

Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations

神戸大学理学部 齋藤 政彦 (Masa-Hiko Saito)
 神戸大学自然科学研究科 寺島 ひとみ (Hitomi Terajima)

概要

パンルベ方程式がその初期値空間によって特徴付けられることは知られていて、ひとつには、岡本-パンルベ対 (S, Y) に複素構造の変形理論を応用することにより、初期値空間からパンルベ方程式を復元する方法がある [STT]. 本稿では、パンルベ方程式のリッカチ解を岡本-パンルベ対の言葉で特徴付けたうえで、それらの分類と、関連する話題¹ について考察する.

1 岡本-パンルベ対とパンルベ方程式

まず始めに, [STT] に従って, 岡本-パンルベ対の言葉でパンルベ方程式を定式化しておしてみたい.

定義 1.1 S を有理曲面, $Y \in |-K_S|$ を S 上の有効反標準因子とする. また, $Y = \sum_{i=1}^r m_i Y_i$ を Y の既約分解とする. 対 (S, Y) が次の条件を満たすとき, 岡本-パンルベ対という. 任意の i ($1 \leq i \leq r$) に対し,

$$Y \cdot Y_i = \deg Y|_{Y_i} = 0. \quad (1)$$

また, $D := Y_{\text{red}} = \sum_{i=1}^r Y_i$ とする.

注 1.1 岡本氏によるパンルベ方程式の初期値空間は, ある岡本-パンルベ対 (S, Y) に対して $S - D$ とかける事がわかる. また, 本稿では, 簡単のため, "岡本-パンルベ対" としたが, これは, [STT] では "generalized rational Okamoto-Painlevé pair" に相当する.

以下, ことわりがない限り, 岡本-パンルベ対 (S, Y) は, つぎの条件を満たすものとする.

仮定 1 1. Y の配置のタイプ $R = R(Y)$ は, 以下のひとつと一致する.

$$\tilde{D}_4, \tilde{D}_5, \tilde{D}_6, \tilde{D}_7, \tilde{D}_8, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8.$$

2. non-fibered タイプ, すなわち, elliptic fibration $f : S \rightarrow \mathbf{P}^1$ で $f^{-1}(\infty) = Y$ を満たすものが存在しない.

¹ 2001 年 9 月の研究集会「モジュライ空間の幾何と可積分系」(数理解) での講演内容も含む

注 1.2 この仮定の下では,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Theta_S(-\log D) \otimes N_{D/S}) = 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Theta_S(-\log D) \otimes \mathcal{O}_S(D)) = 0.$$

以下, 岡本-パンルベ対 (S, Y) から微分方程式系が導出される過程を簡単に復習し, 岡本-パンルベ対の言葉で, パンルベ方程式を定義する.

定理 1.1 (Proposition 5.1. [STT]) 岡本-パンルベ対 (S, Y) に対して, 次の性質を満たす可換図式

$$\begin{array}{ccc} S & \leftarrow & D \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R & & \end{array} \quad (2)$$

が存在する.

1. $\mathcal{M}_R$ は, $\mathbb{C}^s = \text{Spec} \mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ ($s = s(R) = 9 - r$) のアフィン開部分スキームで, $\mathcal{B}_R$ は, $\mathbb{C} = \text{Spec} \mathbb{C}[t]$ のアフィン開部分スキーム. ここで, r は Y の既約成分の個数.
2. 上の図式は, non-singular pair (S, D) の変形.
3. D に沿ってだけ極を持ち, ゼロをもたない S 上の相対有理 2 形式

$$\omega_S \in \Gamma(S, \Omega_{S/\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R}^2(*D))$$

が存在する.

4. $\mathcal{Y}$ を ω_S の極因子とする ($\mathcal{Y}_{red} = D$). このとき, 各点 $(\alpha, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ に対して, $(S_{\alpha, t}, \mathcal{Y}_{\alpha, t})$ は, タイプ $R = R(Y)$ の岡本-パンルベ対 (non-fibered とは限らない) である. また, タイプ R の任意の岡本-パンルベ対 (S', Y') に対して, $\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ の点 (α, t) が存在して, $(S', Y') \simeq (S_{\alpha, t}, \mathcal{Y}_{\alpha, t})$.
5. 各点 $(\alpha, t) \in \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ で半普遍, すなわち, $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間の線形写像である小平-スペンサー写像

$$\rho_{\alpha, t} : T_{\alpha, t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) \longrightarrow H^1(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t})) \quad (3)$$

が同型. ファイバーの岡本-パンルベ対が non-fibered タイプであるような点 (このような点からなる集合は $\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ のザリスキ開集合) について, $T_{\alpha, t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R)$ の 1 次元部分空間 $\langle \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{C}}$ は, 小平-スペンサー写像によって, $H^1(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t}))$ の 1 次元部分空間 $H^0(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t}) \otimes N_{\mathcal{D}_{\alpha, t}})$ と同型.

$$\begin{array}{ccc} \rho_{\alpha, t} : T_{\alpha, t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) & \xrightarrow{\sim} & H^1(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t})) \simeq \mathbb{C}^{10-r} \\ \cup & & \cup \\ T_{\alpha, t}(\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R) & \xrightarrow{\sim} & H^0(S_{\alpha, t}, \Theta_{S_{\alpha, t}}(-\log \mathcal{D}_{\alpha, t}) \otimes N_{\mathcal{D}_{\alpha, t}}) \simeq \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ \frac{\partial}{\partial t} & \longmapsto & \rho_{\alpha, t}(\frac{\partial}{\partial t}) \end{array} \quad (4)$$

ただし, t は $\mathcal{B}_R$ の座標.

