

2 重可移群に共役で含まれる可移部分群の一計算方法

宮本 泉*

IZUMI MIYAMOTO

山梨大学

UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 Introduction

1.1 群 G に共役で含まれる部分群

G, H : 集合 Ω 上の置換群のとき、
ある $g \in \text{Sym}(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ で、 H の g -共役 $g^{-1}Hg = H^g$ が

$$H^g \subseteq G$$

となることはあるか？また、そのような g の探し方は？

1.2 GAP システムの群のライブラリ

置換群のライブラリには、

- 30 次までの可移群
- 2499 次までの primitive な群

がある。

群 G と、その部分群 H が、共に、ライブラリにある群でも、そのままでは、 $H \subset G$ となるとは限らない。

← ライブラリは同型類の分類リストだから。

すなわち、置換群のライブラリにあるのは、

共役類 $\{G^g | g \in \text{Sym}(n)\}$ のうちの 1 つ。

そのとき、 H が G の部分群 $\iff \exists g \in \text{Sym}(n)$ such that $H^g \subset G$

*imiyamoto@yamanashi.ac.jp

1.3 【例1】散在型有限単純群 Co.3

Co.3 は、同じく散在型有限単純群 McL や HS を極大部分群として含む。Co.3 は、276 次の 2 重可移置換群として与えられる。このとき、具体的に、

$$\text{McL}, \text{HS} \subset \text{Co.3} \subset \text{Sym}(276)$$

となるように、McL や HS を求める方法は？

- McL は、Co.3 の 1 点固定部分群となる。← 包含関係がよく分かる。
- HS は、100 次と 176 次の 2 通りの置換群として与えられる。これから、276 次の置換群として作ることができるが ([例 2])、このようにしてできた HS は、そのままでは $\text{HS} \subset \text{Co.3}$ とはなってくれない。
 - Case 1: この作り方が適当であった場合。ある $g \in \text{Sym}(276)$ によって、次が成立。

$$\text{HS}^g \subset \text{Co.3}$$

- Case 2: この作り方が適当でなかった場合。すべての $g \in \text{Sym}(276)$ で、次が成立。

$$\text{HS}^g \not\subset \text{Co.3}$$

1.4 【例2】HS

- HS が 100 次の置換群として与えられたとき、1 点固定部分群は、 $\text{M}(11)$ である。
- HS は 176 次の 2 重可移群となる。 $\text{M}(11)$ も、176 次の primitive な群となる。このとき、次を満たす $g \in \text{Sym}(176)$ を求めることができるか？

$$\text{M}(11)^g \subset \text{HS}$$

GAP システムの primitive な群のライブラリから、176 次の群として $\text{M}(11)$ と HS をもってきて、上の条件を満たす g を求めたい。

【注】 $\text{M}(11)$ は小さい群なので、176 次の HS の中で、比較的簡単に生成させることができる。

1.5 問題の設定

- 例にあげたような有限単純群とその (極大) 部分群の包含関係を、コンピュータで確認したい。
- $H^g \subset G$ を満たす g を探す一般的な方法は無い。
- H が小さい群ならば、 G の中に H と同型な群を構成する方が易しいであろう。
- H は、比較的大きな群の場合を考えることにする。
- G は $\text{Sym}(n)$ よりはるかに小さいので、 H と $g \in \text{Sym}(n)$ で G を生成するような g を探すのは無理。

2 準備

2.1 今までの研究との関連

群の可移拡大 $n-1$ 次の可移な群 H から、 n 次の 2 重可移群 G で、1 点固定部分群が、

$$G_n = \{g \in G \mid n^g = n \in \Omega\} = H$$

となる群を構成する。

→ スーパースキームを使った構成法を得た (2006)

2.2 今回の実験

G : n 次の 2 重可移群、3 重可移ではない。

H : n 次の可移群

→ $H^g \subseteq G$ となる $g \in \text{Sym}(n)$ を探す

【注】可移拡大の H も、 $H \subset \text{Sym}(n)$ で、特に、 $n^h = n$ for $\forall h \in H$

2.3 G, H の制約の主な理由

- H : プログラムが複雑にならないようにするため。
- G : 必要となるスーパースキーム計算で、爆発が起こらないようにするため。スーパースキームで群が決まるようにするため。

2.4 アソシエーションスキーム、スーパースキーム

G は Ω 上の置換群 $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$ への作用: $(x, y)^g = (x^g, y^g)$

