

表現のテンソル積と Plancherel formula について

三重大 教育 土川真夫

0. 序

k を locally compact, non-discrete, totally disconnected topological field とする。 $SL_2(k)$ のある series の二つの unitary 表現 $\mathcal{R}\pi_1, \mathcal{R}\pi_2$ による tensor 積 $\mathcal{R}\pi_1 \otimes \mathcal{R}\pi_2$ の既約分解の公式を与えることを考へる。他の色々な群の表現に關する類似の問題は、主として Mackey, Neumark, Pukanszky, Williams, Martin, Repka 等により考へられている。特に Martin [1] は $SL_2(k)$ の表現の tensor 積 $\mathcal{R}\pi_1 \otimes \mathcal{R}$ で、 $\mathcal{R}\pi_1$ は principal, $\mathcal{R}$ は任意の既約 unitary 表現という場合を考へ、分解に表れたる表現とその重複度に関する公式を与えている。それは Mackey -ANH の Reciprocity Theorem を使うが、例之は " $\mathcal{R}\pi_1, \mathcal{R}\pi_2$ とともに主系列表現をとす、

$$\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2} \simeq 4 \int_{\pi(-1)=\pi_1\pi_2(-1)} \mathcal{R}_{\pi} d\mu(\pi) \oplus 4C(\pi_1\pi_2)\mathcal{R}_{-1} \oplus$$

$$2 \sum_{\tau=\varepsilon, p \in p} \sum_{\pm} \sum_{\substack{\pi_{\tau} \in \hat{C}_{\tau}, \text{ord. } \pi_{\tau} \neq 2 \\ \pi_{\tau} \text{ agn}_{\tau}(-1) = \pi_1\pi_2(-1)}} \mathcal{R}_{\pi_{\tau}}^{\pm} \oplus d(\pi_1\pi_2) \{ \mathcal{R}_0^{+,1} \oplus \mathcal{R}_0^{+,2} \oplus \mathcal{R}_0^{-,1} \oplus \mathcal{R}_0^{-,2} \}$$

で与えられている。ただし

$$C(\pi_1\pi_2) = \begin{cases} 1 & \pi_1\pi_2(-1)=1 \\ 0 & \pi_1\pi_2(-1)=-1 \end{cases}, \quad d(\pi_1\pi_2) = \begin{cases} 1 & \pi_1\pi_2(-1)=\pi_{\tau}^0 \text{ agn}_{\tau}(-1) \\ 0 & \pi_1\pi_2(-1) \neq \pi_{\tau}^0 \text{ agn}_{\tau}(-1) \end{cases}$$

π_{ε}^0 は C_{ε}^0 の order 2 の指標, $\pi_{\varepsilon}^0 \text{ agn}_{\varepsilon}(-1)$ は $-1 \in (k^{\times})^2$ のとき -1 , $-1 \notin (k^{\times})^2$ のとき $+1$, $\mathcal{R}_{\pi}$ は principal の, $\mathcal{R}_{-1}$ は special, $\mathcal{R}_{\pi_{\tau}}^{\pm}$ は discrete series の表現で, $\mathcal{R}_0^{+,1} \oplus \mathcal{R}_0^{+,2}$, $\mathcal{R}_0^{-,1} \oplus \mathcal{R}_0^{-,2}$ は split discrete series の表現である。 $\{d\mu, \Sigma\}$ は $SL_2(k)$ の Plancherel measure と同値な measure である。

そこで我々は Plancherel 公式そのものを使って, $\mathcal{R}_{\pi_1}, \mathcal{R}_{\pi_2}$ が principal または supplementary series の表現の場合の $\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2}$ の分解公式をより explicit に与えることを試みるものである。

1. k についてよく知られていること

k を上記の位相体, $k^{\times}$ をその乗法群, O を整数環, P をその極大イデアル, $p \in P = pO$ とする元とする。 k 上の付値を v とすると, $|p| = q^{-1} = |O/P|^{-1}$ である。 ε を $k^{\times}$ の 1

の原始 $q-1$ 乗根とする。このとき k の 2 次拡大 $k(\sqrt{\epsilon})$ は $\tau = \epsilon, p, \epsilon p$ で表される。 $z = x + \sqrt{\epsilon} y \in k(\sqrt{\epsilon})$ に対して, $\bar{z} = x - \sqrt{\epsilon} y$, $S(z) = z + \bar{z}$, $N(z) = z\bar{z}$ とする。 $N(k(\sqrt{\epsilon})^\times) = k_\tau^\times$ とおくと, $k_\tau^\times$ は $k^\times$ の subgroup である。

$k^\times \supset k_\tau^\times \supset (k^\times)^2$, $[k^\times : k_\tau^\times] = [k_\tau^\times : (k^\times)^2] = 2$ である。また $k^\times / (k^\times)^2$ の代表系は $\{1, \epsilon, p, \epsilon p\}$ である。また $k^\times$ の符号 sgn_τ は次の様に定義される。

$$\text{sgn}_\tau x = \begin{cases} 1 & x \in k_\tau^\times \\ -1 & x \in k^\times - k_\tau^\times \end{cases}$$

$\chi \in k$ の (加法) 指標で $\chi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in O$ となるものとする。また $\pi \in k^\times$ の (乗法) 指標とする。 $k^\times \simeq \mathbb{Z} \times O^\times$ ($O^\times = O - P$) 故に

$$\pi(x) = |x|^\alpha \pi^\times(x)$$

と表わすことが出来る。ただし, $\pi^\times$ は $O^\times$ の指標で $\pi^\times(p) = 1$ によって $k^\times$ に拡張した指標である。 $\pi^\times \equiv 1$ のとき, π は unramified, $\pi^\times(x) = 1 \Leftrightarrow x \in 1 + P^h$ (h : 正整数) のとき, π は ramified of degree h という。 π が unitary である必要十分条件は $\text{Re}(\alpha) = 0$ である。 $\alpha = i\lambda$, $\frac{-\pi}{\log q} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{\log q}$ としてよい。 $k^\times$ のユニタリ指標全体を $\hat{k}^\times$ とする。

f は k 上の complex-valued, compactly supported, locally constant function 全体とし, $f^\times \in k^\times$ 上全標な

