \in (0, 2]$) である.

定理 3.3 (Mazur). K を Banach 空間のコンパクト集合とすると, $\overline{\text{co}} K$ もコンパクトである.

補題 3.1, 補題 3.2, 定理 3.3 を用いて次の定理を得る.

定理 3.4 ([4]). C を一様凸 Banach 空間の閉凸集合とし, T は C から C への非拡大写像で不動点を持つとする. (1) で定義されるイタレーション $\{x_n\}$ は

- (i) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\alpha_n, \beta_n \in [a, b]$, $\beta'_n \in [0, b]$, または

(ii) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\alpha'_n, \beta'_n \in [a, b]$, $\beta_n \in [a, 1]$

を満たすとする. この時, $T(C) \cup \{u_n\}$ が C のコンパクト集合に含まれるならば $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する.

一方, 1998 年に W. Takahashi と T. Tamura によってエラー項を持たない Ishikawa イタレーションに関する定理が証明された.

定理 3.5 ([9]). C を狭義凸 Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $S(C) \cup T(C)$ が C のコンパクト集合に含まれていて $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S[\alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n]$$

で定義されているとする. ただし, $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \in [0, 1]$, $\alpha_n + \beta_n = 1$, $\alpha'_n + \beta'_n = 1$ である.

(i) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n \in [a, b]$, $\beta'_n \in [0, b]$ であるとする, $x_{n_i} \rightarrow y$ ならば $y \in F(S)$ である.

(ii) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n \in [a, 1]$, $\beta'_n \in [a, b]$ であるとする, $x_{n_i} \rightarrow y$ ならば $y \in F(T)$ である.

(iii) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n, \beta'_n \in [a, b]$ であるとする, $x_{n_i} \rightarrow y$ ならば $y \in F(S) \cap F(T)$ である.

彼らは, この定理を用いて次にあげる定理などいくつかの定理を証明した.

定理 3.6 ([9]). C を狭義凸 Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $S(C) \cup T(C)$ が C のコンパクト集合に含まれていて $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S[\alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n]$$

で定義されているとする. ただし, $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \in [0, 1]$, $\alpha_n + \beta_n = 1$, $\alpha'_n + \beta'_n = 1$ である. この時, ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n, \beta'_n \in [a, b]$ ならば, $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点に強収束する.

定理 3.7 ([9]). C を一様凸 Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. P を C から $F(S) \cap F(T)$ 上への距離射影とする. イタレーション $\{x_n\}$ が

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n S[\alpha'_n x_n + \beta'_n T x_n]$$

で定義されているとする. ただし, $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n \in [0, 1]$, $\alpha_n + \beta_n = 1$, $\alpha'_n + \beta'_n = 1$ である. この時, $\{P x_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の元に強収束する.

これらの定理をエラー項つきの場合へと拡張する.

補題 3.8 ([5]). C を $Banach$ 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は (3) で定義されていて, イタレーション $\{p_n\}$ は

$$p_1 = x_1, \quad p_{n+1} = \alpha_n p_n + \beta_n S y_n + \gamma_n x_1 \quad (n \in \mathbf{N})$$

で定義されているとする. この時, ある $a \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq 1$) に対して $\beta_n \in [a, 1]$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p_n\| = 0$.

補題 3.1 を用いて, 次を証明できる.

定理 3.9 ([5]). C を狭義凸 $Banach$ 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は (3) で定義されているとする.

- (i) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n \in [a, b]$, $\beta'_n \in [0, b]$ であるとする, $x_{n_i} \rightarrow z$ ならば $z \in F(S)$ である.
- (ii) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n \in [a, 1]$, $\beta'_n \in [a, b]$ であるとする, $x_{n_i} \rightarrow z$ ならば $z \in F(T)$ である.
- (iii) ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n, \beta'_n \in [a, b]$ であるとする, $x_{n_i} \rightarrow z$ ならば $z \in F(S) \cap F(T)$ である.

証明の概要. (i) を示す. ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n \in [a, b]$, $\beta'_n \in [0, b]$ であるとし, $x_{n_i} \rightarrow z$ とする. $Sz \neq z$ を仮定する.

$w \in F(S) \cap F(T)$ をとり, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - w\|$ とおく. この極限は補題 3.1 により存在する. $x_{n_i} \rightarrow z$ だから, $\|z - w\| = c$ である. また, $Sz \neq z$ だから $c > 0$ である.

すべての $\beta' \in [0, b]$ に対して $S[\beta' Tz + (1 - \beta')z] \neq z$ が成り立つ. なぜなら, $\beta' = 0$ に対して $S[\beta' Tz + (1 - \beta')z] = z$ ならば $Sz = z$ となり, 矛盾である. また, ある $\beta' \in (0, b]$ に対して $S[\beta' Tz + (1 - \beta')z] = z$ ならば, X の狭義凸性を用いて $Tz = z$ を得る. それで, $z = S[\beta' Tz + (1 - \beta')z] = Sz$ を得る. これも矛盾である. さらに, $\|S[\beta' Tz + (1 - \beta')z] - w\| \leq c$ も得る.