6. M_R と B_R をそれぞれ, $\mathcal{M}_R$ と $\mathcal{B}_R$ のアファイン座標環 (すなわち, $\mathcal{M}_R = \text{Spec} M_R$, $\mathcal{B}_R = \text{Spec} B_R$) とする. (M_R と B_R は, それぞれ $\mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ と $\mathbb{C}[t]$ のある局所化で得られる.) このとき, $\mathcal{S}$ のアファイン開被覆 $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{l+k}$ で, 各 $\tilde{U}_i$ がつぎであたえられるようなものが存在する.

$$\tilde{U}_i \simeq \text{Spec}(M_R \otimes B_R)[x_i, y_i, \frac{1}{f_i(x_i, y_i, \alpha, t)}] \subset \text{Spec} \mathbb{C}[\alpha, t, x_i, y_i] \simeq \mathbb{C}^{s+3} \simeq \mathbb{C}^{12-r}. \quad (5)$$

ここで $f_i(x_i, y_i, \alpha, t) \in (M_R \otimes B_R)[x_i, y_i]$. さらに, $\mathcal{S} - \mathcal{D}$ は, $\{\tilde{U}_i\}_{i=1}^l$ で覆われており, 各 i にたいして, 相対有理 2 形式 ω_S の $\tilde{U}_i$ への制限が,

$$\omega_S|_{\tilde{U}_i} = \frac{dx_i \wedge dy_i}{f_i(x_i, y_i, \alpha, t)^{m_i}} \quad (6)$$

と書ける.

7. $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \emptyset$ となる, 各 i, j に対して変換関数

$$x_i = f_{ij}(x_j, y_j, \alpha, t), \quad y_i = g_{ij}(x_j, y_j, \alpha, t) \quad (7)$$

は, 有理関数体 $\mathbb{C}(x_j, y_j, \alpha, t)$ の元である.

さて, 層の短完全列

$$0 \longrightarrow \Theta_S(-\log D) \longrightarrow \Theta_S(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D) \longrightarrow \Theta_S(-\log D) \otimes N_D \longrightarrow 0$$

の (チェック) コホモロジーを取って得られる長完全列と, 可換図式 (4) をあわせると次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial t} \in T_{\alpha, t}(\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R) & \hookrightarrow & T_{\alpha, t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) \\ \downarrow & & \downarrow \rho_{\alpha, t} \\ 0 \rightarrow H^0(\Theta_S(-\log D) \otimes N_D) & \hookrightarrow & H^1(\Theta_S(-\log D)) \xrightarrow{\phi} H^1(\Theta_S(-\log D) \otimes \mathcal{O}_S(D)) \\ & \searrow \Psi & \searrow \Psi \\ & \rho_{\alpha, t}(\frac{\partial}{\partial t}) & \mapsto 0 \end{array} \quad (8)$$

ここで, $S = \mathcal{S}_{\alpha, t}$, $D = \mathcal{D}_{\alpha, t}$. また, $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Theta_S(-\log D) \otimes \mathcal{O}_S(D)) = 0$ (注 1.2) を使った.

上の図式より, $H^1(\Theta_S(-\log D))$ のゼロでない元 $\rho_{\alpha, t}(\frac{\partial}{\partial t})$ は, $H^0(\Theta_S(-\log D) \otimes N_D)$ の像に属しており, またこの図式の完全性から, ϕ によって, ゼロにうつされる. すなわち,

$$\rho(\frac{\partial}{\partial t}) = \{ \theta_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_i} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Theta_S(-\log D)) \}$$

は, $H^1(\Theta_S(-\log D) \otimes \mathcal{O}(D))$ の元として, ゼロである. このことがすべての $(\alpha, t) \in \mathcal{M}_r \times \mathcal{B}_r$ に対して成り立つことと, base change theorem を使うと, 各 $\tilde{U}_i$ 上, 有理ベクトル場

$$\theta_i(x_i, y_i, \alpha, t) = \eta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \frac{\partial}{\partial y_i} \in \Gamma(\tilde{U}_i, \Theta_S(-\log D) \otimes \mathcal{O}_C(D))$$

で, $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ 上

$$\theta_{ij}(x_i, y_i, \alpha, t) = \theta_j(x_j, y_j, \alpha, t) - \theta_i(x_i, y_i, \alpha, t)$$

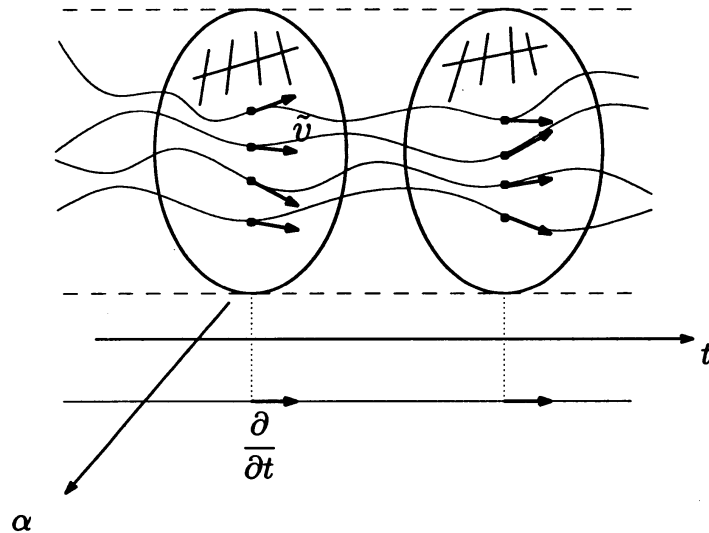
を満たすものが存在する. 一方で,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i + \theta_{ij}(x_i, y_i, \alpha, t)$$

であるから, $\tilde{U}_i$ 上のベクトル場 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \alpha, t)$ は S 上張り合って, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ のリフトである) 大域的有理ベクトル場

$$\tilde{v} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_i - \theta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \right\}$$

を得る.



定理 1.2 (Theorem 6.1. [STT]) 上の補題の $R = R(Y)$, $S, \mathcal{D}, \mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R$ に対し, S 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v} \in \Gamma(S, \Theta(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_S(\mathcal{D}))$$

で, $\pi_*(\tilde{v}) = \frac{\partial}{\partial t}$ となるものが, 一意的に存在する. $\tilde{v}$ の $S - \mathcal{D}$ 上への制限 $\tilde{v}|_{S-\mathcal{D}}$ は正則な代数的ベクトル場である. さらに, $\{\tilde{U}_i \subset \text{Spec } \mathbb{C}[\alpha, t, x_i, y_i] \simeq \mathbb{C}^{s+3} \simeq \mathbb{C}^{12-r}\}_{i=1}^l$ を $S - \mathcal{D}$ のアフィン開被覆とすると, $\tilde{v}$ の $\tilde{U}_i$ 上への制限は,

$$\tilde{v}|_{\tilde{U}_i} = \frac{\partial}{\partial t} - \theta_i = \frac{\partial}{\partial t} - \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \zeta_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (9)$$

と書いて, 微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\eta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \\ \frac{dy_i}{dt} = -\zeta_i(x_i, y_i, \alpha, t) \end{cases} \quad (10)$$

を定義する. ここで, η_i, ζ_i は, $\tilde{U}_i$ 上の正則代数関数である.