な関数全体とする。 $\hat{f} \in \mathcal{S}$ の Fourier 変換による像とすれば $\hat{\hat{f}} = f$, $\hat{f} \times \in \mathcal{S} \times$ の Fourier 変換 (乗法の Fourier 変換 = Mellin 変換) とする。

右の Gamma 関数は次のように定義される:

$$\Gamma(\pi) = p - \int_{\mathbb{R}^\times} \pi(x) X(x) d^\times x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{q^{-n} \leq |x| \leq q^n} \pi(x) X(x) d^\times x$$

π が unramified α とす, つまり $\pi(x) = |x|^\alpha$ のとき, 積分は $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ のときで実際に収束し, その値は

$$\Gamma(1+\alpha) = \frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q^\alpha}$$

であり, α につき holomorphic, $\operatorname{Re}(\alpha) \leq 0$ へは meromorphic に接続される。実際に $\alpha=0$ は singular point, $\alpha=1$ は zero point である。 π が unramified α とすつたに積分は収束し, 簡単な値をとり, 全域で holomorphic である。

2. $G = \mathrm{SL}_2(k)$ の表現

G の部分群を定義する。

$$D = \{d(a) = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in k^\times\}$$

$$N = \{n(y) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in k\}, L = \{l(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in k\}$$

このとき, $\forall g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\delta \neq 0$ に対して unique な分解がある

3.
$$g = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = d[g] n[g] l[g]$$

$k^\times$ の指標 π に対して, $\pi(dn) = \pi(a)$ により $B = DN$ の指標が定義され, 誘導表現 $\mathcal{R}\pi = \text{Ind}_B^G \pi$ が与えられる。具体的に
 12 は

$$\mathcal{S}_\pi = \text{L.S.} \{ \varphi(x), \pi \rho^{-\frac{1}{2}}(x) \varphi(x) \mid \varphi, \psi \in \mathcal{S} \}$$

($\rho(x) = |x|^2$) とすると, $\varphi \in \mathcal{S}_\pi$ に対して

$$T_g^\pi \varphi(x) = \pi \rho^{-\frac{1}{2}}(\beta x + \delta) \varphi\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right)$$

又は単に

$$T_g^\pi \varphi(l) = \pi \rho^{-\frac{1}{2}}(a[lg]) \varphi(l[lg])$$

で定義される operator によって

$$\mathcal{R}\pi = \{ T_g^\pi, \mathcal{S}_\pi \}$$

である。

π が unitary のときは, $\mathcal{R}\pi$ は principal series の表現で
 $\pi = \text{Agn}_\tau$, $\tau = \varepsilon, p, \varepsilon p$ ではないときは既約, $\pi = \text{Agn}_\tau$ のとき,
 2つの既約表現に split する。

$\pi(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$ のとき, $\mathcal{R}\pi$ は supplementary series の表現である。これは内積

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{\Gamma(\pi^{-1})} \int \pi^{-1} \rho^{\frac{1}{2}}(x_1 - x_2) \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_2(x_2)} dx_1 dx_2$$

で与えられる既約 unitary 表現である。

supplementary series 表現 $\pi: \alpha \rightarrow -1$ としたとき special 表現が表われる。実際には

$$\mathcal{S}_{-1}^0 = \{ \varphi \in \mathcal{S}_\pi, \pi(x) = |x|^{-1}, \int \varphi(x) dx = 0 \}$$

に対して定義される表現 $\mathcal{R}_{-1} = \{ T^\pi, \mathcal{S}_{-1}^0 \}$ に関する

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int \ln |x_1 - x_2| \varphi(x_1) \overline{\varphi(x_2)} dx_1 dx_2$$

に関する unitary 表現である。

これらの表現のもう一つの表し方として本稿でも利用する χ -realization がある。それは今述べた表現の Fourier 変換として実現されるものである。それは次の形で見られる。

$\hat{\mathcal{S}}_\pi$ または $\hat{\mathcal{S}}_{-1}^0 \ni \varphi(u)$ に対して

$$\hat{T}_g^\pi \varphi(u) = \pi(a) |a| \varphi(a^2 u) \quad g = d(a)$$

$$\hat{T}_g^\pi \varphi(u) = \chi(\chi u) \varphi(u) \quad g = l(x)$$

$$\hat{T}_g^\pi \varphi(u) = \int J_\pi(u, v) \varphi(v) dv \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし $J_\pi(u, v)$ は Bessel 核で

$$J_\pi(u, v) = p - \int_{k^\times} \chi(-(ut + vt^{-1})) \pi(t) d^\times t$$

である。

G の discrete series の表現は, Weil 表現の既約成分として与えられる。具体的に

$$(\mathcal{S}^\times)_\tau^+ = \mathcal{S}^\times|_{k^\times \tau} \ni \varphi(u)$$

とすると

$$T_g^{\pi_\tau^+} \varphi(u) = \pi_\tau \operatorname{sgn} \tau(a) |a| \varphi(a^2 u) \quad g = d(a)$$

$$T_g^{\pi_\tau^+} \varphi(u) = \chi(xu) \varphi(u) \quad g = l(x)$$

$$T_g^{\pi_\tau^+} \varphi(u) = a_\tau s_\tau \int J_{\pi_\tau}(u, v) \varphi(v) dv \quad g = w$$

$$\text{h.t.t.}, \quad a_\tau = \frac{2(1+q^{-1})}{1+| \tau |}, \quad s_\tau^{-1} = \int_{k(\sqrt{\epsilon})} \chi(N(z)) dz$$

$$J_{\pi_\tau}(u, v) = \int_{t \bar{t} = vu^{-1}} \chi(ut + vt^{-1}) \pi_\tau(t) d^* t$$