次に,

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in [0, 1] \times [a, b] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, b] \times [0, 1] \mid \\ \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha' + \beta' + \gamma' = 1\}$$

とおき, D 上の関数 g を

$$g(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = \|\alpha z + \beta S[\alpha' z + \beta' Tz + \gamma' z] + \gamma w - w\| \quad (\forall (\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in D)$$

で定義すると, $a \leq \beta \leq b$ と X の狭義凸性を用いて, すべての $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in D$ に対して $g(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') < c$ を得る. g が D 上で連続で D がコンパクトだから, $\varepsilon > 0$ が存在して, すべての $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in D$ に対して $g(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') < c - \varepsilon$ が成り立つ.

一方, $i_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, すべての自然数 $i \geq i_0$ に対して $\|x_{n_i} - z\| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\gamma'_{n_i} \|v_{n_i} - z\| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\gamma_{n_i} \|u_{n_i} - w\| < \frac{\varepsilon}{4}$ が成り立つ. よって, すべての自然数 $i \geq i_0$ に対して

$$\begin{aligned} \|x_{n_{i+1}} - w\| &\leq \|x_{n_{i+1}} - \beta_{n_i} S[\alpha'_{n_i} z + \beta'_{n_i} Tz + \gamma'_{n_i} z] - \alpha_{n_i} z - \gamma_{n_i} w\| \\ &\quad + \|\beta_{n_i} S[\alpha'_{n_i} z + \beta'_{n_i} Tz + \gamma'_{n_i} z] + \alpha_{n_i} z + \gamma_{n_i} w - w\| \\ &\leq \alpha_{n_i} \|x_{n_i} - z\| + \beta_{n_i} \|S[\alpha'_{n_i} x_{n_i} + \beta'_{n_i} T x_{n_i} + \gamma'_{n_i} v_{n_i}] \\ &\quad - S[\alpha'_{n_i} z + \beta'_{n_i} Tz + \gamma'_{n_i} z]\| + \gamma_{n_i} \|u_{n_i} - w\| + c - \varepsilon \\ &\leq \alpha_{n_i} \|x_{n_i} - z\| + \beta_{n_i} ((\alpha'_{n_i} + \beta'_{n_i}) \|x_{n_i} - z\| + \gamma'_{n_i} \|v_{n_i} - z\|) \\ &\quad + \gamma_{n_i} \|u_{n_i} - w\| + c - \varepsilon \\ &\leq \|x_{n_i} - z\| + \gamma'_{n_i} \|v_{n_i} - z\| + \gamma_{n_i} \|u_{n_i} - w\| + c - \varepsilon \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + c - \varepsilon = c - \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

を得る. これは矛盾である. 従って, $Sz = z$ を得, 結論を得る.

(ii) は (i) と同様であり, (iii) は (i) と (ii) より明らかである. □

補題 3.8 と, 定理 3.6 の証明と同様の議論によって次を得る.

定理 3.10 ([5]). C を狭義凸 Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で, $S(C)$ が C のコンパクト集合に含まれていて $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. イタレーション $\{x_n\}$ は (3) で定義されているとする. ある $a, b \in \mathbf{R}$ ($0 < a \leq b < 1$) に対して $\beta_n, \beta'_n \in [a, b]$ ならば, $\{x_n\}$ が S と T の共通不動点に強収束する.

証明. 補題 3.8 により, 一般性を失うことなく $u_n = x_1$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) として良い. イタレーション $\{x_n\}$ は C のコンパクト集合に含まれているので, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ と $z \in C$ が存在して $x_{n_i} \rightarrow z$ となる. よって, 定理 3.9 により, $z \in F(S) \cap F(T)$ を得る. 従って, 補題 3.1 により, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0$ を得る. □

定理 3.7 の証明と同様の議論によって, 次の定理 3.12 を証明することができる.

補題 3.11 ([10]). $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を非負数列とする. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ で, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n$$

ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する.

定理 3.12 ([5]). C を一様凸 Banach 空間の閉凸集合とし, S, T は C から C への非拡大写像で $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ であるとする. P は C から $F(S) \cap F(T)$ 上への距離射影とし, イタレーション $\{x_n\}$ は (3) で定義されているとする. この時, 点列 $\{Px_n\}$ は S と T の共通不動点に強収束する.

