

小平次元の加法公式について

名大理 中村 郁

以下扱うのは コンパクトな複素多様体です。コンパクトな複素多様体 X の小平次元は次の様に定義されます。 X の canonical line bundle K (X を複素 n 次元とすれば 正則 n 型式の芽の層といってもよい) をとり $P_m = \dim H^0(X, K^{\otimes m})$ とします。任意の m に対して $P_m = 0$ ならば $K(X) = -\infty$, ある m_0 に対して $P_{m_0} = 1$ で 任意の m に対して $P_m \leq 1$ ならば $K(X) = 0$ とします。次に $\exists m_0$ に対して $P_{m_0} \geq 2$ となる場合は

定理(飯高) $\exists \kappa > 0$ (integer), $\exists \alpha, \beta > 0$, 十分大な m ,
s.t. $\alpha m^\kappa \geq P_{mm_0} \geq \beta m^\kappa$ for $\forall m > 0$

によって $K(X) = \kappa$ とします。この κ は幾何学的には次のような意味をもちます。 $H^0(X, O(K^{\otimes m})) = \{g_0, \dots, g_{N+1}\}$ (基底) $N+1 = P_m$
基底を一つ定めるとに 有理写像

$\Phi_{mK}: X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ (N 次元複素射影空間)

が定まります $x \mapsto (g_0(x), \dots, g_{N+1}(x)) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ が well-defined. このとき $\kappa = \max_m \dim \Phi_{mK}(X)$ となります

この K に関しては 飯高さんの基本的結果がいくつかありますが 文献[1] を参照して頂くことにして ここでは省きます。 P_n や K は2次元(複素)の場合 非分類上非常に重要な役割を果たしてきました。(実際、2次元の分類は P_n でなされるといってもよい位) 高次元の分類理論(に近い理論)を進めるにあたって 2次元までの結果を拡張してみよう というのが基本的立場です。ここでは 飯高さんの問題(それはしばしば否定的に解かれているが) で比較的肯定的に解かれた例を述べます。(X/F, Bはコンパクト複素多様体)

問題 X を底を B , ファイバーを F とする解析的ファイバーバンドルとする。そのとき $K(X) = K(B) + K(F)$ か?

答は F が代数多様体なら正しく 一般の場合には反例がある(反例は飯高さんによる)

詳しくは

I. Nakamura and K. Ueno An addition formula for Kodaira dimensions of algebraic fiber bundle (to appear in J. Math. Soc. Japan).

を参照して下さい。

※ V (コンパクト複素多様体) の双有理自己同型写像 g は 自然に $g^*: H^0(V \otimes (K_V^{\otimes m})) \rightarrow H^0(V \otimes (K_V^{\otimes m}))$ を引き起こします
(同型写像)

即ち 各 m に対して 準同型写像

$$p_m: \text{Bim}(V) \longrightarrow GL(H^0(V \otimes (K^{\otimes m})))$$

が定義されます.

定理 1 V を代数多様体とすれば 任意の $m, g \in \text{Bim} V$ に対

して $p_m(g)$ は位数有限

ところで群論の結果を

定理 (Schur) $GL(N, \mathbb{C})$ の部分群が 有限生成かつ任意の元が位数有限ならば 実はその部分群は有限群.

から

系 X を F をファイバーとするファイバーバンドル (底 B : コンパクト) とする. G をこのファイバーバンドルの構造群 (有限生成と仮定してよい) とする時 任意の m に対して $p_m(G)$ は有限この系により

定理 2. X, B, F を前の通りとすれば

$$K(X) = K(B) + K(F) \quad \text{が成り立つ.}$$

が証明されます.

定理 1 の証明のために

補題 1 $p_m(g)$ の固有値の絶対値は 1 ($\checkmark$ 代数的と仮定しない)
($\times$ ではない)

補題 2 $p_m(g)$ は対角化可能 ($\checkmark$)

補題 3 $p_m(g)$ の固有値は代数的整数 ($\checkmark$)

補題 4 X 代数的ならば $p_m(g)$ の固有値は 1 の m 乗根

$\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ 正則かつ全射写像 } とがあって
 $\tilde{V}$ の双有理同型写像 $\tilde{q}$

$$\begin{cases} \tilde{q}^* \omega = \beta \omega, \beta^m = \alpha \\ \omega^{\otimes m} = \varphi \end{cases}$$

とできる』を証明します。⁽²⁴²¹⁾ V に対する $m=1$ の場合と同様
 にして β は (従って α も) 代数的整数が導かれる。詳しいこ
 とは省きますが、 $\tilde{V}$ としては canonical line bundle の全空間 K
 に φ の零点として定義される部分空間の非特異モデルを
 とり、 $\tilde{q}$ は q により K に自然に引き起こされる変換をとり
 ます。^(0制限)

補題 4 の証明) 補題 1 から補題³までは V の代数的なこ
 とを全く用いていませんがここでは用います。 V が $\mathbb{P}_\mathbb{C}^N$ に
 埋蔵されている場合に証明すればよいことが知られていま
 す (Moisèzson の定理)。証明には 整数論の良く知られた補題(定理?)