π_τ は $C_\tau = \{z \mid N(z) = 1\}$ の指標を $k(\sqrt{\epsilon})$ に拡張したもの
であり、表現は同値なものを除いて、拡張の仕方によるもの
とは知られていない。また $(\delta^x)_\tau^- = \delta^x|_{k^x, k_\epsilon^x}$ 上で上と同じ
形の operators による表現が構成される。これらの

$$\mathcal{R}_{\pi_\tau}^+ = \{T_g^{\pi_\tau^+}, (\delta^x)_\tau^+\}, \quad \mathcal{R}_{\pi_\tau}^- = \{T_g^{\pi_\tau^-}, (\delta^x)_\tau^-\}$$

である。 $\pi_\tau \in \hat{C}_\tau$ が order 2 の指標になるとき既約で、 order
2 の指標 π_τ^0 の場合、 $\mathcal{R}_{\pi_\tau^0}^\pm \simeq \mathcal{R}_{\pi_p^0}^\pm \simeq \mathcal{R}_{\pi_{\epsilon p}^0}^\pm$ に split する。

$$\mathcal{R}_{\pi_\tau^0}^+ = \mathcal{R}_0^{+,1} \oplus \mathcal{R}_0^{+,2}, \quad \mathcal{R}_{\pi_\tau^0}^- = \mathcal{R}_0^{-,1} \oplus \mathcal{R}_0^{-,2}$$

と書く。

3. $SL_2(k)$ の表現の tensor 積

我々が取扱う表現の tensor 積 $\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2} = \{T^{\pi_1} \otimes T^{\pi_2}, \delta_{\pi_1} \otimes \delta_{\pi_2}\}$ は次の三つの場合である。

(I) $\mathcal{R}_{\pi_1}, \mathcal{R}_{\pi_2}$ が principal series の表現であるとき、

tensor 積表現は $\varphi(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_{\pi_1} \otimes \mathcal{S}_{\pi_2}$ に対して

$$(T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2}) \varphi(x_1, x_2) = \pi_1 \rho^{-\frac{1}{2}}(\beta x_1 + \delta) \pi_2 \rho^{-\frac{1}{2}}(\beta x_2 + \delta) \\ \times \varphi\left(\frac{\alpha x_1 + \delta}{\beta x_1 + \delta}, \frac{\alpha x_2 + \delta}{\beta x_2 + \delta}\right)$$

で、内積

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int \varphi_1(x_1, x_2) \overline{\varphi_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2$$

で与えられる unitary 表現である。

(II) $\mathcal{R}_{\pi_1}$ が supplementary series, $\mathcal{R}_{\pi_2}$ が principal series 表現の場合, operator は前と同じ, 内積

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})} \int \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_1 - x_1') \varphi_1(x_1, x_2) \overline{\varphi_2(x_1', x_2)} dx_1 dx_1' dx_2$$

で与えられる unitary 表現。

(III) $\mathcal{R}_{\pi_1}, \mathcal{R}_{\pi_2}$ がともに supplementary series 表現で、内積は

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1}) \Gamma(\pi_2^{-1})} \int \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_1 - x_1') \pi_2^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x_2') \\ \varphi_1(x_1, x_2) \overline{\varphi_2(x_1', x_2')} dx_1 dx_1' dx_2 dx_2'$$

で与えられる。

以下それぞれを tensor 積 (I), (II), (III) の case と呼ぶ。

$\mathcal{S}(G)$ は G 上の complex-valued, compactly supported, locally constant function 全体としよう。このとき, 次の写像 $U: \mathcal{S}(G) \rightarrow \mathcal{S}_{\pi_1} \otimes \mathcal{S}_{\pi_2}$ が定義される。

$$\mathcal{S}(G) \ni f(g) \rightarrow \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(d[wn]) \int \pi_1^{-1} \pi_2(d) f(d(a)nl) d^*a$$

$$= \varphi(l, l[wn]l)$$

$$= \varphi(x, y^{-1} + x) \in \delta\pi_1 \otimes \delta\pi_2$$

また $g = d(a)n(y)l(x)$ である。 $\Rightarrow \tau$

$$\mathcal{N}_{\pi_1, \pi_2} = \{ \varphi \mid \varphi \in \delta\pi_1 \otimes \delta\pi_2, \exists \varepsilon > 0$$

$$|x_1 - x_2| = 0 \text{ なる } \varphi(x_1, x_2) = 0 \}$$

また右正則表現を τ_g とする。即ち $\tau_g f(\cdot) = f(\cdot g)$ 。

このとき次の命題が成立する。

Prop. 1 $U: C_c^\infty(G) \ni f \longmapsto \varphi \in \mathcal{N}_{\pi_1, \pi_2}$

は G -morphism かつ surjective continuous である。

$$\text{i.e. } U(\tau_g f) = T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2} \varphi$$

$$\text{and } f_n \rightarrow f_0 \text{ ならば } \varphi_n \rightarrow \varphi_0$$

今 $B(\varphi_1, \varphi_2) \in (I), (II), (III)$ の case の tensor 積 の 双線型形式 とする。このとき prop 1 と等式 連続性

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = B(Uf_1, Uf_2) = B'(f_1, f_2)$$

より $\mathcal{S}(G)$ 上の 連続双線型形式 B' が定義される。核超函数 h' を使って書くと

$$B'(f_1, f_2) = \int h'(g_1, g_2) f_1(g_1) \overline{f_2(g_2)} dg_1 dg_2$$

$$\text{一方 } B(T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2} \varphi_1, T_g^{\pi_1} \otimes T_g^{\pi_2} \varphi_2) = B(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\text{より } h'(g_1 g, g_2 g) = h'(g_1, g_2)$$