定義 1.2 この一意なベクトル場 $\tilde{v}$ によって定義される (10) のような微分方程式系を, タイプ R のパンルベ系と呼ぶ.

注 1.3 実際, このベクトル場が定める微分方程式系は, パンルベ方程式と同値である. タイプ R とパンルベ方程式との対応は次の通り.

<i>type of (S, Y)</i>	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{D}_8$	$\tilde{D}_7$	$\tilde{D}_6$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_5$	$\tilde{D}_4$
<i>Painlevé equations</i>	P_I	P_{II}	$P_{III}^{\tilde{D}_8}$	$P_{III}^{\tilde{D}_7}$	$P_{III}^{\tilde{D}_6}$	P_{IV}	P_V	P_{VI}

2 岡本-パンルベ対上の nodal curve とリッカチ解

ある曲面 S 上の曲線 C が, $\mathbf{P}^1$ と同型で, 自己交点数 $C \cdot C$ が -2 であるときに **nodal curve** と呼ぶ. ちなみに, 岡本-パンルベ対 (S, Y) については, $S - D$ 上の $\mathbf{P}^1$ は自己交点数が -2 であることが分かるので, nodal curve である.

初期値空間に相当する $S - D$ がパンルベ方程式の解をパラメータ付けしているのであるが, この節では, パンルベ方程式のリッカチ解を岡本-パンルベ対の言葉で定義たうえで, 「 $S - D$ 中の "nodal curves" が "リッカチ解" をパラメータ付けしている」ということを述べたい.

この節では, 前節で出てきた大域的な岡本-パンルベ対の変形 (2) の底空間を ($\alpha \in \mathcal{M}_R$ を固定し) $\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R$ に制限したところで考える. S 上のベクトル場 $\tilde{v}$ は $\frac{\partial}{\partial t}$ のリフトだったので, $\mathcal{S}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}$ 上に制限すると, $\mathcal{S}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}$ 上の有理ベクトル場

$$\tilde{v}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R} \in \Gamma(\mathcal{S}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}, \Theta(-\log \mathcal{D}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}}(\mathcal{D}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}))$$

とすることができる. ($\mathcal{M}_R$ は方程式のパラメータ空間とすることができて, $\alpha \in \mathcal{M}_R$ を固定するのは方程式をひとつ決めるということに対応する).

以下 α を固定し, 簡単のため記号を, $\mathcal{B}_R := \{\alpha\} \times \mathcal{B}_R$, $\mathcal{S} := \mathcal{S}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}$, $\mathcal{D} := \mathcal{D}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}$, $\tilde{v} := \tilde{v}|_{\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R}$ とする.

ここでは証明は与えないが, 代数幾何的な議論によって, 「岡本-パンルベ対 (S, Y) の $S - D$ 上に nodal curve C が存在するとき, (前節の意味で) (S, Y) によって定まる $S - D$ を初期値空間とする方程式は, C を初期値空間とする方程式に還元されうる」ということが示せる. すなわち,

定理 2.1 ([Sa-Te]) 変形 (2) のパラメータ空間を制限して得られる変形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \leftarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ \mathcal{B}_R & & \end{array}$$

について, ある $t \in \mathcal{B}_R$ のファイバーの開部分 $\mathcal{S}_t - \mathcal{D}_t$ 上に nodal curve C が存在するとき, 次を満たす t のザリスキ開近傍 U と, U 上の $\mathbf{P}^1$ -束 $\mathcal{C} \rightarrow U$ が存在する.

1. 次の図式が可換であるような包含写像 $\iota: \mathcal{C} \rightarrow S - D$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \hookrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\iota} & S - D|_U \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow \pi & \\ t & \in & U & & \end{array}$$

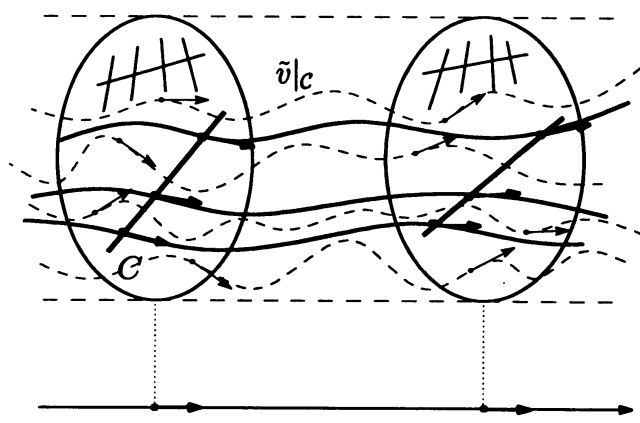
2. 一意的なベクトル場 $\tilde{v} \in \Gamma(S, \Theta(-\log \mathcal{D}) \otimes \mathcal{O}_S(\mathcal{D}))$ は

$$\tilde{v}|_{\mathcal{C}} \in H^0(\mathcal{C}, \Theta_{\mathcal{C}})$$

すなわち,

$$\tilde{v} \cdot \mathcal{I}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{C}}$$

を満たす. ここで, $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ のイデアル層.



定義 2.1 一意なベクトル場 $\tilde{v}$ の $\mathcal{C}$ への制限 $\tilde{v}|_{\mathcal{C}}$ によって定義される微分方程式の解を $\tilde{v}$ によって定義されるパnulベ系のリッカチ解と呼ぶ.

したがって,

$\begin{array}{ccc} \{\text{パnulベ系の局所解}\} & \iff & S - D \\ \cup & & \cup \\ \{\text{リッカチ解}\} & \iff & \bigcup_{i \in \Lambda} C_i : \text{nodal curves の和} \end{array}$
--

ということなので, 以下, 岡本-パnulベ対上の nodal curve について考察する.

3 nodal curves の分類

まず, 岡本-パンルベ対上の nodal curve の分類あたえる.

定理 3.1 ([Sa-Te],[T]) 岡本-パンルベ対 (S, Y) に対し, $S - D$ 上の nodal curves は, それらの配置により, 以下で分類される. また, 各タイプについて, その配置の nodal curves を含む岡本-パンルベ対は存在する.

