

有限要素法による非線形解析の現状と課題

東京工業大学工学部 吉田 裕 (Yutaka Yoshida)

1. はじめに

計算機の性能が格段に進歩し、かつては限られた自由度の理想化された対象に限定されていた非線形解析が、現在では相当な規模の複雑な系にも適用できるようになり、非線形系の数値解析は確実に実用化の時代に入ったといえる。しかし、有限要素法による非線形解析に関しては、コンピュータのこと、アルゴリズムのこと、汎用ソフトのこと、モデル化のこと、応用技術のことなど、関連する領域はあまりにも広く、それぞれが深く、難しい多くの課題を抱えているのが実状である。

ここでは、有限要素法による非線形解析の現状がより正しく理解されることを意図して、非線形解析の数理に関わるいくつかの課題について、できる限り具体的なデータを添えて実証的に議論する。

2. 増分法における収束計算のアルゴリズムについて

有限要素法による正統的な非線形解析においては、増分形式で解を解き進めるのが普通であるが、収束計算に多くの時間が費やされることから、収束計算の効率化は重要な課題となる。有限要素法における1増分間の収束計算の過程は、要素ごとに幾何剛性マトリックスなどを評価し、これを重ね合わせて構造全体系の接線剛性マトリックスを構成する過程、とこれを解いて変位増分などを求める過程、を何度も繰り返すものである。接線剛性マトリックスを解く過程は、係数マトリックスを三角分解する過程、と前進後退代入を行って解を求める過程とから成る。中でも、接線剛性マトリックスを構成する過程とこれを三角分解する過程は、前進後退代入計算の過程に比べて、圧倒的に多くの計算時間を必要とするものである。

したがって、1増分間の収束計算の出発（初期）の段階で構成する接線剛性マトリックスを三角分解した結果を、収束計算が終了するまでそのまま用いる修正Newton-Raphson法、や接線剛性マトリックスを更新して解を求める過程をマトリックスの乗算と初期接線剛性マトリックスを三角分解した結果の前進後退代入計算によって実行できるようにしたBFGS法、の開発など収束計算の効率化の努力が積み上げられてきている。

構造解析に限定しても、非線形解析が対象とする問題は、非線形性の程度、極大点や分岐点、材料の非線形特性、接触などの境界非線形問題、など多様であり、収束計算法の得失は対象とするそれぞれの問題の特性に依存する。また、荷重制御、変位制御、弧長制御、など解法の違いや採用しているアルゴリズムの具体的な内容にも依存する。さらに、BFGS法のラインサーチなど、収束が困難な場合にこれを克服するために考案され、採り入れられている各種の技巧も重要な要因となる。したがって、収束計算法を相対的、客観的に評価することは非常に難しい。一方で、例えば修正Newton-Raphson法は1次の収束性しか保証されないために収束が非常に遅い、といった表面的な事実だけで評価がなされている一面がある。

2.1 収束計算の実相

ごく単純な構造系を対象とした大変形解析の例を示す。対象は、図-1に示すような2本の部材で構成される山型はりの頂点に鉛直荷重が作用する問題である。対称条件を満たして変形する場合の荷重と荷重作用点の鉛直変位関係を図-2に示す。

特定の荷重増分など諸条件のもとでの解析結果ではあるが、Newton-Raphson法、修正Newton-Raphson法、Crisfieldの加速法、BFGS法のそれぞれの収束計算法で収束に要した繰り返し計算回数を図中の()内に並記した。極大点近傍は収束が困難な領域であり、荷重増分を小さくして解き進めているが、例えば、6ステップ目においては同じ増分に対して収束に要した繰り返し計算回数がN-R法の5回に対してM-N-R法では、11回の計算を要している。この場合にCrisfieldの加速法では、5回で収束しており、加速法の意義は明らかである。

この部分の収束計算に要した計算時間（東京工業大学総合情報処理センターのETA-10による）をグラフにしたものが図-3である。N-R法では毎回接線剛性マトリックスをつくり直し、コレスキー分解を行っているために、2回目以降も1回目と同等の計算時間を要している。N-R法による収束計算1回に要した計算時間の内訳を図-4に示した。N-R法に対し、M-N-R法における収束計算の2回目以降は1回目で行ったコレスキー分解をそのまま使うことができるので、前進、後退代入計算だけで済み、M-N-R法での11回の収束計算に要する計算時間はN-R法の5回の約6割である。BFGS法では繰り返し計算が進むごとに要する乗算の回数が増えるので計算時間が少しずつ増えていくことになる。計算効率を収束に要する繰り返し計算回数だけで論ずることができないことは明らかである。

2.2 分岐点と収束性

分岐点を越えた後の挙動を連続して解析するためには、変位制御や弧長制御などの特別な対応策を講ずる必要がある。三角級数でその最大値がはりの厚さの1/100をとるような初期不整を予め導入し、非対称なモードに移行することを意図して行った、変位増分法による分岐点を越える解析結果を図-5に示す。特定の変位増分のもとでの結果ではあるが、図中に示した棒グラフは、各増分段階において、対象とした収束計算法のそれぞれが収束に