“ α : 代数的整数とする。 α の $\mathbb{Q}$ 上の任意の共役の絶対値が
 1 ならば α は 1 のべき根”

従って $\rho_m(q)$ の 1 つの固有値 α に対して その共役 α^σ に対
 して 適当に 代数多様体 V^σ とその双有理写像 q^σ 及び
 $H^0(V^\sigma, \mathcal{O}(K_{V^\sigma}^{\otimes m}))$ の元 φ^σ で $(q^\sigma)^* \varphi^\sigma = \alpha^\sigma \varphi^\sigma$ となるもの
 の存在を示せば すでに終した補題 1 より $|\alpha| = 1$ となって
 証明が完了します。そのために V の $\mathbb{P}_\mathbb{C}^N$ での定義式を

$f_1 = \dots = f_e = 0$, とします。 f_i は多項式。

従って 補題2と補題4により $\rho_m(g)$ は有限位数が結論されます。また ここでは不要ですが 補題1と2を併せると $Bim V$ の 連結成分 $(Bim V)^0$ (単位元の) に対して $\rho_m(Bim(V)^0) = 1$ となることもわかります。

補題1の証明) $\varphi \in H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ に対して ノルム $\|\cdot\|$ を次の様に定義する。 $\varphi = \{ \varphi_j (dz_1^1 \wedge \cdots \wedge dz_j^n)^{\otimes m} \}$ とすると

$$\|\varphi\| = (\sqrt{-1})^{-n^2} \int_V |\varphi_j|^2 dz_1^1 \wedge \cdots \wedge dz_j^n \wedge \bar{dz}_j^1 \wedge \cdots \wedge \bar{dz}_j^n$$

明らかに $\|g^* \varphi\| = \|\varphi\|$. $\rho_m(g)$ の固有値の一つを α , α に対応する固有ベクトルを $\varphi (\neq 0)$ とすれば

$$\|g^* \varphi\| = |\alpha|^{\frac{1}{m}} \|\varphi\|, \quad \|\varphi\| > 0 \quad \text{従って} \quad |\alpha| = 1$$

補題2の証明) 上と同じノルムを使います。今 $\rho_m(g)$ が対角化可能でないとすると $\varphi_1, \varphi_2 \in H^0(V, \mathcal{O}(K_V^{\otimes m}))$ $\varphi_i \neq 0$ で $g^* \varphi_1 = \alpha \varphi_1 + \varphi_2$, $g^* \varphi_2 = \alpha \varphi_2$ となるものが存在します。 $\|\varphi_1\| = \|g^* \varphi_1\|$. (任意の ℓ に対して)

$$(g^\ell)^* \varphi_1 = \alpha^\ell \varphi_1 + \ell \alpha^{\ell-1} \varphi_2 \dots \quad \text{右辺は } \ell \text{ を大きくすると}$$

無限大になる(矛盾)。

補題3の証明) $m=1$ の時 $H^0(V, \mathcal{O}(K_V)) \hookrightarrow H^0(V, \mathbb{C})$ と見なせる。また $H^0(V, \mathbb{C}) = H^0(V, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ で g^* の固有値が代数的整数となることは明らか。 $m > 1$ に対しては $\rho_m(g)$ の固有ベクトル φ (固有値 α) に対して $\tilde{V}$ (コンパクト複素多様体) と $\tilde{V}$ 上の正則 n 形式の

α をその共役 α^σ に移すような $\mathbb{Q}$ 上の体 $\mathbb{Q}(\alpha)$ の Galois closure の自己同型 σ の $\mathbb{C}$ までの拡張を再び σ で表わし、 $f_1^\sigma = f_2^\sigma = 0$ で定義される代数的集合を V^σ とすれば、容易に g^σ, q^σ などが構成されて、必要な条件を満たすことがわかります (証明終)

文献

[1] 飯高 茂 代数多様体の種数と分類 数学 24 (1972)

14-27