

変形理論をめぐる問題

京大 数理解 佐藤 幹夫

線型微分方程式の変形理論はリーマンの問題提起に始まり、今世紀初め頃に Fuchs 父子, Painlevé, Schlesinger, Garnier らによる重要な展開がなされた。即ちモノドロミー保存的な変形と, “パンルヴェ型” の非線型方程式および超越函数の概念が典型的な場合に確立され, 積内函数とアーベル函数の理論を超える途が暗示されたのであった。不幸にもこれらの重要な仕事は その誕生後急速に忘れられてしまい, Malmquist, Hukuhara, Okamoto など少数の人々によりひきつられた以外、最近に至るまで 殆ど顧みられなかった。数理解析学から起った Latta-Myers (1956-1965), Barouch-McCoy-Wu (1973-1976) による新しい展開については後述する。

ここに現れる非線型方程式は, 線型微分方程式系の積分可能条件を記述するものであり, 微分幾何学においては古くから扱われていた種類のものである。Gauss-Weingarten

方程式と Gauss-Codazzi 方程式の関係がそんであり、定曲率空間の場合、今日いわゆる Sine-Gordon 方程式を与える。

また、理論物理学では、Onsager (1944) による有名な 2次元 Ising 強磁性模型はとも XY 模型, Dimer 模型等の自由エネルギーの厳密解や, Thirring, Schwinger 等の 2次元の場の量子論の模型の厳密解が求められたほか, Bethe によるいわゆる 'Bethe Ansatz' を用いて厳密解の求められるモデルとして、量子化された 1次元非線型 Schrödinger 方程式, Pauling の Ice モデルなど多数が E. Lieb により 50 ~ 60 年代に知られており、後に研究された Baxter 模型や量子化された Sine Gordon 方程式もこのカテゴリーに属する。これらのモデルについての 3行列の厳密解はのちに Zamolodchikov (1976) により求められた。これら、1次元非線型 Schrödinger 方程式や Sine-Gordon 方程式は、いずれものちにソリトン理論あるいは '完全可積分系' の代表的な例となったが、歴史的には 'ソリトン性' や '完全可積分性' はこれらとは別の方程式, Korteweg de Vries 方程式についてまず確立された。

Zabuski-Kruskal (1963) により Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の解の 'ソリトン性' が発見された。ついで Gardner-Greene-Kruskal-Miura (1967), Lax (1968) によりこの KdV 方程式が 2階線型常微分作用素の 'スペクトル保存的' な変形を記述

するものであることが示されたのをきっかけに、僅々十年余の間にこのソリトン理論（或いは完全可積分系の理論）は爆発的な進展を遂げ、その豊かな内容が解明されて、先駆者らの仕事との関連も明らかにされて来た。（スペクトル保存性と、逆散乱理論 Gelfand-Levitan-Marchenko (1950-1955), 多重ソリトン解と無反射ポテンシャル Kay-Moses (1956), 多重準周期解と可換微分作用素環 Burchall-Chaudy (1922) および ヤコビ多様体 Baker⁽¹⁹⁸⁾-Akhiezer (1961), 戸田格子 Toda (1967), Henon-Flaschka (1974) ...)

この様にして我々は 線型微分方程式系の変形理論として少く性質の異なった ‘モノドロミー保存的’ と ‘スペクトル保存的’ という二つの重要な理論体系を持つが、当然のこととして、両者は相互に密接に関連している。しかもその関連は 次のように二重の意味においてである。

第一の関連は直接的なものである。即ち、スペクトル保存的変形理論によって与えられる KdV 等の非線型方程式の重要な特殊解、即ち多重ソリトン解は、多重準周期解、あるいは有理解、相似解などを通じて、モノドロミー保存的変形を記述する ‘Schlesinger-Garnier 型’ の非線型方程式によって特性づけられる、即ち広い意味での ‘Painlevé 型’

の函数であることである。Flaschka-Newell によれば、このうちで 相似解を一般化した多重相似解があるのみで最も一般的な特殊解であり、'Painlevé 型'の非線形方程式が逆にスペクトル保存的変形理論の立場から多重相似解として捉えなおされ、また前述の Burchall-Chaundy, Baker-Akhiezer から、最近の Krichever, Novikov, Manin, Mumford, Tanaka-Date に至る重要な仕事(多重準周期解と Jacobi 多様体の関連)が非アーベル的な場合に拡張されるものと期待されている。なお、相似解と Painlevé 方程式の関連については、Ablowitz-Segur が先行する。この様な、スペクトル保存変形の方程式と Painlevé 型方程式の関連は最近多くの研究者の関心とよびつつあるテーマである。