$R(Y)$	$S - Y_{red}$ 上の nodal curve の配置
$\tilde{D}_4$	$D_4, (A_1, A_1, A_1, A_1), A_3, (A_1, A_1, A_1), A_2, (A_1, A_1), A_1$
$\tilde{D}_5$	$A_3, A_2, (A_1, A_1), A_1$
$\tilde{D}_6$	$(A_1, A_1), A_1$
$\tilde{D}_7$	none
$\tilde{D}_8$	none
$\tilde{E}_6$	A_2, A_1
$\tilde{E}_7$	A_1
$\tilde{E}_8$	none

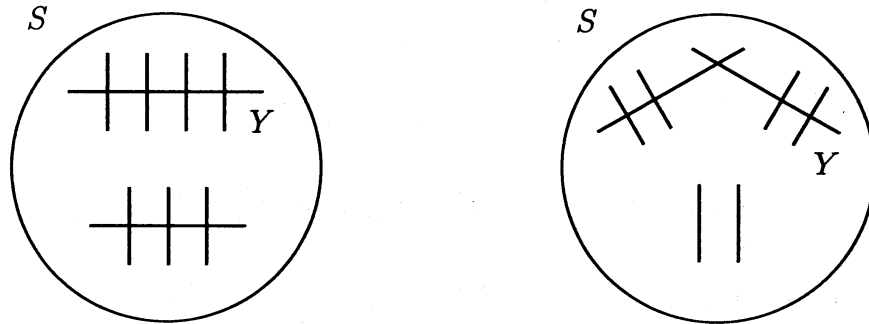


図 1: "タイプ $R = \tilde{D}_4$ で nodal curves の配置 D_4 ", "タイプ $R = \tilde{D}_6$ で nodal curves の配置 (A_1, A_1) " の例

分類の証明のあらすじについては以下のとおり. ここでは, nodal curves を格子 $H^2(S, \mathbf{Z})$ (非退化対称双一次形式は因子の交点形式 $\times (-1)$) の元と考える. ちなみに, 今の場合, $H^2(S, \mathbf{Z})$ の階数は 10, signature は $(1, 9)$ である. ここで, 次のような $H^2(S, \mathbf{Z})$ の部分格子

$$T := \langle Y_i | 1 \leq i \leq r-1 \rangle_{\mathbf{Z}} \oplus \langle C_j \subset S - D | \text{nodal curve} \rangle_{\mathbf{Z}} \subset H^2(S, \mathbf{Z})$$

を考える. Y_i の番号付けで, r 番目は, 重複度 $m_r = 1$ の既約成分とする. 今扱っている岡本-パンルベ対では, 各 Y_i も nodal curve であることに注意. また, 一方, このとき

$$(\langle Y \rangle_{\mathbf{Z}})^{\perp} \text{ in } H^2(S, \mathbf{Z}) = E_8^- \oplus \mathbf{Z}Y$$

であり, さらに, 「 T は, この E_8 の部分格子である」, 「 $Y_i C_j$ 達はいうことが分かる. したがって, あとは, E_8 格子の部分格子の分類本-パンルベ対の型を決めると決まる部分格子 $\langle Y_i | 1 \leq i \leq r-1 \rangle'$ と子を見つけてやれば, $\langle C_j \subset S-D | \text{nodal curve} \rangle$ の型, すなわち, nc 分かる. 存在については他の議論が必要だが, ここでは触れない.

この定理の応用として次が分かる.

● $\tilde{D}_7$ タイプのパンルベ方程式の特殊解のこと:

上の分類表から, $\tilde{D}_7$ の場合には, $S-D$ は nodal curve を含む (別の議論により, $S-D$ 上のすべての既約曲線の自己交点数とが分かる. したがって, 障害は位相的である.) これは, $\tilde{D}_7$ パラメータを一次元分含んでいるにもかかわらず, リッカチ解が意味している.

● 局所コホモロジーのこと:

1 節で, 「コホモロジー $H^0(S, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D)$ が時間パラ特徴付けている」ということを述べたけれど, 実は, 次の図式コホモロジーの完全列によって, 「局所コホモロジー $H_D^1(S, \Theta_S(-\log D))$ の方程式の時間パラメータの方向を特徴付けている」と理解する [STT]).

$$\begin{array}{ccccc}
 T_{\alpha,t}(\{\alpha\} \times \mathcal{B}_R) & \hookrightarrow & T_{\alpha,t}(\mathcal{M}_R \times \mathcal{B}_R) & & \\
 \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \\
 0 \rightarrow H^0(S, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) & \hookrightarrow & H^1(S, \Theta_S(-\log D)) & \xrightarrow{\phi} & H^1(S, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D) \\
 \downarrow & & \parallel & & \\
 0 \rightarrow H_D^1(\Theta_S(-\log D)) & \hookrightarrow & H^1(S, \Theta_S(-\log D)) & \xrightarrow{\text{res}} & H^1(S, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D)
 \end{array}$$

そこで, 先の nodal curves の存在を用いると, generic な (S, Y) の局所コホモロジー $H_D^1(S, \Theta_S(-\log D)) \subset H^0(S, \Theta_S(-\log D) \otimes N_D)$ であることを示すことができる ([Sa-Te], [T] 参照).

● 岡本-パンルベ対の2重被覆のこと:

岡本-パンルベ対の2重被覆を分類する際に, nodal curves の分話題に関しては, この講究録の「岡本-パンルベ対の2重被覆 (野, 寺島) を参照).

² このことは, この講究録の大山氏の結果と対応している

4 nodal curves, ルート系, ベックルト変換

以下, 9月の数理研の研究集会で触れた, nodal curves に関連する話題について述べる. これに関しても, 代数幾何の言葉で書けるはずだと思われるけれど, 理論の方は今後の課題である.