核超函数の理論から

$$h'(g_1, g_2) = h(g, g_2^{-1})$$

とある $h \in \mathcal{S}(G)$ が存在する。これから

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int h(g g_2^{-1}) f_1(g_1) f_2(g_2) dg = \int h(g) f'(g) dg$$

$$\text{where } f(g) = \int f_1(g g_1) \overline{f_2(g_1)} dg_1 = f_1 * f_2^*(g), \quad f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$$

(I), (II), (III) の双線型形式に対応する $h(g)$ は具体的に求まる。

Prop. 2 (I), (II), (III) に対応する起関数 $h(g)$ は次の通りである。
 $g = d(a) n(y) l(x)$ に対して (Δ は δ -関数)

$$(I) \quad h(g) = \pi_1^{-1} \pi_2(a) \Delta(y) \Delta(x)$$

$$(II) \quad h(g) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})} \pi_1^{-1} \pi_2(a) \Delta(y) \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$(III) \quad h(g) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1}) \Gamma(\pi_2^{-1})} \pi_1^{-1} \pi_2(a) \pi_2^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(y) \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x)$$

4. Plancherel formula と Plancherel transform

2 節では G の表現 π について principal series の表現および special 表現の χ -実現や discrete series の表現の作用素を改めて積分核 $K_\pi(g|u, v)$ で書くことにする。これは

$$\hat{T}_\pi^\lambda \varphi(u) = \pi \rho^{\frac{1}{2}}(a) \varphi(a^2 u)$$

$$= \int \pi \rho^{\frac{1}{2}}(a) \Delta(v - a^2 u) \varphi(v) dv = \int K_\pi(d|u, v) \varphi(v) dv$$

とこの場合である。

$\hat{G}_c = \tilde{k}^\times$, $\hat{G}_s = \{\pi_0(x) = |x|^{-1}\}$, $\hat{G}_d = \bigcup_{\tau \in \varepsilon.p.\varepsilon p} \hat{C}_\tau$ (ただし order 2 の指標は除く), $\hat{G}_{sd} = \{\pi_\varepsilon^0: C_\varepsilon \text{ 上 } \alpha \text{ order 2 の指標}\}$
 $\hat{G} = \hat{G}_c \cup \hat{G}_s \cup \hat{G}_d \cup \hat{G}_{sd}$ とする。

$\hat{G} \ni \hat{g}$ に対して

$$K_{\hat{g}}(f|u, v) = \int f(g) K_{\hat{g}}(g|u, v) dg$$

を $f(g)$ の Plancherel 変換という。 $K_{\hat{g}}(f|u, v)$ を特徴づけるための関数空間を構成する。

D は $k^\times \times k^\times \times \hat{G}$ 上の次の条件をみたす関数 $F(u, v, \hat{g})$ 達の作る位相線型空間である。(位相については省略)

(1) (i) $\pi \in \hat{G}_c$ に対して

$$b(u, v, \pi) = \Gamma(\pi) \pi^{-1}(u), \quad c(u, v, \pi) = \Gamma(\pi^{-1}) \pi(v)$$

とおくとき $F(u, v, \hat{g})$ は $k^\times \times k^\times \times \hat{G}_c$ 上での

F_1, bF_2, cF_3, bcF_4 ; $F_1, F_2, F_3, F_4 \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \otimes \tilde{\mathcal{S}}^\times$
 の形の関数の finite linear combination で書ける。

$$(ii) F(u, v, \pi^{-1}) = F(u, v, \pi) \pi(u) \pi(v)^{-1}$$

(2) $\pi_0 \in \hat{G}_s$ に対して, $F(u, v, \pi_0)$ は

$$F_1, bF_2 ; F_1(u, v, \pi_0) \in \mathcal{S}^\times \otimes \mathcal{S}^\times, F_2 \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}^\times$$

(3) (i) $\mathcal{F}(\hat{G}_d)$ は discrete set $\hat{G}_d$ の finite sequence 全体とすると $F(u, v, \hat{g}) \in \mathcal{S}^\times \otimes \mathcal{S}^\times \otimes \mathcal{F}(\hat{G}_d)$

$$(ii) F(u, v, \pi_\varepsilon^{-1}) = F(u, v, \pi_\varepsilon) \pi_\varepsilon(u) \pi_\varepsilon(v)^{-1}$$

(4) $F(u, v, \pi_\varepsilon^0) \in \mathcal{S}^\times \otimes \mathcal{S}^\times$

この空間によって Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(f|u, v)$ の特徴づけを行う。

Th. 1 (Paley-Wiener 型の定理)

$f \in \mathcal{S}(G)$ の Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(f|u, v)$ は $k^{\times} \times k^{\times} \times \hat{G}$ 上の関数であって D に属する。

また

$$P: \mathcal{S}(G) \ni f \longmapsto K_{\hat{g}}(f|u, v) \in D$$

は bijection である。

注意 この定理はほぼ正しい と思うが証明は P が surjection であることについて完全に行われていない。そして以後は

$$\mathcal{S}(G) \subset D, \quad P(\mathcal{S}(G)) = D_1$$

として議論する。

$$D_2 = \{ F(u, v, \hat{g}) \in D, \hat{g} \in \hat{G}_d \text{ のとき} \\ F(u, v, \hat{g}) \in \mathcal{S}^{\times} \otimes \mathcal{S}^{\times} \otimes \tilde{\mathcal{S}}^{\times} \}$$

と置くとき $D_2 \subset D_1$ であることは証明される。

G 上の Plancherel formula は次の形で見られる。

$$cf(e) = \int_{\hat{G}_c} \mu(\pi) T_{\pi} T^{\pi}(f) d\pi + 2T_{\pi} T^{\pi_0}(f)$$

$$+ \sum_{\tau \in \text{E.P.}} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\substack{\pi_{\tau} \in \hat{G}_{\tau}, \\ \text{cond } \pi_{\tau} = C_{\tau}^{(h)}}} \mu(\pi_{\tau}) T_{\pi_{\tau}} T^{\pi_{\tau}}(f)$$

$$\text{ただし, } C = \frac{2(q+1)}{q^2}, \quad \mu(\pi) = \frac{q+1}{q^2} \frac{1}{|\Gamma(\pi)|^2}, \quad \mu(\pi_{\tau}) = q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+|\tau|^{-1}}{2} \right)$$

and π_τ is π_τ a conductor.