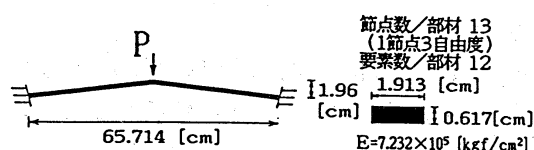


図-1 2本の部材で構成される山型はりの問題

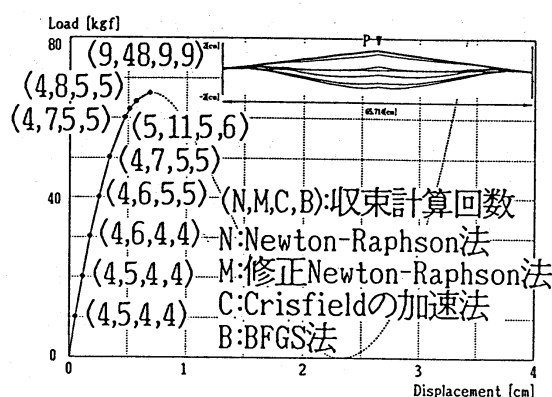


図-2 対称条件を満たして変形する場合の荷重-変位曲線と荷重増分法で収束計算に要した計算回数

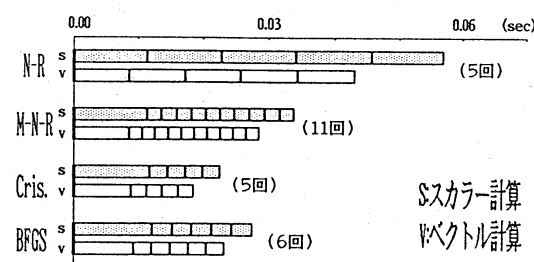


図-3 第6荷重増分の収束に要した計算回数と計算時間

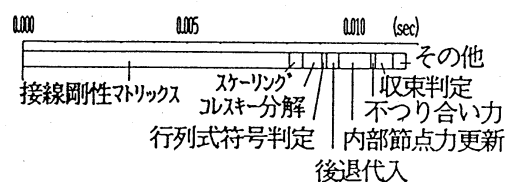


図-4 N-R法の収束計算1回に要した計算時間の内訳

要した計算回数と計算時間をグラフに示したものである。

分岐点まで2回の増分計算で進むような、相当大きな増分のもとでの解析であるが、第2増分と第3増分の間の第2増分点のごく近くに分岐点が存在する。何れの収束計算法を採った場合でも、分岐後の新たな変形モードへ移行する際の収束計算が非常に難しくなることが分かる。第2増分および第3増分の収束計算におけるBFGS法の第2回目以降の計算に、相当な計算時間を要している箇所が見られるが、これはラインサーチを伴う、収束させるための技巧に計算時間を要しているからである。収束させるために工夫された技巧を含めて、BFGS法の有効性が判断される。

ここで対象としているものは高々2本の部材で構成される非常に単純な構造であるが、このような簡単な問題でさえ、なかなか一筋縄では行かない。通常有限要素法で対象とするものは、ここで取り上げた問題に比べてはるかに複雑な問題である。汎用非線形解析コードが普及し、多くの研究者、技術者が表面的に与えられた、限られた情報を頼りに、非線形解析に苦勞を強いられている現状がある。

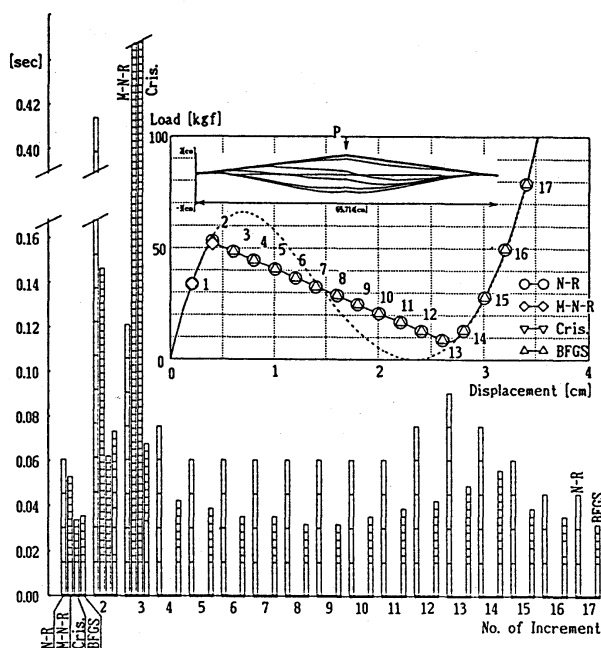


図-5 分岐点を越える解析に要した収束計算回数と計算時間

3. 有限要素解析における連立一次方程式の解法について

コンピュータの性能が向上すればする程解析対象モデルの精緻さに対する要求も高くなり、解析過程の効率化はなお重要な課題として残されている。非線形解析の場合も結局は連立一次方程式を繰り返し解くことに帰着するから、解析の要となるのは連立一次方程式の解法である。有限要素法で対象とすることになる係数行列は通常零要素が大部分を占める疎な行列であり、疎行列を対象としてできる限り少ない容量で、いかに大次元の方程式を、より速く解くことができるかが効率化の判断の鍵となる。

連立一次方程式の解法の算法のうち、共役勾配法（CG法）はマトリックスの乗算のみで解を求めることができるので、疎な大次元行列に対して、要する記憶容量の面で非常に有効であるが、係数行列の特性の違いによって収束の状況が大幅に異なり、安定した解析を展開するためには多くの問題点を抱えている。

CG法の記憶容量の面の有効性を犠牲にすることなく収束性を改善する方法として、不完全なコレスキー分解を介する共役勾配法（ICCG法）がよく知られており、収束性の大幅な改善につながるのが普通である。しかし、不完全コレスキー分解を介するために、要する計算時間に対する実質的な効率化にはなかなかつながらない。