このとき、下の作用の作る orbit の全体は、それぞれ、

- G は可移、 Ω^2 への作用 → アソシエーションスキーム
- Ω^2 への作用 → コヒアラントコンフィギュレーション
- $\Omega, \Omega^2, \Omega^3$ への作用 → 3-スーパースキーム

を作る。

2.5 スーパースキーム

定義. (Ω, Π) が t -スーパースキームであるとは、 $\iff$

S1. $\Pi = \{\Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^t\}$, $t \geq 2$, で Π^ℓ は $1 \leq \ell \leq t$ において Ω^ℓ の分割,

S2. $\sigma \in \text{Sym}(\ell)$ について、 $\sigma((y_1, y_2, \dots, y_\ell)) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(\ell)})$, $\Pi^\ell = \{R_0^\ell, R_1^\ell, \dots, R_{d_\ell}^\ell\}$, $1 \leq \ell \leq t$, とおくと、すべての R_k^ℓ と $\sigma \in \text{Sym}(\ell)$, に対して、 $\sigma(R_k^\ell) \in \Pi^\ell$... (symmetric)

S3. projection $\pi_j^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \Omega^{\ell-1}$ を

$\pi_j^\ell((y_1, y_2, \dots, y_\ell)) = (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_\ell)$ で定義すると、
すべての $R_k^\ell \in \Pi^\ell$, $2 \leq \ell \leq t$ に対して, $\pi_j^\ell(R_k^\ell) \in \Pi^{\ell-1}$,

S4. すべての R_k^ℓ , $2 \leq \ell \leq t$, と, すべての $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{\ell-1}) \in \pi_j^\ell(R_k^\ell)$ に対して, constant $p_{k,j}^\ell = |(\pi_j^\ell)^{-1}(\mathbf{y}) \cap R_k^\ell|$ が存在. 特に, $p_{k,j}^\ell = |R_k^\ell|/|\pi_j^\ell(R_k^\ell)|$. $\dots$ (regular)

3 Algorithm

3.1 Algorithm (スーパースキーム)

- G と H の作るスーパースキームを計算する。
- H の作るスーパースキームのフュージョンスキームを計算して、 G の作るスーパースキームと同型になりうるものを探す。
– (Ω, Π) が (Ω, Π') のフュージョンスキーム $\iff \Pi'^\ell$ は Π^ℓ の refinement
- 同型になりうるものが得られたら、その自己同型群が G と共役になるかどうか計算する。

3.2 Algorithm (orbit)

- G と H の Ω^3 上の orbit Π^3 と Π'^3 を計算する。
- H の orbit を適当にまとめて、 $Sym(\Omega)$ の元で移して G の orbit と一致する可能性のあるものを求める。
- orbit 全体を不変に保つ群が、 G と共役であるかどうか計算する。(共役計算の困難な場合：2009 本研究集会)

3.3 計算の困難さについて

- 可移な群の作るアソシエーションスキームでも同様な方法が適用できるが、非常に多くの群が同じアソシエーションスキームを作る場合がある。(2008 本研究集会)
- 同様に、非常に多くの群が Ω^3 上に同じ orbit を持つ、すなわち、同じ 3-スーパースキームを作る場合がある。
- primitive な群なら、アソシエーションスキームで、ほぼ決まる。
- 2重可移群は対称群と同じアソシエーションを作るので、3-スーパースキームを考える必要がある。
- 3重可移群では、4-スーパースキームが必要、しかし、 Ω^4 は直接計算では大きすぎる。
- H の Ω^3 上の orbit 数が少なくないと、計算が爆発する。(20 個以下?)
- 次数 $n = |\Omega|$ が大きくても、 Ω^3 上の orbit 数が少なければ計算可能。(スーパースキームの自己同型計算については、 Ω^3 で行っているの、大変。)

4 実験

4.1 GAP の primitive な群のライブラリから 31 次 – 200 次

- いずれの実験例でも、計算時間の大部分はスーパースキームを表す $n \times n \times n$ 次の 3 次元配列の直接計算にかかっている。
- H の orbit 情報およびそれらを結合して G の共役群の orbit 候補を作る計算、スーパースキームの自己同型群計算は、全部で数秒程度。(orbit 候補計算が爆発しない例を選んでいる。)
- スーパースキームの自己同型群計算と G の共役計算は、1, 2 秒以内、または、計算困難 (2009 本研究集会)。