$\Rightarrow$ $T^\pi(f)$ is f a Plancherel transform is $\frac{1}{2} \ll 1$.

$$T\hat{g}(f) = \int f(g) K_{\hat{g}}(g|u, v) dg = K_g(f|u, v)$$

Prop. 3 次の命題が成り立つ。

$$(1) g \circ f(g) = f(g \circ g) \text{ とおくと}$$

$$K_{\hat{g}}(g \circ f|u, v) = \int K_{\hat{g}}(g \circ f|u, w) K_{\hat{g}}(f|w, v) dw$$

$$(2) f'(g) = f(g^{-1}), K'_{\hat{g}}(f|u, v) = K_{\hat{g}}(f|-u, -v) \text{ とおくと}$$

$$K_{\hat{g}}(f'|u, v) = K'_{\hat{g}}(f|v, u) \frac{\pi(v)}{\pi(u)}$$

$$(3) K_{\hat{g}}(\bar{f}|u, v) = \overline{K'_{\hat{g}}(f|v, u)}$$

$$(4) f^*(g) = \overline{f(g^{-1})} \text{ とおくと}$$

$$K_{\hat{g}}(f^*|u, v) = \overline{K_{\hat{g}}(f|v, u)} \frac{\pi(v)}{\pi(u)}$$

この命題と trace に關する一般論から Plancherel 公式は次の形に書き変えられる。

$$c \int f_1(g) \overline{f_2(g)} dg = \int_{\hat{G}_\tau} \mu(\pi) K_\pi(f_1|u, v) \overline{K_\pi(f_2|u, v)} du dv d\pi$$

$$+ 2 \int K_{\pi_0}(f_1|u, v) \overline{K_{\pi_0}(f_2|u, v)} \frac{\pi(u)}{\pi(v)} du dv$$

$$+ \sum_{\tau \in \mathcal{E}, \text{sp } h=1} \sum_{\pi_\tau \in \hat{\mathcal{C}}_\tau, \text{cond } \pi_\tau = c_\tau^{(h)}} \mu(\pi_\tau) \int K_{\pi_\tau}(f_1|u, v) \overline{K_{\pi_\tau}(f_2|u, v)} du dv$$

$h(g) \in \mathcal{S}'(G)$ とおくと, Plancherel 公式を使うと,

h の Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(h|u, v) \in D_1$ を定義する z とが
ある。とく 12 前節で述べた $t_2 = x$ と組合せると

$$\begin{aligned} B(\varphi_1, \varphi_2) &= \int h(g) f'(g) dg \quad (\star) \\ &= \int_{\hat{G}_c} \mu(\pi) K_{\pi}(h|u, v) K_{\pi}(f'_1|w, u) K_{\pi}(f'_2|w, v) du dv dw d\pi \\ &\quad + 2 \int K_{\pi_0}(h|u, v) K_{\pi}(f'_1|w, u) \overline{K_{\pi}(f'_2|w, v)} \frac{\pi(w)}{\pi(v)} du dv \\ &\quad + \sum_{\tau} \sum_h \sum_{\pi_{\tau}} \mu(\pi_{\tau}) \int K_{\pi_{\tau}}(h|u, v) K_{\pi_{\tau}}(f'_1|w, u) K_{\pi_{\tau}}(f'_2|w, v) du dv dw \end{aligned}$$

前節では h は具体的に f_2 と t_2 。

$$(I) \quad h(g) = \pi_1^{-1} \pi_2(a) \Delta(y) \Delta(x)$$

$$(II) \quad h(g) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1})} \pi_1^{-1} \pi_2(a) \Delta(y) \pi_1^{-1} p^{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$(III) \quad h(g) = \frac{1}{\Gamma(\pi_1^{-1}) \Gamma(\pi_2^{-1})} \pi_1^{-1} \pi_2(a) \pi_2^{-1} p^{-\frac{1}{2}}(y) \pi_1^{-1} p^{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$t_2 t_1^{-1} \quad g = d(a) n(y) l(x) = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

これら各々の起関数に対する Plancherel 変換 $K_{\hat{g}}(h|u, v)$
を求めるのが以後の問題である。

5. $K_{\hat{g}}(h|u, v)$ が non-trivial であるための必要條件

$f \in \mathcal{S}(G)$ に対して $df(g) = f(d^{-1}g)$ となる。prop. 3より、

$$K_{\pi}(df|u, v) = \int K_{\pi}(d|u, u_1) K_{\pi}(f|u_1, v) du$$

$$= \pi \rho^{\frac{1}{2}}(a) K_{\pi}(f|a^2u, v), \quad \pi \in \hat{G}_c, \hat{G}_s$$

$h \in \mathcal{S}'(G)$ であつてもこの等式は成り立つ。

$$K_{\pi}(ah|u, v) = \pi \rho^{-\frac{1}{2}}(a) K_{\pi}(h|a^2u, v) \quad \text{--- (1)}$$

一方 $h(g)$ が (I), (II), (III) のうちのいずれにあつても

$$ah(g) = \pi_1^{-1} \pi_2(a) h(g)$$

よつて

$$K_{\pi}(ah|u, v) = \pi_1^{-1} \pi_2(a) K_{\pi}(h|u, v) \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) を組合せると

$$K_{\pi}(h|a^2u, v) = \pi_1^{-1} \pi_2 \pi^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(a) K_{\pi}(h|u, v)$$