3.1 CG法およびICCG法の実相

CG法の収束性は、対象とする問題の種類によって大幅に異なる。有限要素法による構造解析の対象となる一般的な問題の中で比較的CG法と相性の良いものと悪いものの代表

例として、図-6に示すような平面応力問題と平板曲げ問題を取り上げて解いた例を示す。

採用した要素は応力仮定のハイブリッド法に基づいて誘導した、面内回転変位を節点変位として有する1節点3自由度の平面応力要素と、1節点3自由度の平板曲げ要素である。節点変位の数と同じであるから、平面的に同じ要素分割を用いる場合には平面応力問題と平板曲げ問題の総自由度数は同じになる。いずれの問題も諸元は図中に示したとおりであり、総自由度数は2745である。

係数マトリックスは、対称性を考慮してその上半分を、節点の自由度の大きさの部分マトリックスを単位ブロックとして、非零ブロックだけを行方向に一次的に記憶している。スケールリングの方法として、係数マトリックスの対角要素による場合と、節点の自由度を単位とする対角上に並ぶ部分マトリックスによる場合、の2通りの方法を採用している。ICCG法では、非対角要素に関しては完全に元の値のままに保存して、対角要素だけを書き換える場合と、節点の自由度に対応する対角上の部分マトリックスで構成される対角ブロックを書き換える方法、の2通りの方法を採用している。

収束状況を図-7に示す。採用した加速係数の値は図中に示した通りである。いずれの問題においても、不完全コレスキー分解を介することにより

収束に要する繰返し演算回数は約

1/2～1/3に改善

され、不完全コレスキー分解の仕方

としては、対角ブロックを書き換える

方法の方がより収束性の改善に効果

があることがわかる。

収束演算回数、

各計算過程に要した計算時間(東京工

大のETA10による)、

ソルバー部で必要とする記憶容量を

表-1にまとめて示した。スカイライン

法とICCG法

におけるコレスキ

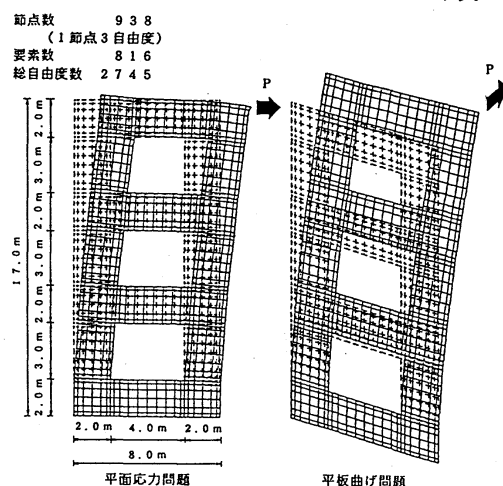
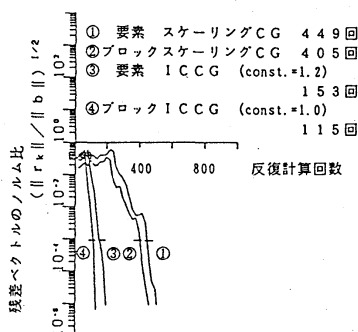
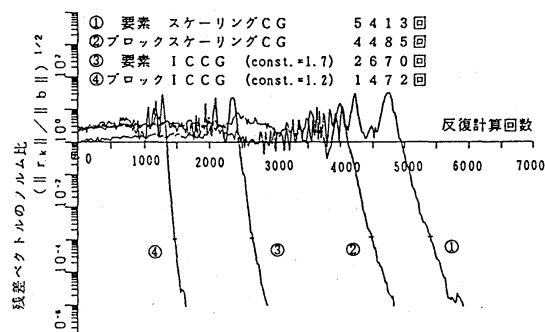


図-6 対象とした問題



(a) 平面応力問題



(b) 平板曲げ問題

図-7 前処理の方法が収束性に及ぼす影響

表-1 要した計算時間の比較

	解法の	記憶	データ	剛性	前処理過程 (s)		反復過程 (s)					応力	全計算
	種類	容量	入力		行列	SCALING	ジョスト	回数	A p 1 回	前後代入	反復 1 回	全過程	
平面応力問題	S C G	447KB	1.83	4.22	0.073	—	449	0.0854	—	0.0859	38.569	8.51	53.40
	B S C G	491KB	1.84	4.26	1.591	—	405	0.0886	—	0.0891	36.096	10.10	54.07
	I C	491KB	1.84	4.20	0.073	0.035	153	0.0835	0.0963	0.1810	27.584	8.61	42.53
	B I C	535KB	1.84	4.20	0.073	0.109	115	0.0833	0.1032	0.1872	21.487	8.60	36.58
	S K Y	1.44MB	1.84	4.43	—	1.100	—	—	0.0290	—	—	5.60	13.1
平板曲げ問題	S C G	447KB	1.83	2.89	0.073	—	5413	0.0854	—	0.0859	464.954	5.84	475.788
	B S C G	491KB	1.85	2.92	1.549	—	4485	0.0886	—	0.0891	399.697	7.36	413.577
	I C	491KB	1.84	2.87	0.073	0.041	2670	0.0835	0.0968	0.1810	482.576	5.95	493.563
	B I C	535KB	1.84	2.88	0.073	0.185	1472	0.0833	0.1040	0.1879	276.071	5.94	287.215
	S K Y	1.44MB	1.84	3.10	—	1.100	—	—	0.0290	—	—	4.27	10.4