4.1 $\tilde{E}_6$ タイプの場合

ここでは, $\tilde{E}_6$ タイプの岡本-パンルベ対 (P_{IV}) を例に話を進める. まず, 岡本-パンルベ対の族を用意する. 2節では, 岡本-パンルベ対の (大域的な) 半普遍族 (2) の底空間を ($\alpha \in \mathcal{M}_R$ をひとつ決めて) $\mathcal{B}_R$ に制限して考えたが, ここでは, 逆に, ($t \in \mathcal{B}_R$ をひとつ決めて) パンルベ方程式のパラメータの空間 $\mathcal{M}_R$ に制限して考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \leftarrow & \mathcal{D} \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ \mathcal{M}_{\tilde{E}_6} & & \end{array} \quad (11)$$

ここでは, $\mathcal{S}-\mathcal{D}$ の座標系として, 高野氏らによる次のような座標系 (cf. [MMT]) を用いる (今回の話では, $\mathcal{S}-\mathcal{D}$ の座標系だけで十分で, $\mathcal{S}$ 全体の座標系は必要ない). $\mathcal{S}-\mathcal{D}$ の開被覆は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}-\mathcal{D} &= \bigcup_{i=0}^3 (\tilde{U}_i = \text{Spec} \mathbb{C}[x_i, y_i, \kappa_0, \kappa_\infty] \simeq \mathbb{C}^4) \\ &\downarrow \\ \mathcal{M}_{\tilde{E}_6} &= \text{Spec} \mathbb{C}[\kappa_0, \kappa_\infty] \simeq \mathbb{C}^2, \end{aligned}$$

各点 $(\kappa_0, \kappa_\infty) \in \mathcal{M}_{\tilde{E}_6}$ のファイバー $(\mathcal{S}-\mathcal{D})_{(\kappa_0, \kappa_\infty)}$ の開被覆は

$$(\mathcal{S}-\mathcal{D})_{(\kappa_0, \kappa_\infty)} = \bigcup_{i=0}^3 (U_i = \text{Spec} \mathbb{C}[x_i, y_i])$$

であり, 座標変換は,

$$\begin{aligned} x_0 &= y_1(\kappa_0 - x_1 y_1), & y_0 &= \frac{1}{y_1}, \\ x_1 &= y_0(\kappa_0 - x_0 y_0), & y_1 &= \frac{1}{y_0}, \\ x_0 &= \frac{1}{x_2}, & y_0 &= x_2(\kappa_\infty - x_2 y_2), \\ x_2 &= \frac{1}{x_0}, & y_2 &= x_0(\kappa_\infty - x_0 y_0), \\ x_2 &= x_3, & y_2 &= -\frac{1/2}{x_3^3} - \frac{t}{x_3^2} + \frac{2\kappa_\infty - \kappa_0 + 1}{x_3} + y_3, \\ x_3 &= x_2, & y_3 &= \frac{1/2}{x_2^3} + \frac{t}{x_2^2} - \frac{2\kappa_\infty - \kappa_0 + 1}{x_2} + y_2. \end{aligned}$$

で与えられる.

また, ファイバー $(S - \mathcal{D})_{(\kappa_0, \kappa_\infty)}$ に対応するパンルベ系は, U_0 上

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = 4x_0y_0 - x_0^2 - 2tx_0 - 2\kappa_0 \\ \frac{dy_0}{dt} = -2y_0^2 + 2(x_0 + t)y_0 - \kappa_\infty \end{cases} \quad (12)$$

で与えられる.

まず, 座標変換を眺めるだけで簡単に見つかる nodal curves を挙げる.

$\kappa_0 = 0$ すなわち, $(0, \kappa_\infty) \in \mathcal{M}_{\tilde{E}_6}$ のファイバー $(S - \mathcal{D})_{(0, \kappa_\infty)}$ では, $U_0 \cap U_1$ 上の座標変換は

$$x_0 = -x_1y_1^2, \quad y_0 = \frac{1}{y_1}$$

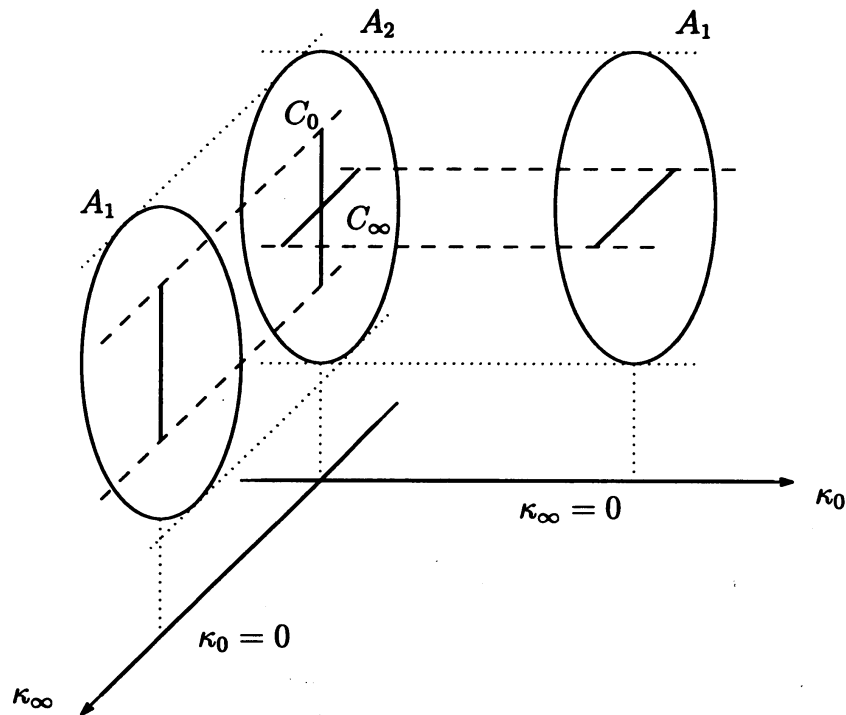
で与えられる. したがって, ここでは, $\{x_0 = 0\} \subset U_0$ と $\{x_1 = 0\} \subset U_1$ は張り合って, y_0 と y_1 を座標とする $(S - \mathcal{D})_{(0, \kappa_\infty)}$ 上の $\mathbf{P}^1$ を定める, つまり,

$$\mathbf{P}^1 \simeq C_0 := \{x_0 = x_1 = 0\} \subset (S - \mathcal{D})_{(0, \kappa_\infty)}.$$

また, 同様にして $\kappa_\infty = 0$ のとき,

$$\mathbf{P}^1 \simeq C_\infty := \{y_0 = y_2 = 0\} \subset (S - \mathcal{D})_{(\kappa_0, 0)}$$

を得る.



したがって, $(0, 0) \in \mathcal{M}_{\tilde{E}_6}$ のファイバーの岡本パンルベ対 $(\mathcal{S}_{(0,0)}, \mathcal{Y}_{(0,0)})$ の $(S - \mathcal{D})_{(0,0)}$ 上には nodal curves C_0, C_∞ が A_2 の配置で入っていることが分かる. (分類から, これ以上は入らないことも分かる.)