よつて $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と (2) 両辺を比較すると

$$\pi_1^{-1} \pi_2 \pi^{-1}(-1) = \pi_1 \pi_2 \pi(-1) = 1$$

なければならぬ $K_{\pi}(h|u, v) = 0$

$\pi \in \hat{G}_d, \hat{G}_{sd}$ の場合も同様に示す。

$$\pi_1^{-1} \pi_2 \pi^{-1} \rho g_{\pi}(-1) = \pi_1 \pi_2 \pi \rho g_{\pi}(-1) = 1$$

なければならぬ $K_{\pi}(h|u, v) = 0$ であることがわかる。

Th. 2 $\pi_1 \pi_2 \pi(-1) = \pi_1 \pi_2 \pi_c \rho g_{\pi_c}(-1) \neq 1$ とする a, e, π, π_c

と; $a, e, (u, v) \in k^{\times} \times k^{\times}$ に対して

$$K_{\pi}(h|u, v) = K_{\pi_c}(h|u, v) = 0$$

注 この Th は Martin の公式の積分範囲や, Σ の範囲に対応する。

またこの条件から

$$(\pi_1 \pi_2^{-1} \pi^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(a) = (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi^{-1} \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(a)$$

$$(\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_{\tau}^{-1} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(a) = (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_{\tau}^{-1} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(a)$$

とあることを示す。

6. 分解公式 (I), (II) の場合

11.2.1 分解公式とあることを示す。

$$h(g) = h(dn l) = \pi_1^{-1} \pi_2(a) \Delta(y) \Delta(x)$$

Lemma 1 $\pi \in \hat{G}_C, \hat{G}_S$ である

$$K_{\pi}(h|u, v) = \int \pi_1^{-1} \pi_2(a) K_{\pi}(d|u, v) d^{\times} a$$

$$= \begin{cases} 2(\pi_1 \pi_2^{-1} \pi^{-1} \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(u) (\pi_1^{-1} \pi_2 \pi \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(v), & uv^{-1} \in (k^{\times})^2 \\ 0, & uv^{-1} \notin (k^{\times})^2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{S=1, \varepsilon, p, \varepsilon p} (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi^{-1} \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(u) (\pi_1^{-1} \pi_2 \pi \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

Lemma 2 $\pi_{\tau} \in \hat{G}_A$ である。

$u, v \in k_{\tau}^{\times}$ である。

$$K_{\pi_{\tau}}(h|u, v) = K_{\pi_{\tau}}^{+}(h|u, v)$$

$$= (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_{\tau}^{-1} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(u) (\pi_1^{-1} \pi_2 \pi_{\tau} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

$$+ (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_{\tau}^{-1} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(u) (\pi_1^{-1} \pi_2 \pi_{\tau} \rho_{\tau}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}(v)$$

$$\text{ただし } \mu^{\frac{1}{2}}(x) \equiv 1 \quad x \in k_{\tau}^{\times}$$

$$\mu^{-\frac{1}{2}}(x) = 1 \quad x \in (k^{\times})^2, \quad -1 \quad x \in k_{\tau}^{\times} \setminus (k^{\times})^2$$

また $u, v \in k^X \setminus k_\tau^X$ ならば

$$\begin{aligned} K_{\pi_\tau}(h|u, v) &= K_{\pi_\tau}^-(h|u, v) \\ &= \sum_{\pm} (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_\tau^{-1} \rho_{\pi_\tau}^{\pm})^{\frac{1}{2}} \nu^{\pm} \rho^{-\frac{1}{2}}(u) (\pi_1^{-1} \pi_2 \pi_\tau \rho_{\pi_\tau}^{\pm}) \nu^{\pm} \rho^{-\frac{1}{2}}(v) \\ &\quad \nu^+ \equiv 1 \quad x \in k^X \setminus k_\tau^X \\ &\quad \nu^- = \pm 1 \quad k^X \setminus k_\tau^X \text{ ならば } a \text{ coset の } \pm \nu^- \\ &\quad \nu^- \text{ は } 1, \text{ 或 } \nu^- \text{ は } -1 \text{ の値をとる。} \end{aligned}$$

$$\Phi_S(\omega|\pi) = \int_k (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi^{-1} \rho^{\pm})^{\frac{1}{2}} \rho_{\pi_S}^{-\frac{1}{2}}(u) K_{\pi}(f'| \omega, u) du$$

$\pi \in \hat{G}_d, \hat{G}_S$

$$\Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}+) = \int_{k_\tau^X} (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_\tau^{-1} \rho_{\pi_\tau}^{\pm})^{\frac{1}{2}} \mu^{\pm} \rho^{\frac{1}{2}}(u) K_{\pi_\tau}^+(f'| \omega, u) du$$

$$\Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}-) = \int_{k^X \setminus k_\tau^X} (\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_\tau^{-1} \rho_{\pi_\tau}^{\pm})^{\frac{1}{2}} \nu^{\pm} \rho^{\frac{1}{2}}(u) K_{\pi_\tau}^-(f'| \omega, u) du$$

とある。

prop. 4

(1) $\Phi_S(\omega|\pi), \Phi_S(\omega|\pi_0), \Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}+), \Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}-)$ の右辺の積分は収束する。 また

$$\Phi_S(\omega|\pi) \in \hat{\mathcal{S}}_{\pi} \otimes \hat{\mathcal{S}}^X, \quad \Phi(\omega|\pi_0) \in \hat{\mathcal{S}}_{-1}$$

$$\Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}+), \Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}-) \in \mathcal{S}^X \otimes \mathcal{F}(\hat{G}_d \cup \hat{G}_{sd})$$

$$(2) \{ \Phi_S(\omega|\pi), \Phi_S(\omega|\pi_0), \Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}+), \Psi_{\pm}(\omega|\pi_{\tau}-) \} = \hat{\Phi}(\omega|\hat{g}_{S, \pm, +, -})$$