SCG : 対角要素によるスケールリングを施したCG法
BSCG : 対角ブロックによるスケールリングを施したCG法

IC : 対角要素を書き換えるICCG法
BIC : 対角ブロックを書き換えるICCG法
SKY : スカイライン法とコレスキー分解

一分解および前進・後退代入計算に要する計算時間の違いは、フィルイン部が対象となるかならないかの違いの他に、スカイライン法においては三角マトリックスの対角上の値が1となるようにコレスキー分解することが可能であるのに対し、ICCG法では非対角要素に元の係数をそのまま用いる関係で、三角マトリックスの対角上の値が1となるようにコレスキー分解することができないことによるものである。

ICCG法では反復過程ごとに1回的前進および後退代入計算を必要とするために、反復計算1回当りに要する計算時間はCG法の2倍以上となっている。したがって、反復計算回数の改善ほどには計算時間の効率化にはつながらない。例えば、平板曲げ問題における対角要素だけを書き換える不完全コレスキー分解を用いたICCG法では最適な加速係数の値が1.7と大きいため収束性の改善の効果がそれほど大きくないことも関係し、スケールリングを施すだけのCG法よりもむしろ多くの計算時間を要していることがわかる。

3.2 ICCG法における加速係数について

ICCG法では、不完全コレスキー分解を行う際に通常加速係数と呼ばれている値を決めることが必要になる。この値のとり方によって収束に要する繰返し計算回数は大きく影響を受けるが、その最適値は場合によって異なり、一般的には経験によって決められるものとされ、ICCG法を有効に使いこなすためには経験が必要である、と認識されている一面がある。

加速係数の値によって収束状況がどのように変わるかを図-8および図-9に示す。平板曲げ問題で加速係数を1.0または1.1とした場合には、7000

回に及ぶ繰返し計算を続けても収束する様子が見られなかった。平板曲げ問題では、不完全なコレスキー分解を用いて対角ブロックを書き換える過程で対角要素の値が負となる加速係数の値の範囲があり、加速係数の値がこの領域にある場合には収束に至らず、対角要素が負とならない範囲で

1.0に最も近い値1.2の場合に最も収束が早く、この値より大きな値をとればとる程収束性が悪化する。すなわち、ICCG法では不完全なコレスキー分解を用いているために、コレスキー分解の過程で係数マトリックスの対角上の要素の値が負になる場合が生ずるが、加速係数はこれが負にならないように対角上の要素の値を嵩上げする意味合いがあり、加速係数の値は対角要素が負にならない範囲で1.0に近い値をとるほど収束性が良いと言える。

具体的にICCG法の収束性に最適な加速係数の値を求める簡素な方法を編み出すことが望ましいが、ここでは最も単純な方法として、加速係数の値を1.0から0.1刻みなどで漸増させ、不完全コレスキー分解の書き換えの過程で得られる対角要素の値の符号を判定しながらコレスキー分解を繰返し、対角要素が負とならない最も1.0に近い加速係数の値を求める方法をとった。この方法はあまりにもまともな手立てであり、相当な計算時間がかかるように見えるが、実際にこの過程に要した計算時間は平板曲げ問題の加速係数1.2

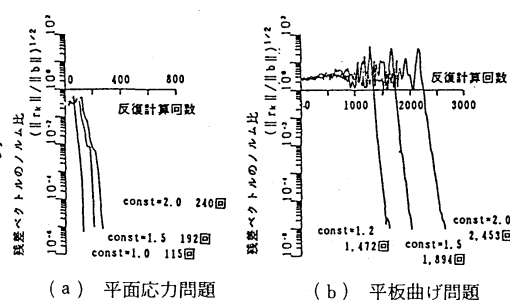


図-8 加速係数による収束状況の違い

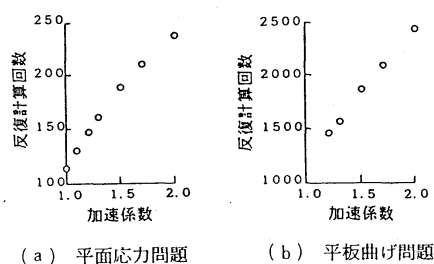


図-9 加速係数と反復計算回数の関係

の場合で、収束過程の1回の反復計算に相当する計算時間と同程度であった。仮に最適な加速係数が2.0の場合でも、この方法で不完全コレスキー分解に要する計算時間は反復収束計算の数回分程度であり、加速係数の違いが収束回数に及ぼす影響を考えると、ほとんど問題にならない程度の計算時間である。

CG法の効率化をはかったICCG法においてもなお、直接法の1つであるスカイライン法と比較して相当多くの計算時間を要するので、CG法の実用化のためには更に何らかの改善の方策を考えることが課題である。

4. 動的非線形解析における陰解法と陽解法について

構造物が衝撃的または動的な外力を受けて、大きな変形を伴って崩壊に至る動的挙動を解明することは工学上重要な問題の一つである。特に、動的な挙動に対しては構造物自身の質量の影響が重要な要因となるから、縮小模型による実験的手立てによるアプローチには限界があり、数値シミュレーションの役割が期待されることになる。

4.1 陰解法

ここでは、下記式(1)の形で与えられる接線剛性マトリックスと不釣り合い力との関係式を対象とする動的大変形問題の陰解法の例を示す。

$$(1+\alpha)[K_T]_{<t>}\{\Delta u^{(j)}\} \\ = \{f\}_{<t+\Delta t>} - \{f_{int}\}_{<t>} - [M]\{\ddot{u}\}_{<t+\Delta t>} - [C]\{\dot{u}\}_{<t+\Delta t>} + \alpha[K_T]_{<t>}\{\Delta u^{(j-1)}\} \cdots (1)$$