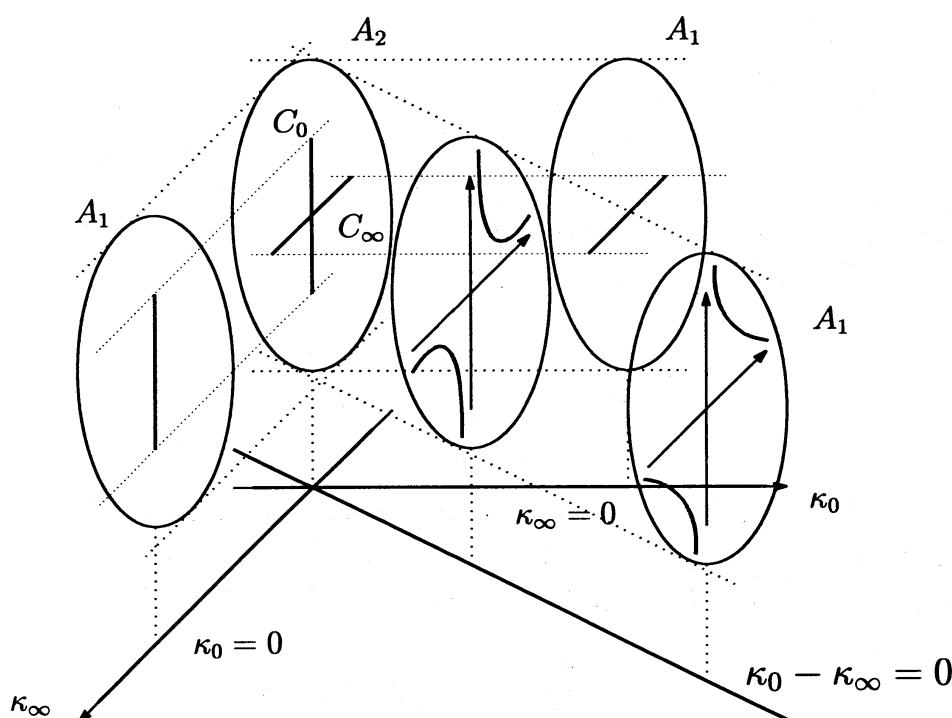
ここで, C_0, C_∞ が生成する, $H^2(\mathcal{S}_{(0,0)}, \mathbf{Z})$ の A_2 部分格子

$$\langle C_0, C_\infty \rangle_{\mathbf{Z}} \subset H^2(\mathcal{S}_{(0,0)}, \mathbf{Z})$$

を考えてみる. 先の話は「単純ルートに相当する, C_0, C_∞ には, それぞれ, $\mathcal{M}_{\tilde{E}_6}$ 上の超平面 $\{\kappa_0 = 0\}, \{\kappa_\infty = 0\}$ が対応する」というふうに見ることができる.

そこで, 「他のルート $C_0 + C_\infty$ にも, 対応する超平面があるのではないか?」という問題が考えられる. この場合, 答えは目の子で見つけることができ, 次の表で与えられる.

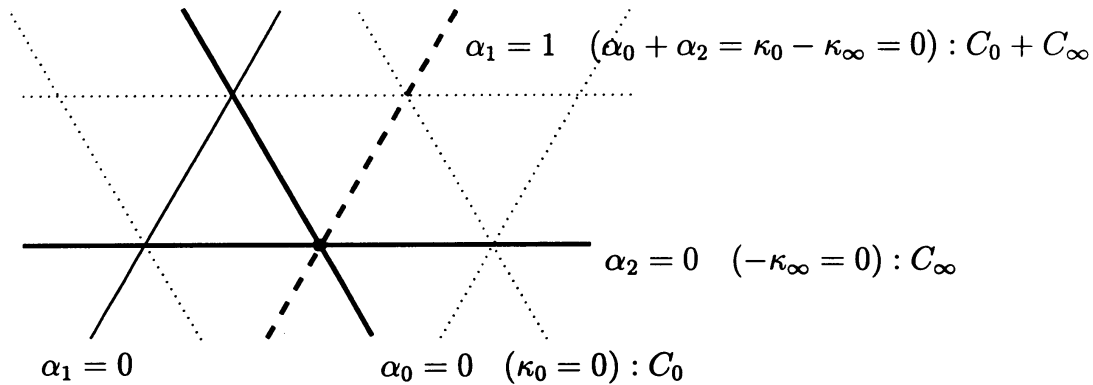
ルート	超平面	超平面の各点のファイバー上の nodal curve の U_0 上での定義式
C_0	$\kappa_0 = 0$	$x_0 = 0$
C_∞	$-\kappa_\infty = 0$	$y_0 = 0$
$C_0 + C_\infty$	$\kappa_0 - \kappa_\infty = 0$	$x_0 y_0 - \kappa_0 = 0$



ここで, ルートと超平面が対応するというのは, 「超平面 $\{\kappa_0 - \kappa_\infty = 0\}$ 上の原点でない点のファイバーには, $x_0 y_0 - \kappa_0 = 0$ で定義される (既約な) nodal curve が入っているのだが, それを $(\kappa_0, \kappa_\infty) = (0, 0)$ に向かって, 極限をとると, $x_0 y_0 = 0$ で定義される可約な曲線 $C_0 + C_\infty$ になる」という意味.

実は, これらの超平面は, この点を通る, (ベックルント変換からくる) アファインワイル群の鏡映面にほかならない. 底空間の座標を取り替えて, 「野海, 山田両氏による P_{IV} の対称形式におけるパラメータ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ($\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$) を座標とする三角座標系³」で見えてみると, 次の図のようになっている.