証明の概要. $M = \max \left\{ \sup_{n \in \mathbf{N}} \|Px_n - v_n\|, \sup_{n \in \mathbf{N}} \|Px_n - u_n\| \right\}$ とおく.

$$\|Px_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \|Px_n - x_{n+1}\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|Px_n - \alpha_n x_n - \beta_n Sy_n - \gamma_n u_n\| \\
&\leq \alpha_n \|Px_n - x_n\| + \beta_n \|Px_n - Sy_n\| + \gamma_n \|Px_n - u_n\| \\
&\leq \|Px_n - x_n\| + (\gamma'_n + \gamma_n)M
\end{aligned}$$

だから, 補題 3.11 により, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Px_n - x_n\|$ が存在する. そこで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Px_n - x_n\| = r$ とおく. また, 数学的帰納法により, 任意の $n, k \in \mathbf{N}$ に対して

$$\|Px_n - x_{n+k}\| \leq \|Px_n - x_n\| + \sum_{l=0}^{k-1} (\gamma_{n+l} + \gamma'_{n+l})M \quad (5)$$

が成り立つ.

点列 $\{Px_n\}$ が Cauchy 列であることを示せば結論を得る. まず, $r = 0$ を仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して $\|Px_n - x_n\| < \varepsilon$ と $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\gamma_n + \gamma'_n)M < \varepsilon$ が成り立つ. $m > n \geq n_0$ ならば, (5) より

$$\begin{aligned}
\|Px_n - Px_m\| &\leq \|Px_n - x_n\| + \|x_n - Px_{n_0}\| + \|Px_{n_0} - x_m\| + \|x_m - Px_m\| \\
&\leq \|Px_n - x_n\| + \|Px_{n_0} - x_{n_0}\| + \sum_{l=0}^{n-n_0-1} (\gamma_{n_0+l} + \gamma'_{n_0+l})M \\
&\quad + \|Px_{n_0} - x_{n_0}\| + \sum_{l=0}^{m-n_0-1} (\gamma_{n_0+l} + \gamma'_{n_0+l})M + \|x_m - Px_m\| \\
&< 6\varepsilon
\end{aligned}$$

である. よって, 点列 $\{Px_n\}$ は Cauchy 列である. 次に, $r > 0$ を仮定し, 点列 $\{Px_n\}$ が Cauchy 列でなかったとする. この時, $\varepsilon > 0$ と点列 $\{Px_n\}$ の部分列 $\{Px_{n_i}\}, \{Px_{m_i}\}$ が存在して, すべての $i \in \mathbf{N}$ に対して $\|Px_{n_i} - Px_{m_i}\| \geq \varepsilon$ が成り立つ. また, $d > 0$ が存在して

$$(r + d) \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right) < r$$

となり, $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して $\|Px_n - x_n\| < r + \frac{d}{4}$ と

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\gamma_n + \gamma'_n)M < \frac{d}{4} \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right)$$

が成り立つ. さらに, $n_i, m_i \geq n_0$ が存在して $\|Px_{n_i} - Px_{m_i}\| \geq \varepsilon$ が成り立つ. よって, $l \geq n_i, m_i$ ならば

$$\begin{aligned}
\|Px_{n_i} - x_l\| &\leq \|Px_{n_i} - x_{n_i}\| + \sum_{j=0}^{l-n_i-1} (\gamma_{n_i+j} + \gamma'_{n_i+j})M < r + \frac{d}{2}, \\
\|Px_{m_i} - x_l\| &\leq \|Px_{m_i} - x_{m_i}\| + \sum_{j=0}^{l-m_i-1} (\gamma_{m_i+j} + \gamma'_{m_i+j})M < r + \frac{d}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方, X が一様凸だから

$$\|Px_{l+1} - x_{l+1}\| \leq \|Px_l - x_l\| + (\gamma_l + \gamma'_l)M$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \frac{Px_{n_i} + Px_{m_i}}{2} - x_l \right\| + (\gamma_l + \gamma'_l)M \\
&< \left(r + \frac{d}{2} \right) \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d/2} \right) \right) + \frac{d}{4} \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right) \\
&\leq (r + d) \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right) - \frac{d}{4} \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right) \\
&< r - \frac{d}{4} \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. $l \rightarrow \infty$ として, $r \leq r - \frac{d}{4} \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{r + d} \right) \right)$ を得る. これは矛盾である. よって, 点列 $\{Px_n\}$ は Cauchy 列である. $\square$

参考文献

- [1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, 1958.
- [2] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), 147–150.
- [3] G. E. Kim and H. Kiuchi, *Strong convergences of Ishikawa iterations for asymptotically quasi-nonexpansive mappings in the intermediate sense*, to appear in Proceedings of Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis.
- [4] G. E. Kim, H. Kiuchi, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive mappings*, Sci. Math. Japonicae **56** (2002), 133–141.
- [5] H. Kiuchi, *Convergence theorems of Ishikawa iterations with errors for nonexpansive mappings*, 投稿中.
- [6] L. S. Liu, *Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), 114–125.
- [7] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.
- [8] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis — Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publ., 2000.
- [9] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex. Analysis **5** (1998), 45–56.
- [10] K. K. Tan and H. K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. **178** (1993), 301–308.
- [11] Y. Xu, *Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive operator equations*, J. Math. Anal. Appl. **224** (1998), 91–101.