ここに、 $[K_T]_{<t>}$ は時刻 t における接線剛性マトリックス、 $\{\Delta u^{(j)}\}$ は収束計算過程における節点変位増分の第 j 近似値、 $\{f\}$ は作用外力の等価節点力、 $\{f_{int}\}$ は要素内の応力に対応する内部節点力、である。

パラメータ α は、対象としている現象の評価の上ではほとんど意味を持たないが数値計算の上では相当な影響を及ぼすことになる高い振動数成分を、アルゴリズムの上で数値的に減衰させて解析を安定化することを目的として、Hilber-Hughes-Taylorによって線形の運動方程式の解析に対して提案された α -法に準拠して筆者らが導入したもので、下記のNewmark- β 法と一体となってはじめて意味を持つものである。

$$\{\ddot{u}\}_{<t+\Delta t>} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \{\Delta u\} - \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{u}\}_{<t>} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_{<t>} \right] \cdots (2)$$

$$\{\dot{u}\}_{<t+\Delta t>} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{\Delta u\} + \left[\left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \{\dot{u}\}_{<t>} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \{\ddot{u}\}_{<t>} \right]$$

式(2)を式(1)に代入し、第 $(j-1)$ 近似値と第 (j) 近似値の差を意味する $\{\Delta u^{(j)}\}$ を導入すると、次のような収束計算の基礎式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left[(1+\alpha)[K_T(j-1)] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] \right] \{\Delta u^{(j)}\} \\
& = \{f\}_{\langle t+\Delta t \rangle} - \{f_{int}(j-1)\} \\
& \quad - [M] \frac{1}{\beta \Delta t^2} \{\Delta u^{(j-1)}\} - \frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{u}\}_{\langle t \rangle} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_{\langle t \rangle} \\
& \quad - [C] \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{\Delta u^{(j-1)}\} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \{\dot{u}\}_{\langle t \rangle} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \{\ddot{u}\}_{\langle t \rangle} \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

パラメータ β および γ は、 α に対して下記の条件を満たすように与えられるべきものである。

$$\beta = (1-\alpha)^2 / 4 \quad , \quad \gamma = 1/2 - \alpha \quad \dots (4)$$

また、

$$\{\Delta u^{(j)}\} = \{\Delta u^{(j-1)}\} + \{\Delta u^{(j)}\} \quad \dots (5)$$

である。

接線剛性マトリックスは、要素上に設定される要素座標系で、つぎのように与えられる。

$$[K^*T] = [K^*L] + [K^*N] \quad \dots (6)$$

ここに、 $[K^*L]$ は初期変位の剛性マトリックス、 $[K^*N]$ は幾何剛性マトリックスで、ひずみ-変位関係の線形項に対応する補間関数 $[B^*L]$ と非線形項に対応する補間関数 $[B^*N]$ とによって、それぞれつぎのように与えられる。

$$[K^*L] = \int_V [B^*L]^T [D^*] [B^*L] dv \quad \dots (7)$$

$$[K^*N] = \int_V [B^*N]^T [\sigma^*] [B^*N] dv$$

また、内部節点力ベクトルはつぎのように与えられる。

$$\{f^*_{int}\} = \int_V [B^*L]^T \{\sigma^*\} dv \quad \dots (8)$$

σ^* は要素座標系で評価される要素内の応力成分を意味するが、これは下記のように求められる。

$$\{\sigma^*(j-1)\} = \{\sigma^*\}_{\langle t \rangle} + \{\Delta \sigma^*(j-1)\} \quad \dots (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\{\Delta \sigma^*(j-1)\} &= [D^*] \{\Delta \varepsilon^*(j-1)\} \\
\{\Delta \varepsilon^*(j-1)\} &= [B^*L] \{\Delta u^*(j-1)\} \quad \dots (10)
\end{aligned}$$

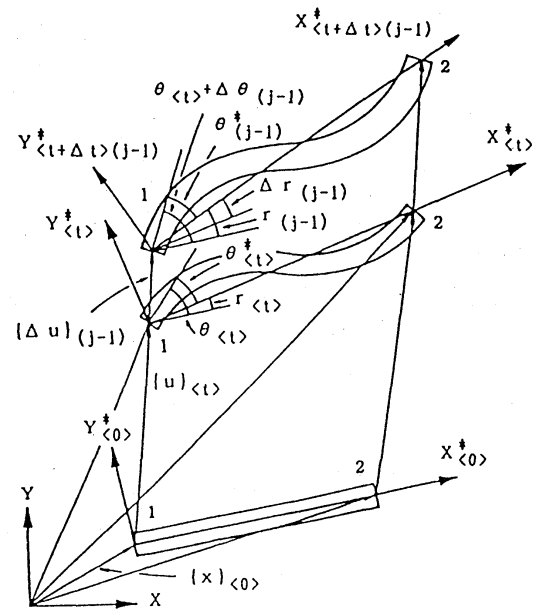


図-10 変位増分

要素の回転が大きくなると、ひずみ増分を求めるための要素座標系に関する節点変位増

分 $\{\Delta u^*(j-1)\}$ の評価過程の精密さが収束の振舞いに相当な影響を及ぼすことになる。筆者らは全体座標系に関する変位増分 $\{\Delta u(j-1)\}$ との変換関係を、つぎのように与えることを提案している。

$$\{\Delta u^*(j-1)\} = [T(j-1)][G] \{ \{\Delta u(j-1)\} - \{\Delta r(j-1)\} \} \\ + [\Delta T(j-1)][G] \{ \{u\}_{<t> - \{r\}_{<t> + \{x\}_{<0> } \} \quad \dots (11)$$