³ 野海先生の本「パンルヴェ方程式-対称性からの入門」(朝倉書店)などを参照



ちなみに、単純ルート C_0, C_∞ に対応する超平面 $\{\kappa_0 = 0\}, \{\kappa_\infty = 0\}$ は、ワイル群の生成元に対応する3個の鏡映面 $\{\alpha_0 = 0\}, \{\alpha_1 = 0\}, \{\alpha_2 = 0\}$ のうちの2個に対応していることが分かる。

ここまでは初期値空間上の nodal curves の視点で説明してきたが、2節で述べた「nodal curves とパンルベ系のリッカチ解の対応」で、方程式の視点から再考してみる。

- 方程式のパラメータが $\kappa_0 = 0$ を満たすとき:

パンルベ系 (12) は、 U_0 上、

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = 4x_0y_0 - x_0^2 - 2tx_0 \\ \frac{dy_0}{dt} = -2y_0^2 + 2(x_0 + t)y_0 - \kappa_\infty \end{cases} \quad (13)$$

で与えられる。一方このとき、nodal curve は $x_0 = 0$ で定義されるのであるが、実際、 $x_0(t) \equiv 0$ は、(13) の上側の方程式を満たしており、また、このとき $y_0(t)$ は (13) の下側の方程式に $x_0(t) \equiv 0$ を代入して得られるリッカチ方程式

$$\frac{dy_0}{dt} = -2y_0^2 + 2ty_0 - \kappa_\infty \quad (14)$$

を満たす。

つまり、 $\kappa_0 = 0$ のとき、パンルベ系 (12) は、 U_0 上 $x_0 = 0$ で定義される曲線（これは $(S-D)_{(0, \kappa_\infty)}$ 上の nodal curve C_0 を定める）の上で、リッカチ方程式 (14) に還元されるのである。（別の言い方をすると、「 $\kappa_0 = 0$ に沿う不変因子は x_0 である」ということ。）

- 方程式のパラメータが $\kappa_\infty = 0$ を満たすとき:

先の場合と同様にして、 $\{y_0 = 0\} = C_\infty \cap U_0$ 上で、リッカチ方程式

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_0^2 - 2tx_0 - 2\kappa_0 \quad (15)$$

に還元される。

上の2つはこれまでによく知られている場合である。パラメータが超平面 $\{\kappa_0 - \kappa_\infty = 0\}$ 上にある場合には、上の2つの場合と違って「nodal curves の定義式 $x_0 y_0 - \kappa_0 = 0$ は方程式のパラメータを含んでおり、極限 $(\kappa_0, \kappa_\infty) \rightarrow (0, 0)$ を取ると $x_0 y_0 = 0$ で定義される曲線になる、すなわち C_0 と C_∞ に分解する」のであった。これを、方程式のレベルで見ると次のようになる。

• 方程式のパラメータが $\kappa_0 - \kappa_\infty = 0$ を満たすとき:

$x_0(t), y_0(t)$ をパンルベ系 (12) の解とする。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_0 y_0 - \kappa_0) &= \frac{dx_0}{dt} \frac{\partial}{\partial x_0}(x_0 y_0 - \kappa_0) + \frac{dy_0}{dt} \frac{\partial}{\partial y_0}(x_0 y_0 - \kappa_0) \\ &= (4x_0 y_0 - x_0^2 - 2tx_0 - 2\kappa_0)y_0 + (-2y_0^2 + 2(x_0 + t)y_0 - \kappa_\infty)x_0 \\ &= (x_0 y_0 - \kappa_0)(2y_0 + x_0). \end{aligned}$$

ただし、最後の等式は $\kappa_0 - \kappa_\infty = 0$ を使った。したがって、初期値が $x_0(t_0)y_0(t_0) - \kappa_0 = 0$ を満たす解 $x_0(t), y_0(t)$ は、 $x_0(t)y_0(t) - \kappa_0 \equiv 0$ を満たす。すなわち、 $x_0 y_0 - \kappa_0$ が $\kappa_0 - \kappa_\infty = 0$ に沿う不変因子である。パンルベ系 (12) は $x_0 y_0 - \kappa_0 = 0$ で定義される曲線上で

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_0^2 - 2tx_0 + 2\kappa_0, \quad (16)$$

$$\frac{dy_0}{dt} = -2y_0^2 + 2ty_0 + \kappa_0, \quad (17)$$

となり、この曲線上のパンルベ系の解は、これらのリッカチ方程式の解で記述されるのである。

ここまでは、パラメータ $\kappa_0 = \kappa_\infty$ の値には依らない計算であった。では、上で見たような、パラメータがゼロあるときとそうでないときの違いは、どこに現れているのだろうか？

パラメータ $\kappa_0 = \kappa_\infty$ がゼロでないときは、 $\text{Spec}[x_0, 1/x_0] \simeq \mathbb{C}^\times$ (または $\text{Spec}[y_0, 1/y_0]$) を既約曲線 $\{x_0 y_0 - \kappa_0 = 0\}$ の座標として取ることができる。またこの曲線上では、パンルベ系の解は座標 x_0 (または y_0) の満たすリッカチ方程式 (16) (または (17)) によって書かれるのである。したがって、 x_0 と y_0 の座標変換 $x_0 y_0 - \kappa_0 = 0$ によって、リッカチ方程式 (16) と (17) は同値になる。実際、これは簡単な計算によって確かめられる。

一方、パラメータ $\kappa_0 = \kappa_\infty = 0$ のとき、方程式 (16) と (17) は、

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_0^2 - 2tx_0, \quad (18)$$

$$\frac{dy_0}{dt} = -2y_0^2 + 2ty_0, \quad (19)$$

となる。一方、曲線 $C = \{x_0 y_0 = 0\} = C_0 + C_\infty$ は可約である。この時、 $x_0(t) \equiv 0$ は方程式 (18) の解であるから、曲線 C の既約成分 $C_0 = \{x_0 = 0\}$ 上のパンルベ方程式の解は、 C_0 の座標 y_0 に関するリッカチ方程式 (18) の解で記述される。同様に、 $y_0(t) \equiv 0$ は方程式 (19) の解であるから、曲線 C の既約成分 $C_\infty = \{y_0 = 0\}$ 上のパンルベ方程式の解は、 C_∞ の座標 x_0 に関するリッカチ方程式 (18) の解で記述される。

したがって方程式のレベルでは、「パラメータ $\kappa_0 = \kappa_\infty$ がゼロでないときは、曲線 $\{x_0y_0 - \kappa_0 = 0\}$ 上で”方程式 (16) と (17) は同値なリッカチ方程式を定める”のであるが、パラメータがゼロになった途端に、”方程式 (18) と (19) は独立”になる。」ということがおこっているのである。このことは、始めの nodal curves による幾何的な考察からは明らかだけれど、方程式の情報だけからだとそれほど自明なことではないと思われる。