とあくとき像 $f \mapsto \Phi$ と $f \mapsto \varphi(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_{\pi_1, \pi_2}$ の kernel は一致する。したがって $\mathcal{H}_{\pi_1, \pi_2} \ni \varphi \mapsto \Phi$ は同型で、しかも G -同型である。すなわち

$$(T_{\hat{g}}^{\pi_1} \otimes T_{\hat{g}}^{\pi_2} \varphi)(x_1, x_2) \mapsto \int K_{\hat{g}}(g|w, u) \Phi(u|\hat{g}, \cdot) du$$

(3) $\Phi_1(\omega|\pi), \Phi_2(\omega|\pi), \Phi_p(\omega|\pi), \Phi_{2p}(\omega|\pi), \pi \in \hat{G}_d, \hat{G}_s$ とすると、同じ表現を受けるが、4つの関数は vector として (又独立である。 $\Phi_+(\omega|\pi_{\tau+}), \Phi_-(\omega|\pi_{\tau+})$ および $\Phi_+(\omega|\pi_{\tau-}), \Phi_-(\omega|\pi_{\tau-})$ について 2 通り)。以上。

この prop. を 5 節等式 (☆) に代入して分解公式を得る。

Th. 3 $\mathcal{R}_{\pi_i} = \{T^{\pi_i}, \delta_{\pi_i}\}, \pi_1, \pi_2 \in \hat{G}_c$ のとき、テンソル積 $\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2}$ の分解は次の公式で与えられる。

$$\begin{aligned} & C \int \varphi^1(x_1, x_2) \overline{\varphi^2(x_1, x_2)} dx \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_{\pi_1, \pi_2} \\ &= \int_{\hat{G}_c, \pi_1 \pi_2 \pi(-1)=1} \mu(\pi) \left(\frac{1}{2} \sum_s \int \Phi_s^1(\omega|\pi) \overline{\Phi_s^2(\omega|\pi)} d\omega \right) d\pi \\ &+ \frac{1}{2} C(\pi_1 \pi_2) \sum_s \int \Phi_s^1(\omega|\pi_0) \overline{\Phi_s^2(\omega|\pi_0)} |\omega|^{-1} d\omega \\ &+ \sum_{\tau} \sum_{h=1}^2 \sum_{\pi_1 \pi_2 \pi_{\tau} \text{sgn}_{\tau}(-1)=1} \mu(\pi_{\tau}) \left\{ \sum_{\pm} \int \Psi_{\pm}^1(\omega|\pi_{\tau+}) \overline{\Psi_{\pm}^2(\omega|\pi_{\tau+})} d\omega \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\pm} \int \Psi_{\pm}^1(\omega|\pi_{\tau-}) \overline{\Psi_{\pm}^2(\omega|\pi_{\tau-})} d\omega \right\} \end{aligned}$$

π_{ε}^0 は order 2 の C_{ε} の指標 (, $\pi_1 \pi_2(-1) = \pi_{\varepsilon}^0 \text{sgn}_{\varepsilon}(-1)$) であり

ただし、上の公式は split discrete series は表われない。

$$\text{それは } \Psi_{\pm}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0 +) = \gamma'(\omega | \pi_{\varepsilon}^0) \pm \gamma_{\varepsilon}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0)$$

$$\Psi_{\pm}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0 -) = \gamma_p(\omega | \pi_{\varepsilon}^0) \pm \gamma_{\varepsilon p}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0)$$

ただし $\gamma_{\tau}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0)$ は $\tau(k^x)^2$ 以外 $\omega = 3$ では 0 の関数である。
 また

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm} \left\{ \int \Psi'_{\pm}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0 +) \overline{\Psi_{\pm}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0 +)} d\omega + \int \Psi'_{\pm}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0 -) \overline{\Psi_{\pm}(\omega | \pi_{\varepsilon}^0 -)} d\omega \right. \\ & \quad \left. = 2 \sum_s \int \gamma'_s(\omega | \pi_{\varepsilon}^0) \overline{\gamma_s(\omega | \pi_{\varepsilon}^0)} d\omega \right. \end{aligned}$$

となる。以上で Martin の公式は対応するより explicit な公式が得られたわけである。

(II) の場合 ほぼ同様な計算で、証明として表わされる形は全く変わらない。ただし $\pi_2(-) = 1$ という条件がつけ加わるのみである。

Th. 4 省略

7. 分解公式, (III) の場合

$h(g) = \pi_1^{-1} \pi_2(a) \pi_2^{-1} p^{-\frac{1}{2}}(y) \pi_1^{-1} p^{-\frac{1}{2}}(x)$, $\pi_1(x) = |x|^{\lambda_1}$, $\pi_2(x) = |x|^{\lambda_2}$
 $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 0$ に対しては $K_g(h|u, v)$ は Γ -関数の因数をもつ。
 しかし積分の収束に因する条件から $-1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ とその他の
 2 場合は分けて論ぜられる。

結果だけ述べることにする。

Th. 5 $\mathcal{R}_{\pi_i} = \{T^{\pi_i}, \delta_{\pi_i}\}$ $\pi_1(x) = |x|^{\lambda_1}$, $\pi_2(x) = |x|^{\lambda_2}$, $-1 < \lambda_1$,
 $\lambda_2 < 0$, $-1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ とおき, $\tau = 1$ として $\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2}$ の