その関連は、完全可積分系の量子化、とくにその critical limit に関係しており、統計力学における相関函数又は場の量子論における T 函数(あるいはグリーン函数、あるいは Wightman 函数)の厳密解の計算から生じたものであり、その本質の全貌は未だ謎に包まれている。即ち、Barouch-McCoy-Wu (1973) は、2次元 Ising 模型に関連して、2点相関函数の厳密な計算を遂行することに成功し、いわゆるスケール極限において、それが与える種 Painlevé 函数により 用いた形に表わされることを示し得た。Onsager 以後

実は30年ぶりの決定的な結果であった(詳細は, Wu-McCoy-Tracy-Barouch (1976)). そこでは, さきにふれた Latta (1956) - Myers (1965) による次の結果を用いている:

- (1) 変形 Bessel 函数 $K_0(x-y)$ を ^{積分}核 とする ^{有限区間での} 一種 Fredholm 積分方程式は, 確定特異点 ∞ と, 無限遠に1級不確定特異点とをもつ2連立1階の線型常微分方程式系に変換される。
- (2) その線型常微分方程式 ^{の係数は}は, ^{はめに考慮}積分区間の長さ L に依存し, これを変形パラメータとしてやる種 Painlevé 方程式の解になっている。—— というものである。従って, Latta-Myers, Wu et al の仕事の背景には, 彼等自身は自覚していなかったにせよ, 実はモノドロミ-保存変形理論がある。(Latta のみちびいた連立1階方程式は役に見るように実は Painlevé V 型に対応するものの特別な場合であり, それは III 型に容易に変換される)。一方, 2次元 Ising 模型の, このように豊かな性質 (Kadanoff-Kohmoto 参照) の源泉は, Onsager によって発見され, Kaufman, Kadanoff, Lieb-Schulz-Mathisらによって発展させられていた自由フェルミ場と二種のスピン場(秩序量と反秩序量)の間の著しい交換関係にある。(Wu et al では, このような Onsager らの場の理論的 approach (transfer 行列の方法, Kramers-Wannier, 文保五らによる) の代りに, Monthollらにはじまる直接的 approach を採ったため, この真が幾分不明瞭

である)。なお、このような交換関係は、^{場の量子論において} Hooftらによれば、
真空の相転移に関係しており、このことから quark の閉じ込めにも関係すると考えられている。

Sato-Miwa-Jimbo (1977~) は、Onsager の観点と、Wu et al の成果を結びつけて、一般的な理論を作り、その応用として、2次元 Ising model の場合の ^{一般に} 多体の相関関数もまたモノドロミー保存変形理論によって完全に解かれることを導き、そのほか 例えは Federfish model の多体で函数、1次元不透過ボーズ・ガスの n 粒子密度行列 (Jimbo-Miwa-Môri-Sato) なども、同様のわくぐみによって厳密に解かれることを示した。最後のものは、量子化された1次元非線型 Schrödinger 方程式において、Coupling constant $\rightarrow \infty$ の critical case の多体 Green 函数 (Green 函数) とも言いかえられ、我々の結果はこれがやはり Painlevé 型函数に帰着することを示している。(この仕事については、^{数々は} Schultz, Lenard, Vaidya-Tracy らの先行する仕事によって裨益されたところが大きい。Schultz-Lenard では問題がすでに ~~Atiyah~~ Latta 型の積分核をもつ積分方程式に reduce されていた。) 一方、2次元 Ising 模型に関する Wu et al 及び我々の結果も、同様ないみで、量子化された Sine-Gordon 方程式において、Coupling constant β が critical value (この場合は $\sqrt{4\pi}$) の