4.2 GAP のライブラリの記号、 n 次の primitive な群、その他の記号

$$G = \text{PrimitiveGroup}(n, i), \quad H = \text{PrimitiveGroup}(n, j)$$

S : 得られたスーパースキーム, $\text{Aut}(S)$: その自己同型群

4.3 実験結果

次数 n	G			H			結果	秒
	i	name	$ G $	j	name	$ G / H $	$\text{Aut}(S)$	time
120	15	$PSp(8, 2)$	47377612800	2	$Alt(9)$	261120	$PSp(8, 2)$	140
							$Alt(9)$	–
				12	$PSp(4, 4)$	48384	$PSp(8, 2)$	130
				13	$PSp(4, 4).2$	24192	$PSp(8, 2)$	150
				14	$PSp(6, 2)$	32640	$PSp(8, 2)$	150
				16	$O^+(8, 2)$	272	$PSp(8, 2)$	150
				17	$PSO^+(8, 2)$	136	$PSp(8, 2)$	150
				18	$Alt(10)$	26112	$Sym(10)$	135
		(same superscheme as 16)					$Sym(10)$	–
136	6	$PSp(8, 2)$	47377612800	7	$PSp(4, 4)$	48384	$PSp(8, 2)$	220
				8	$PSp(4, 4).2$	24192	$PSp(8, 2)$	250
				9	$O^-(8, 2)$	240	$PSp(8, 2)$	275
				10	$PSO^-(8, 2)$	120	$PSp(8, 2)$	275
		(same superscheme as 9)						
156	5	$PSL(4, 5)$	7254000000	1	$PSp(4, 5)$	1550	$PGL(4, 5)$	14+?
				2	$PSp(4, 5).2$	775	$PGL(4, 5)$	28+?
				3	$PSp(4, 5)$	1550	[]	0.2 秒
				4	$PSp(4, 5).2$	775	[]	0.2 秒
176	4	HS	44352000	3	$M(11)$	100	HS	12
							$M(11)$	–
255	2	$PSL(8, 2)$	$\approx 5 \times 10^{18}$	1	$PSp(8, 2)$	$\approx 10^8$	$PSL(8, 2)$	236
276	3	$Co.3$	495766656000	4	$M(24)$	2025	[]	0.5 秒

5 考察

5.1 【例】 $G = M(9) = 3^2:Q(8)$, $H = 3^2:2$

- $(\Omega, \Pi) : G$ の作るスーパースキーム、
 $\Pi^{(3)} : \Omega^3$ の分割で、 $(i, j, k) \in P \in \Pi^{(3)}$, i, j, k は互いに異なる
 $\implies |\Pi^{(3)}| = 7$ 、すべて同じサイズで区別が困難
- 192 個の答
 - 48 個は G と共役な群
 - 144 個は $\text{PrimitiveGroup}(9, 4) = 3^2:8$ と共役な群

5.2 【例】 $G = \text{PrimitiveGroup}(156, 5) = PSL(4, 5)$

- $\text{PrimitiveGroup}(156, 7) = PGL(4, 5)$ が得られる
- 2つの $PGL(4, 5)$ 間の共役元計算は、GAP の関数 `RepresentativeAction` では困難 285 分より大
- 2009 本研究集会の方法で、105 秒

5.3 【例】 $G = \text{PrimitiveGroup}(255, 2) = PSL(8, 2)$

- スーパースキーム構成の計算：1 秒以下
- スーパースキームを表す 3 次元配列の計算：235 分、1252MB
- スーパースキームの自己同型群計算：42 秒
 - MacBook
 - CPU : 2.4 GHz Intel Core 2 Duo
 - メモリ：4 GB 667 MHz DDR2 SDRAM
- 可移拡大計算のときは、群 H の作用を考慮して 3 次元配列の直接計算はしていない

5.4 G, H の制約条件

- 最初の例、276 次の 2 重可移群 $G = Co.3$ と可移ではない $H = HS$
- この方法の一般化は、フュージョンスキームの計算になる (複雑?)
 - (Ω, Π) が (Ω, Π') のフュージョンスキーム
 $\iff$ 各 i で、分割 Π'^i は分割 Π^i の refinement
- 結局、 G の中に H と同型な群を作る、または、 H を含む G と同型な群を作ることが本質?