ここに、 $[T]$ は全体座標系から要素座標系への座標変換マトリックス、 $[G]$ は要素座標系の原点を節点 1 の上に置いたことによる原点移動に伴って生ずるマトリックス、 $\{r\}$ は要素座標系の剛体回転量、 $\{x\}$ は節点の座標、である（図-10）。

ごく単純な構造系を対象とした動的大変形解析の例を図-11に示す。真直ぐな柔らかい棒 (a) が一端にトルクを受けて変形しながら回転する際の、時々刻々の変形形状の推移を、係数 α を採用しない場合と、採用した場合を比較して図示したものが (b) である。ここに示した問題は簡単な 1 本の棒であるが、これを 40 の要素に分割し、小さな時間増分 ($\Delta t = 0.0003$ sec) を与え、何度も連立 1 次方程式を解いて収束解を求め、次の増分にすすみ、また収束解を求める、という手順で解を求めている。各増分ごとに収束に要した繰り返し計算回数を変形図に添えて示した。

このように連立一次方程式を解くことが課せられた陰解法は、時間増分の大きさに対する安定性、得られる解の精度、などに対して相対的に優れた解法を構成することが可能となる。しかし、通常有限要素法による解析が対象とすることになるのは相当に複雑な系であり、膨大な数の変数が導入されることになる。大規模な方程式系を対象として、小さな時間増分ごとに方程式をつくり直し、これを解いて収束計算を行う過程を繰り返すのであるから、莫大な計算量を必要とすることになる。特に、有限要素法で対象とすることになる係数マトリックスは、規模が大きくなればなるほど、零要素が大部分を占めることになるが、連立一次方程式を解く過程が加わるとマトリックスが疎である利点を生かした解法を構成するのにこれが制約となり、要する計算機の記憶容量の面からも大きな負担となる。また、ベクトル計算機の特性を効果的に生かしたアルゴリズムを構成することが難しくなる。

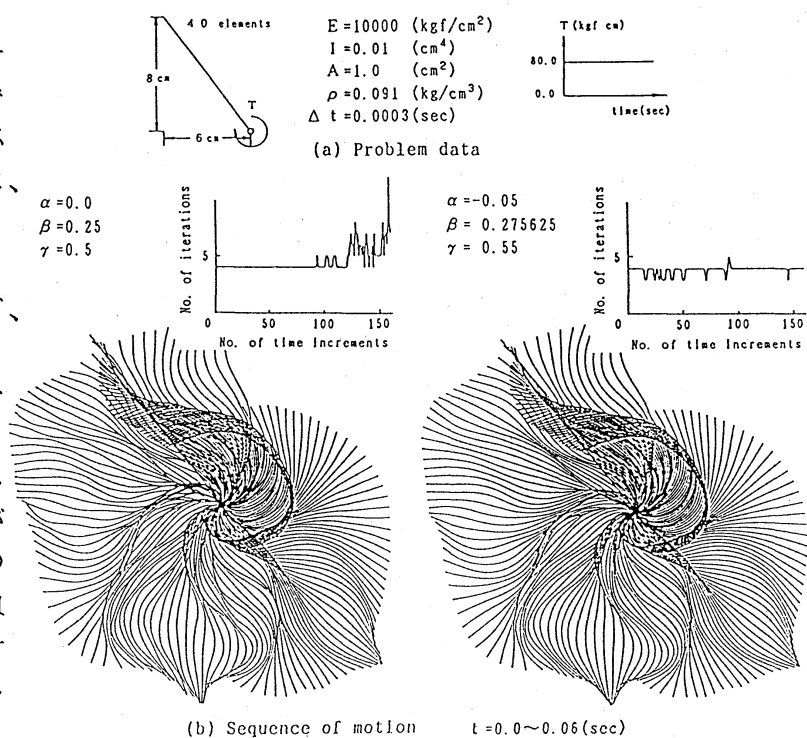


図-11 端部にトルクを受けて回転する柔らかな棒の解析例

4.2 陽解法

上述のような陰解法の難点を避けるために、時間積分法に陽公式を採用して、連立一次

方程式を解くことを必要としない形で組み立てられた陽解法が具体化され、実用に供されている。陽解法の代表的なソフトの一つは、つぎのような時刻 t における動的つり合い条件式と中央差分公式に基づいて構成されている。

$$[M] \{ \ddot{u} \} \langle t \rangle = \{ f \} \langle t \rangle - \{ f_{int} \} \langle t \rangle + \{ h \} \langle t \rangle \quad \cdots(12)$$

$$\{ \dot{u} \} \langle t + \Delta t / 2 \rangle = \{ \dot{u} \} \langle t - \Delta t / 2 \rangle + \{ \ddot{u} \} \langle t \rangle \Delta t \langle t \rangle \quad \cdots(13)$$

$$\{ x \} \langle t + \Delta t \rangle = \{ x \} \langle t \rangle + \{ \dot{u} \} \langle t + \Delta t / 2 \rangle \Delta t \langle t + \Delta t / 2 \rangle \quad \cdots(14)$$

ここに、

$$\Delta t \langle t + \Delta t / 2 \rangle = (\Delta t \langle t \rangle + \Delta t \langle t + \Delta t \rangle) / 2 \quad \cdots(15)$$

