

v -sufficiency と (k) -regularity について

京大 理学部 小池 敏司

local topological analysis において、最も基本的な問題の一つは、 C^k map-germ $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ($k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$) の $0 \in \mathbb{R}^n$ の近くにおける local topological picture を決定することである。そこから自然に出てくる問題として、"jet の v -sufficiency" がある。

$E_{C^k}(n, p)$ を $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ への C^k map germ ($k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$) の作る vector space とする。 r -jet $w \in J^r(n, p)$ が v -sufficient in $E_{C^k}(n, p)$ ($k \geq r$) であるとは、 $\forall f, g \in E_{C^k}(n, p)$ with $j^r(f) = j^r(g) = w$ に対し、ある $\sigma: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ local homeomorphism が存在して、 $\sigma(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ になる時言う。

v -sufficiency in $E_{C^k}(n, p)$ 又は $E_{C^{r+1}}(n, p)$ に対する判定法は、T. C. Kuo ([2]) により与えられた。しかし、 v -sufficiency in $E_{C^k}(n, p)$ ($k = r+2, r+3, \dots, \infty, \omega$) に対する characterization は、一つも知られていない

い。

ここでは、 (h) -regularity, $(\bar{h})$ -regularity という概念を用いて、 r -jet $W \in J^r(n, p)$ が V -sufficient in $E_{[k]}(n, p)$ ($k = r+1, r+2, \dots, \infty, \omega$) になるための characterization を与える。

§ 1 V -sufficiency と regularity

上に述べたように、 V -sufficiency in $E_{crj}(n, p)$ 又は $E_{chrj}(n, p)$ に関しては、次の結果が知られている。

定理 1 (T.C. Kuo [2]) r -jet $W \in J^r(n, p)$ に対し、次の条件は同値である。

① W は、 V -sufficient in $E_{crj}(n, p)$ (resp. $E_{chrj}(n, p)$) である。

② ある正数 C (resp. δ) が存在して、

$$d(\text{grad } W_1(x), \dots, \text{grad } W_p(x)) \geq C|x|^{r-1}$$

$$(\text{resp. } d(\text{grad } W_1(x), \dots, \text{grad } W_p(x)) \geq C|x|^{r-\delta})$$

$x \in H_r$; horn neighborhood が成り立つ。

注意 1 (J. Bochnak and S. Łojasiewicz [1])

特に $p=1$ の時、horn neighborhood H_r の代わりに

$|x| < d$ ($d > 0$) と出来る。

定義 1 M_1, M_2 を $\mathbb{R}^l$ の中の n -dim. submanifold ($n < l$) とし、 $M_1 \ni A_1 \ni a_1, M_2 \ni A_2 \ni a_2$ とする。

germ (A_1, a_1) in M_1 と (A_2, a_2) in M_2 とが topological equivalent とは、ある近傍 $U_1 \in \mathcal{O}_{a_1}(M_1)$, $U_2 \in \mathcal{O}_{a_2}(M_2)$ と、ある homeomorphism $h: (U_1, a_1) \rightarrow (U_2, a_2)$ とが存在して、 $h(A_1 \cap U_1) = A_2 \cap U_2$ になる時言う。

X, Y をあるユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ に embed された C^∞ -manifold, $y \in Y \subseteq X$ とする。

定義 2 $\tilde{S}$ は、 $\mathbb{R}^l$ の submanifold, $\dim \tilde{S} = s = \text{codim } Y$ とする。但し、 $1 \leq k \leq \infty$ とする。

(1) X が (C^k) -regular over Y at y とは、 $y \in Y$ に transversal な任意の C^k -submanifold $\tilde{S}$ に対し、ある近傍 $U \in \mathcal{O}_y(\mathbb{R}^l)$ が存在して、 U の中で $\tilde{S}$ は X に transversal になる時言う。

(2) X が (C^k) -regular over Y at y とは、任意の C^k -submanifold $\tilde{S}$ with $y \in \tilde{S}$ and $\tilde{S} \nsubseteq Y$ at y

と X との intersection の y での germ の topological type は、 $\tilde{S}$ の選び方に独立になる時言う。

(3) X が $(\tilde{h}^k)$ -regular over Y at y とは、任意の C^k -submanifold $\tilde{S}$ with $y \in \tilde{S}$ and $\tilde{S} \cap Y$ at y と X との intersection の定義 1 の意味での y での germ の topological type (即ち、 $\tilde{S}$ の中における topological type) は、 $\tilde{S}$ の選び方に独立になる時言う。

定義より明らかのように、 $(\tilde{h}^k)$ -regular $\Rightarrow$ (h^k) -regular である。

注意 2 (h^k) , (h^k) -regular というのは、一般に、 $\text{codim } Y \leq s \leq l$ に対し考えられる。その時、 (h_s^k) -regular, (h_s^k) -regular と言う。

定理 2 (D. J. A. Trotman [4]) $1 \leq k \leq \infty$ に対し、
 (h_s^k) -regular $\Rightarrow$ (h_s^k) -regular if $\begin{cases} k=1 \\ k>1 \text{ and } s > \text{codim } X \end{cases}$
 である。