場合に相当するものも多くの人によって信じられている。

これらの例——非線型 Schrödinger 方程式と不透過ボーズガス, Sine-Gordon 方程式と Ising 模型のスケール不変性——から見れば、スเปクトル保存変形理論で扱われる完全積分可能系のうち少なくともある種のものは、量子化した模型の τ 関数の適当な臨界点における性質がモノドロミー保存変形理論によって記述されること（即ち 'Painlevé 型' であること）が期待される。これが上で '第2の関連' と呼んだものであるが、しかしながら、その全面的な解明は将来に残された問題である。逆に、Monodromy 保存的変形を先に与えて、これを量子化された場の operators で表示する問題は、最近三輪によって（任意の確定及び不確定特異点をもつ極めて一般の場合まで）完全に解かれた。これは重要な進歩であって、今後上記の問題を解決する上に手掛りを与えることが期待される。一方、完全可積分系の量子化の問題は、現在 Faddeev はじめ、数ヶ所で熱心に研究されており、いままでに Zamolodchikov の R 行列に関する結果を、量子化した逆散乱法に与えついで再現できること、などが示されているが、 τ -関数の計算をするところまでは未だ至っていない。

この '第2の流れ' の中に登場する相関函数あるいは τ 函数は、素粒子論に限らず、固体物理、統計力学、乱流の統

計的理論などまで含む広い意味の‘場の量子論’における基本的な量であり、それは一方では‘場の operators’の積の‘真空期待値’として定義され、他方では確率場の立場から確率変数の積の期待値とも解釈される。この二通りの解釈は、場の量子論では Heisenberg-Pauli の正準形式と、Feynman 経路積分による解釈とであり、統計力学では transfer 行列による定式化と、Gibbs 流の本来的定式化とがそれぞれある。(‘ T 函数’の名は、Lehmann-Symanzik-Zimmermann による場の量子論の定式化 (1950 頃?) に由来し、 T は ‘time ordering’ を意味する。我々の現~~在~~の context では余り適切とは言えないが、便宜上そのまま借用する。)

さて、この‘オ2の団圓’の中に現れた着しい事実の一つに次の事実がある。それは、そこに登場する主役であるところの、相関函数内至は T 函数は、それ自身が Painlevé 函数 (またはその一般化, ‘Painlevé 型’の函数) になるのではなく、その対数微分 $\frac{d \log T}{dT}$, あるいは T 函数たちの間の比 (2次元 Ising 模型の場合をはじめ、一般に T 函数は幾通りにも導入される。その~~中~~は自由度 $\frac{1}{2}$ の自由度) における ‘Schlesinger 変換’ (この自由度に対応し、Soliton 理論における Bäcklund 変換の自由度 ^{恰度} に対応する) が Painlevé (型) 函数になる、という事実である。このことは、~~必要時~~ T 函数が pole divisor

として、ちょうど積円函数・アーベル函数に対してテータ函数が果たすのと同様の役割を Painlevé 型の函数に対して果たしていることを示す。

最近、神保-三輪-上野により、任意個数の確定および不確定特異点をもった最も一般的な場合についてのモノドロミー保存変形の理論が構成され、さらに τ 函数の一般定義も与えられた。本来は Painlevé 函数の場合にそうであった (Painlevé, Okamoto) ように、このような一般の場合にも、変形方程式の解の動く特異点は極のみであり、 τ 函数は極もよめて動く特異点を持たないであろうと予想される。

これらすべてが正しいとしても、より重大な問題は、この τ 函数が ψ 函数のような豊かな性質を内蔵しているだろうか？ という事であろう。

はづれにせよ、変形理論において τ 函数という新しい概念が極めて重要な位置にあることは疑いない。

最後に、広田氏の従属変数と τ 函数との一致について述べたい。周知の通り、スペクトル保存変形を記述する KdV 等の方程式の多重ソリトン解は、指数函数の有理式で与えられ、従って整函数ではなく有理型函数である。広田氏の方法は、従属変数の適切な変換によりこれを整函数にみちびく。同じ変換を多重 ~~離~~ 周期解に行えば、アーベル函数がテータ函数に

変換され、やはり整函数となる。我々の立場から見れば、それは実際に函数に他ならないことがわかる。御参、広田氏の方法は、 τ 函数を新たな従属変数にえらぶものであると一般的に言うことが出来る。上記神保-三輪-上野によって τ 函数の一般的な定義が与えられ、それは或るいみでスペクトル保存変形の方程式にもそのまゝ適用できることが示されている。我々としては、広田氏の方法の意味が漸く今になって少しく理解できたような気がしている。広田氏の先見の明に敬意を表したい。

なお、講演の際、毛織泰子氏による KdV , $MKdV$ 等の広田の bilinear equation についての計算結果に言及し、そのデータにもとづいて、予想を述べたが、研究集会終了後、同氏との共同の研究でこの予想は肯定的に解決したので、別稿で報告させていただいた。