有限要素法による離散化に伴って導入された時刻 t における節点の座標 $\{ x \} \langle t \rangle$ が既に求められているものとすれば、これに対応するひずみを評価することができ、したがって要素内部の応力に相当する内部節点力ベクトル $\{ f_{int} \} \langle t \rangle$ を評価することができる。この部分の計算には要素剛性マトリックスの誘導に相当する要素領域の積分が必要となるが、計算効率に配慮して通常はこれを1点積分などの次数低減積分を採用して実行する。その結果、得られる解が折れ線状になる、アワーグラスと称されるモードが現われるが、これを制御するために導入しているのがアワーグラス抵抗ベクトル $\{ h \} \langle t \rangle$ である。また、この方法の場合には内部節点力ベクトルを評価するのであるから、各要素ごとに対応する節点力を求め、ベクトルの形で重ね合せればよく、剛性マトリックスを重ね合せたり、記憶したり、する必要はない。さらに、質量マトリックス $[M]$ を集中質量で評価すれば、式(12)によって加速度 $\{ \ddot{u} \} \langle t \rangle$ を求める計算は単なる対角要素の逆数の掛算である。式(13)、(14)に基づいて $\{ x \} \langle t + \Delta t \rangle$ を求め、次のステップに進むことになる。

陽解法のアルゴリズムは簡明ではあるが、これによって安定に解析をすすめるためには、陰解法に比べて桁違いに小さな時間増分を採る必要がある。さらに、安定条件を満たしたとしても、必ずしも得られる解の精度が保証されるわけではないので、解析に当っては、時間増分の採り方などに対する相当に水準の高い判断が必要になる。有限要素法における陽解法は本来衝撃的な崩壊現象の解析を意図して開発された解析過程である。衝撃的な現象の場合には瞬時に変わる材料特性や接触部位などを妥当に評価することが必要になるから、現象を追跡するためには、もともと極めて小さな時間変化のもとで解析することが求められるものである。したがって、このような現象を対象として、時間増分を非常に小さく採る代わりに、収束計算を行わずに、簡単なアルゴリズムで解き進めるという見識に基づいて構成された解法である。いうまでもなく、陰解法と陽解法とではその内容は相当異質なものであり、使用に当っての判断基準は共通ではない。

5. 非線形現象の解析に要する要素分割

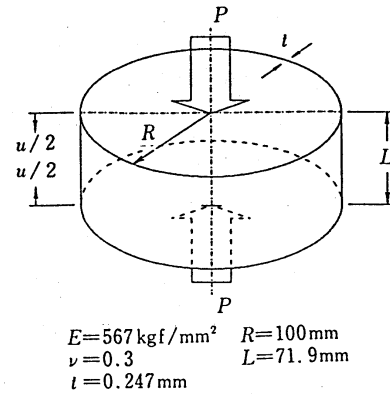
有限要素法は、偏微分方程式などとして記述される問題を、対象空間を有限な領域で分割し、要素節点に導入された物理量によって離散的な方程式に帰着させる手法である。したがって、要素分割を細かくしていけば、限りなく正しい解に近い解を得ることができるのが普通であるが、実際には有限の大きさの要素分割で解析するわけであるから、解析によって得られる解の精度は採用する要素分割に依存する。

非線形解析においては、例えば構造物が大きく変形して潰れていくような挙動を解析する場合には、形状の変化、構成する材料の特性の変化、接触に伴う条件の変化、など逐次変化する状態を適確に評価しなければならない。離散的に導入された節点における変数と補間によって、対象をモデル化して構成される方程式系による解析から得られる解が目的を満たす精度を保つためには、変形形状の局所的な変化に対応するひずみなどを妥当な精度で表現できるだけの細かな要素分割が必要となる。

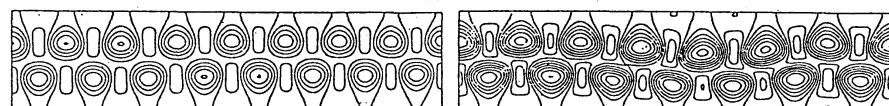
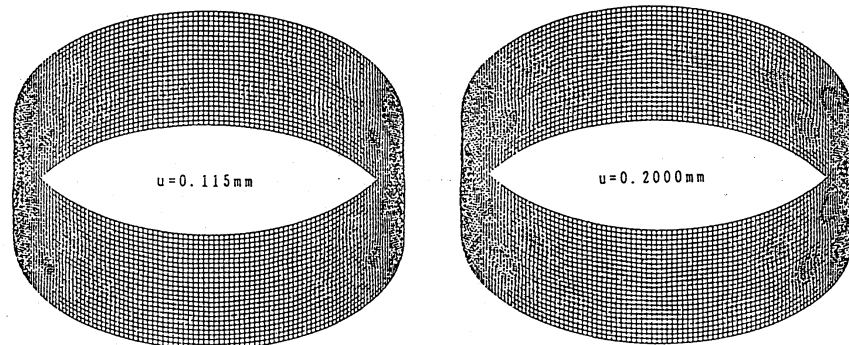
軸圧縮を受ける薄肉円筒殻の解析例を図-12に示す。ここで対象としている円筒殻の座屈波形は、ダイヤモンド型と通称されるように、その峰または谷の部分は急激な曲率変化を伴うものであり、これを妥当に評価しうかどうかは要素分割の仕方に大きく支配される。ここでは、対称条件を導入して円周を2分割し、構造全体の1/2を解析対象としている。取り上げた1/2の部分に対して、円周方向を120要素、軸方向を24要素、計2,880要素で分割して解析している。節点数は3,025であり、各節点に並進変位3成分、回転変位3成分の計6つの変数を導入しているので、総自由度は18,150自由度である。