注意 3 $\dim X > \dim Y$ の時、 (h^k) -regular $\Rightarrow$
 $\nexists$

(t^k) -regular $(1 \leq k \leq \infty)$ である。

§2 結果

まず、 $w \in J^r(n, p)$ から定まる variety V_F を導入しよう。
 r -jet $w \in J^r(n, p)$ と r 次の polynomial map.
 $w = (w_1(x), \dots, w_p(x))$ と identify する事にする。

$F(x; \lambda) \equiv (F_1(x; \lambda^{(1)}), \dots, F_p(x; \lambda^{(p)}))$
 但し、 $F_i(x; \lambda^{(i)}) = w_i(x) + \sum_{|\alpha|=r} \lambda_\alpha^{(i)} x^\alpha$ ($1 \leq i \leq p$)
 とおく。この時、 $(\lambda_\alpha^{(i)})$ は、あるユークリッド空間 Λ と
 identify される。

$\mathbb{R}^n \times \Lambda$ における variety

$V_F: F_1(x; \lambda^{(1)}) = 0, \dots, F_p(x; \lambda^{(p)}) = 0$
 とする。その singular subvariety は、 $\{0\} \times \Lambda$ に
 含まれる i.e. $x \neq 0 \Rightarrow \text{grad } F_i$ ($1 \leq i \leq p$) は、
 一次独立である。

$S > 0$ に対し、 $\pi_S: J^{r+S}(n, p) \rightarrow J^r(n, p)$ canonical
 projection とする。

r -jet $w \in J^r(n, p)$ の realization の $0 \in \mathbb{R}^n$ での
 variety の germ の topological type と V_F の regularity
 に関して、次の事が知られている。

定理 3 (T. C. Kuo and Y. C. Lu [3]) 次の条件は同値である。但し、 $1 \leq s < \infty$ とする。

- ① V_F は (t^s) -regular over Λ at 0 である。
- ② 任意の $w \in \pi_s^{-1}(w)$ は、 v -sufficient in $E_{[r+s]}(n, p)$ である。
- ③ w は、 $0 \in \mathbb{R}^m$ での variety の germ かつ、non-homeomorphic な C^{r+s} -realization を高々有限個しか持たない。

定理 3 より、 $w \in T^r(n, p)$ の realization の variety の topological type の有限性は、 V_F の (t) -regularity で characterize された。ここで、特に有限個か一個になる時、即ち、 $w \in T^r(n, p)$ が v -sufficient になる事を V_F の regularity を用いて characterize されないだろうか？
定理 3 と注意 3 より、 r -jet $w \in T^r(n, p)$ と V_F の regularity については、次の図式が成立する事がわかる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 w; (v\text{-suff. in}) & E_{[r+1]} & \rightarrow & E_{[r+2]} & \rightarrow \cdots & \rightarrow & E_{[r+s]} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{[\infty]} \rightarrow E_{[w]} \\
 & \updownarrow & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
 V_F; (t\text{-regular}) & (t^1) & \rightarrow & (t^2) & \rightarrow \cdots & \rightarrow & (t^s) \rightarrow \cdots \rightarrow (t^\infty) \rightarrow (t^w) \\
 & \uparrow & & \uparrow & \cdots & & \uparrow & \cdots & \uparrow \\
 & (t^1) & \rightarrow & (t^2) & \rightarrow \cdots & \rightarrow & (t^s) \rightarrow \cdots \rightarrow (t^\infty) \rightarrow (t^w)
 \end{array}$$

注意 4 $V_F - \Lambda$, Λ は、semi-analytic な analytic submanifold より、 $(\mathbb{R}^w)$, $(\mathbb{R}^w)$ -regularity を考える事にする。

$w \in T^r(n, p)$ の v -sufficiency in $E_{\text{CRS}}(n, p)$ と V_F の $(\mathbb{R}^s)$, $(\mathbb{R}^s)$ -regularity に関する考察により、次の結果を得た。

定理 (I) 次の条件 ④ ⑤ は同値である。

(i) $s \in \mathbb{N}$ の時、④ w は、 v -sufficient in $E_{\text{CRS}}(n, p)$ である。

⑤ V_F は、 $(\mathbb{R}^s)$ -regular over Λ at 0 である。

(ii) $k = \infty, w$ の時、④ w は、 v -sufficient in $E_{\text{CR}}(n, p)$ である。

⑤ V_F は、 $(\mathbb{R}^k)$ -regular over Λ at 0 である。

(II) 特に $p \geq 2$, $s \in \mathbb{N}$ の時、次の条件 ⑥ も同値である。

⑥ V_F は、 $(\mathbb{R}^s)$ -regular over Λ at 0 である。

問題 $p=1$ の時も、 $(\mathbb{R})$ -regularity が同値になるか？
 $n=1, 2$ の時は成立している。

文 献

[1] J. Bochnak and S. Łojasiewicz : A converse

of the Kuiper - Kuo theorem, Proc. of the
 Liverpool Singularities Sym. Springer Lecture
 Notes in Math. 192 (1971), p 254 - 261.

- [2] T. C. Kuo : Characterizations of v -sufficiency
 of jets, Topology 11 (1972), p 115 - 131.
- [3] T. C. Kuo and Y. C. Lu : Sufficiency of jets
 via stratification theory, Invent. Math.,
 57 Fasc. 3 (1980), p 219 - 226.
- [4] D. J. A. Trotman : Interprétations Topologiques
 des Conditions de Whitney, Soc. Math.
 France, Astérisque 59-60 (1978), p 223 - 248.