4.2 他のタイプの場合

$\tilde{D}_4$ タイプと $\tilde{D}_5$ タイプの岡本-パンルベ対の場合にも同様の現象が起こる。（ $\tilde{D}_6$ のときは、nodal curve が2本入りうるが、それらは交わらないので、上のような現象は起こらない。）実際、[NTY] で与えられる座標系とベックルント変換の表を用いて、鏡映面 $\alpha_i = 0$ とその上の nodal curve をベックルント変換していく事によって、単純でないルートに対応する鏡映面と nodal curve を見つけることができる。（nodal curve の定義式をベックルント変換でうつしたものがまた nodal curve を定義するということは、Theorem 1.([NTY]) によって保証される。）計算結果は次のとおり。ただし、ここでは、上の例と同様に、[MMT], [Shi-Ta] による座標系を用いた。

• $\tilde{D}_4$ タイプ (P_{VI}) のときの $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (0, 0, 0, 1)$ のファイバーに対する、 D_4 lattice $\langle C_0, C_1, C_t, C_\epsilon \rangle$ の場合。

ルート	超平面	nodal curve
C_0	$\kappa_0 = 0$	$x_0 = 0$
C_1	$\kappa_1 = 0$	$x_0 - 1 = 0$
C_t	$\kappa_t = 0$	$x_0 - t = 0$
C_ϵ	$a = 0$	$y_0 = 0$
$C_0 + C_\epsilon$	$\kappa_0 + a = 0$	$x_0y_0 - \kappa_0 = 0$
$C_1 + C_\epsilon$	$\kappa_1 + a = 0$	$(x_0 - 1)y_0 - \kappa_1 = 0$
$C_t + C_\epsilon$	$\kappa_t + a = 0$	$(x_0 - t)y_0 - \kappa_t = 0$
$C_0 + C_1 + C_\epsilon$	$\kappa_0 + \kappa_1 + a = 0$	$x_0(x_0 - 1)y_0 - \kappa_0(x_0 - 1) - \kappa_1x_0 = 0$
$C_0 + C_t + C_\epsilon$	$\kappa_0 + \kappa_t + a = 0$	$x_0(x_0 - t)y_0 - \kappa_0(x_0 - t) - \kappa_tx_0 = 0$
$C_1 + C_t + C_\epsilon$	$\kappa_1 + \kappa_t + a = 0$	$(x_0 - 1)(x_0 - t)y_0 - \kappa_1(x_0 - t) - \kappa_t(x_0 - 1) = 0$
$C_0 + C_1 + C_t + C_\epsilon$	$\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t + a = 0$	$x_0(x_0 - 1)(x_0 - t)y_0 - \kappa_0(x_0 - 1)(x_0 - t) - \kappa_1x_0(x_0 - t) - \kappa_t(x_0 - 1)x_0 = 0$
$C_0 + C_1 + C_t + 2C_\epsilon$	$\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t + 2a = 0$	(*)

$$(*) : x_0(x_0 - 1)(x_0 - t)y_0^2 - \{\kappa_0(x_0 - 1)(x_0 - t) + \kappa_1x_0(x_0 - t) + \kappa_tx_0(x_0 - 1)\}y_0 + \frac{1}{4}(\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t)\{\kappa_0(x_0 - t - 1) + \kappa_1(x_0 - t + 1) + \kappa_t(x_0 + t - 1)\} = 0$$

ただし $a = \frac{1}{2}(1 - \kappa_0 - \kappa_1 - \kappa_t - \kappa_\infty)$.

• $\tilde{D}_5$ タイプ (P_V) のときの $(\kappa_0, \kappa_t, \kappa_\infty) = (0, -1, 1)$ のファイバーに対する, A_3 lattice $\langle C_0, C_\epsilon, C_a \rangle$ の場合.

ルート	超平面	nodal curve
C_0	$\kappa_0 = 0$	$x_0 = 0$
C_ϵ	$\frac{1}{2}(-\kappa_0 - \kappa_t - \kappa_\infty) = 0$	$y_0 = 0$
C_a	$\frac{1}{2}(2 - \kappa_0 + \kappa_t - \kappa_\infty) = 0$	$(x_0 - 1)^2 y_0 - (\kappa_t + 1)(x_0 - 1) - t = 0$
$C_0 + C_\epsilon$	$\kappa_0 + \frac{1}{2}(-\kappa_0 - \kappa_t - \kappa_\infty)$ $= \frac{1}{2}(\kappa_0 - \kappa_t - \kappa_\infty) = 0$	$x_0 y_0 - \kappa_0 = 0$
$C_0 + C_a$	$\kappa_0 + \frac{1}{2}(2 - \kappa_0 + \kappa_t - \kappa_\infty)$ $= \frac{1}{2}(2 + \kappa_0 + \kappa_t - \kappa_\infty) = 0$	$(x_0 y_0 - \kappa_0)(x_0 - 1)^2$ $-(\kappa_t + 1)x_0(x_0 - 1) - t x_0 = 0$
$C_0 + C_\epsilon + C_a$	$\kappa_0 + \frac{1}{2}(-\kappa_0 - \kappa_t - \kappa_\infty)$ $+ \frac{1}{2}(2 - \kappa_0 + \kappa_t - \kappa_\infty)$ $= 1 - \kappa_\infty = 0$	(**)

$$(**) : (x_0 y_0 - \kappa_0) \{ (x_0 - 1)^2 y_0 - (\kappa_t + \kappa_\infty)(x_0 - 1) + \kappa_\infty - 1 - t \} \\ + \frac{1}{4}(\kappa_0 - \kappa_t - \kappa_\infty)^2 x_0 - (\kappa_\infty - 1)y_0 - \frac{1}{2}(\kappa_0 - \kappa_t - \kappa_\infty)(\kappa_0 - \kappa_\infty + 1 + t) = 0$$

参考文献

- [NTY] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems*, preprint.
- [MMT] T. Matano, A. Matsumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems, II*, J. Math. Soc. Japan, **51**, No.4, 1999, 843–866.
- [STT] M.-H. Saito, T. Takebe & H. Terajima, *Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*, math.AG/0006026 accepted for Journal of Algebraic Geometry.
- [Sa-Te] M.-H. Saito and H. Terajima, *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations*, in preparation.
- [Shi-Ta] T. Shioda and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I*, Funkcial. Ekvac., **40**, (1997), 271–291.
- [T] H. Terajima, *Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations*, Master's thesis, Kobe, 2001.