軸方向の変位の値に対応して変形形状は図中(b)に示したように、不連続にそのモードが変わっていく。

採用した要素分割は全体的には相当に細かなものであるように見えるが、問題は局所的な凹凸を表現するために必要な要素数であり、個々の凹凸の評価にかかわっている要素数はそれほど多くはない。しかも、凹凸の部位は変形の進行に伴って変っていくのであるから、あらかじめその部位を予測して要素分割するというような手立ては不可能である。図-13は変



(a) 解析対象の諸元



(b) 変形形状 (実寸) および面外変位の等変位線図

図-12 軸圧縮を受ける薄肉円筒殻の解析例

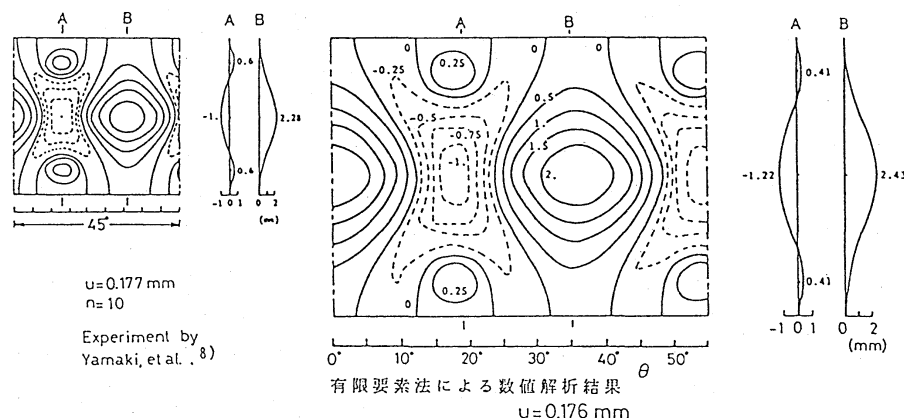


図-13 面外変位の等変位線図

形形状の一場面を、対応する八巻らによる実測結果⁸⁾と比較して図示したものである。

また、図-14は、矩形断面柱まわりの2次元流れ場の解析結果 ($Re=150$) を、岡島によって撮影された瞬間的な流線模様⁹⁾と比較して示したものである。

非線形解析が対象とすることになるのは大きな変形であり、ひずみである。したがって、もともと細かな要素分割を必要とするものである。その上に、大きな変形やひずみに対応する部位が刻々変化したりするのであるから、非線形現象の解析に要する要素分割は相当なものになる。解の精度を判断

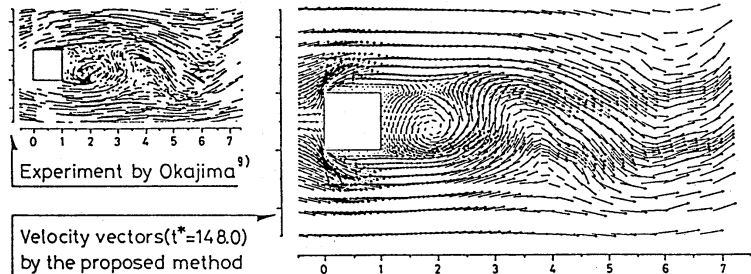


図-14 矩形断面柱まわりの流れ場 ($Re=150$)

して自動的に要素分割を変えたり、補間を高精度化したりする順応型解法が研究されているが、そのこと自体のために相当な手間をかけることになり、特に非線形解析に対しては、まだまだ実用のレベルには程遠いのが現状である。

6. おわりに

以上に、有限要素法による非線形解析の現状と課題をテーマとして、その実際の姿がより正しく理解されることを意図して、関連する話題のいくつかについて、できる限り具体的なデータを添えて実証的にまとめた。困難は困難として正しく認識し、これらを克服すべく一步一步着実な努力を積み上げることが、真の進歩につながる唯一の道である。地道な成果を積み上げるための環境を整える必要があるように思う。

参考文献

- 1) 吉田 裕:有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題, 土木学会論文集, No. 374, pp. 25-37, 1986. 10
- 2) 吉田 裕:有限要素法による非線形解析の現状, 機械の研究, Vol. 45, No. 3, pp. 1-7, 1993
- 3) 吉田・加藤・黒川:非線形有限要素解法における収束計算の加速法に関する検討, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 16, pp. 409-414, 1992
- 4) 吉田・中川・田中:共役勾配法を基礎とする連立一次方程式解法の効率化に関する考察, 土木学会論文集, No. 437, pp. 173-182, 1991. 10
- 5) 吉田・原田:有限要素法による非線形動解析の時間積分スキームに関する一検討, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 14, pp. 245-250, 1990
- 6) Y. Yoshida et al.: A formulation and solution procedure for post-buckling of thin-walled structures, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 32, pp. 285-309, 1982
- 7) Y. Yoshida et al.: A transient solution method for the finite element incompressible Navier-Stokes equations, Int. J. Num. Meths. Fluids, Vol. 5, pp. 873-890, 1985
- 8) N. Yamaki et al.: Experiments on the postbuckling behaviour of circular cylindrical shells under compression, Experimental Mechanics, Vol. 15, pp. 23-28, 1975
- 9) A. Okajima: Strouhal numbers of rectangular cylinders', J. Fluid Mech., Vol. 23, pp. 379-398, 1982