分解は次のように与えられる。 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_{\pi_1, \pi_2}$

$$\begin{aligned} & c \int \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_1 - x'_1) \pi_2^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x'_2) \varphi_1(x_1, x_2) \overline{\varphi_2(x'_1, x'_2)} dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \\ &= \int_{G_c, \pi(-1)=1} \mu(\pi) \left(\frac{1}{2} \sum_{s=1,2,p,\varepsilon p} \mathbb{I}_s(\pi_1, \pi_2, \pi) \int \Phi'_s(\omega|\pi) \overline{\Phi_s^2(\omega|\pi)} d\omega d\pi \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_s \mathbb{I}_s(\pi_1, \pi_2, \pi_0) \int \Phi'_s(\omega|\pi_0) \overline{\Phi_s^2(\omega|\pi_0)} |\omega|^{-1} d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\tau \neq 1} \sum_{\pi_\tau} \left\{ \sum_{\pm} \mathbb{I}_\tau(\pi_1, \pi_2, \pi_\tau, \pm) \int \Phi'_\pm(\omega|\pi_\tau) \overline{\Phi_\pm^2(\omega|\pi_\tau)} d\omega \right\} \\ &+ \sum_{\pm} \mathbb{I}_\tau(\pi_1, \pi_2, \pi_\tau, \pm) \int \Phi'_\pm(\omega|\pi_\tau) \overline{\Phi_\pm^2(\omega|\pi_\tau)} d\omega \Big\} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_s(\pi_1, \pi_2, \pi) &= \Gamma((\pi_1^{-1} \pi_2 \pi \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\pi_1 s}) \Gamma((\pi_1^{-1} \pi_2 \pi^{-1} \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\pi_2 s}) \\ &\times \Gamma((\pi_1 \pi_2 \pi \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\pi s}) \Gamma((\pi_1 \pi_2 \pi^{-1} \rho^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \rho_{\pi s}) \end{aligned}$$

$$\mathbb{I}_\tau(\pi_1, \pi_2, \pi_\tau, \pm) = \Gamma_\tau(\pi_1^{\pm 1} \pi_2^{\mp 1} \pi_\tau \rho_{\pi_\tau})$$

$$\times \Gamma_\tau(\pi_1 \pi_2 \pi_\tau \mu^{\pm} \rho_{\pi_\tau})$$

Γ_τ は $k(\sqrt{\tau})$ 上の gamma 関数で, $k(\sqrt{\tau})^\times$ の指標 π に対して

$$\Gamma_\tau(\pi) = \int_{k(\sqrt{\tau})} \chi(S(z)) \pi(z) dz$$

で定義されるものがある。

以上

$-2 < \lambda_1 + \lambda_2 \leq -1$ の場合は Th の公式の解析接続により与

める。

まず公式の右辺は

$$-1 < \lambda_1 < 0, \quad -1 < \lambda_2 < 0$$

の範囲で解析的である。右辺から第1項 $S=1$, $\pi(x)=|x|^{i\lambda}$ の部分をとり出そう。

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi(\log q)^{-1}}^{\pi(\log q)^{-1}} \mu(\pi) \Pi_1(\pi, \pi_2, \pi) \left(\int \Phi_1'(\omega|\pi) \overline{\Phi_1^2(\omega|\pi)} d\omega \right) d\lambda \\ &\quad + \text{others} \end{aligned}$$

others の分部分も上記の範囲で解析的である。か積分を書かれた部分は解析的でない。

$$K(\pi, \pi_2) = \frac{1}{2} \int_{-\pi(\log q)^{-1}}^{\pi(\log q)^{-1}} \mu(\pi) \Pi_1(\pi, \pi_2, \pi) \left(\int \Phi_1'(\omega|\pi) \overline{\Phi_1^2(\omega|\pi)} d\omega \right) d\lambda$$

$$\pi(x) = |x|^{i\lambda}$$

は $\lambda_1 + \lambda_2 + 1 = 0$, $\lambda = 0$ の $\lambda = 3$ で被積分関数が singular point である。これが問題点を引き起こし, λ_1, λ_2 について $\lambda_1 + \lambda_2 + 1 \geq 0$ まで解析延長が行われる。

$$\begin{aligned} K(\pi_1, \pi_2) &= \frac{1}{2} \int d\lambda - \frac{2(1-q^{-1})}{\log q} \tan^{-1} \frac{\pi}{(\log q)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\pi_2 \rho^{\frac{1}{2}})}{\Gamma(\pi_1 \rho^{\frac{1}{2}}) \Gamma((\pi_1, \pi_2 \rho^{\frac{1}{2}})^{-1})} \int \frac{\Phi_1'(\omega|\pi_1 \pi_2 \rho^{\frac{1}{2}}) \overline{\Phi_1^2(\omega|\pi_1 \pi_2 \rho^{\frac{1}{2}})}}{|\omega|^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}} d\omega \end{aligned}$$

Th. 6 $\mathcal{R}_{\pi_1} = \{T^{\pi_1}, \delta_{\pi_1}\}$, $\pi_1(x) = |x|^{\lambda_1}$, $\pi_2(x) = |x|^{\lambda_2}$, $-1 < \lambda_1$, $\lambda_2 < 0$, $-2 < \lambda_1 + \lambda_2 \leq -1$ とするとき, $\overline{\tau} = \text{ソルベ}$ $\mathcal{R}_{\pi_1} \otimes \mathcal{R}_{\pi_2}$ の分解は次の公式で与えられる。 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_{\pi_1, \pi_2}$

$$C \int \pi_1^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_1 - x'_1) \pi_2^{-1} \rho^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x'_2) \varphi_1(x_1, x_2) \overline{\varphi_2(x'_1, x'_2)} dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2$$

$$= \text{Th. 5 公式の右辺} - \frac{2(1-q^{-1})}{\log q} \tan^{-1} \frac{\pi}{(\log q)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1)}$$

$$\times \frac{\Gamma(\pi_2 \rho^{\frac{1}{2}})}{\Gamma(\pi_1 \rho^{\frac{1}{2}}) \Gamma(\pi_1 \pi_2 \rho^{\frac{1}{2}})} \int \frac{\Phi^1(\omega | \pi_1 \pi_2 \rho^{\frac{1}{2}}) \overline{\Phi^2(\omega | \pi_1 \pi_2 \rho^{\frac{1}{2}})}}{|\omega|^{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}} d\omega$$

以上

注意 最後の項は supplementary series の表現 $\mathcal{R}_{\pi_1, \pi_2, \rho^{\frac{1}{2}}}$ から与えられている。

文献

- [1] Martin, R. P.: Tensor product for $SL_2(k)$,
trans. A.M.S., vol. 239 (1978), pp. 197-211.