

The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on $\mathbb{P}^2$

京大理

吉岡康太

$\mathbb{P}^2$ 上のrankが r で Chern 類が c_1, c_2 である stable sheaf
の moduli space $M(r, c_1, c_2)$ の Betti 数 $r=2, c_1=-1$ の時に
計算するという話です。 $\mathbb{P}^2$ 上で考えることの理由の1つは、
一般の曲面だと難しいので(もし計算できたとすると、moduli が
空でないか? とか 連結成分の数、位数についても情報が得られ
た事になる。)、最も基本的な(?) 曲面である $\mathbb{P}^2$ の場合に考え
るということ、もう1つは $\mathbb{P}^4$ 上の instanton との関連から、 $\mathbb{P}^2$
にかぎっても十分に研究する価値があるからである。(詳しくは
[M5]を参照) さて $M(r, c_1, c_2)$ の topology に関して
今までわかっている事としては、

Th 1 Drezet, Ellingsrud - Strømme ($r=2$) Fogarty ($r=1$)
 $\dim M(r, c_1, c_2) > 0$ の時 Picard 群は $\mathbb{Z}$ か

$\mathbb{Z}^{\oplus 2}$ に同型である。

$M(r, c_1, c_2)$ は unirational になる事が知られているので、

$$H^2(M(r, c_1, c_2), \mathbb{Z}) \simeq \text{Pic}(M(r, c_1, c_2))$$

である。又 cohomology 環については、

Th 2 Ellingsrud - Strømme

$M = M(r, c_1, c_2)$ とおき $r < c_1 \leq 0$ と正規化して考える。

今 $\gcd(r, c_1, \binom{c_1+1}{2} - c_2) = 1$ とする。(従って universal family が存在する [M 2]) $\pi: M \times \mathbb{P}^2 \rightarrow M$ と射影、

$\mathcal{E}$ を universal family とする。すると、

Chow 群 $A^*(M)$ は cohomology 環 $H^*(M, \mathbb{Z})$ と同型で、

$R^i \pi_* \mathcal{E}(n)$ ($n = -2, -1, 0$) の Chern 類で生成される。

尚彼らは生成元の間の関係式についても調べている。

さて moduli の Betti 数に関しては、 $r=1$ つまり Hilbert scheme の場合は Ellingsrud - Strømme [E-S 1] により、Picard 群が $\mathbb{Z}$ に同型の場合は Drezet [D 2] により計算されている。 $r=2$ の時について次が成立する。

まず $p(M(r, c_1, c_2), x)$ を $M(r, c_1, c_2)$ の Poincaré 多項式とする。

Th 3

$$\sum_n p(M(2, -1, n), z) t^n = \frac{\prod_{d \geq 1} Z_{z^2}(\mathbb{P}^2, z^{2(2d-1)} t^d)^2}{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{2n(2n-1)} t^{n^2} \right)} \times$$

$$\frac{1}{z^2 - 1} \left(\sum_{b \geq 0} \left(\frac{z^{2(b+1)(2b+1)}}{1 - z^{8(b+1)} t^{2b+1}} - \frac{z^{2b(2b+5)}}{1 - z^{8b} t^{2b+1}} \right) t^{(b+1)^2} \right)$$

$$\therefore z \cdot Z_g(\mathbb{P}^2, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)(1-q^2t)}$$

($\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_q$ 上の zeta 関数)

Remark 4 $r=1$ ($[E-S /]$) の時は,

$$\sum_n p(M(1, -1, n), z) t^n = \prod_{d \geq 1} Z_{z^2}(\mathbb{P}^2, z^{2(d-1)} t^d)$$

Cor 5 n を偶数とした時 i th Betti 数 $b_i(M(2, -1, n))$

は $n-1 \geq \frac{L}{2}$ について一定となり,

$$p(M(2, -1, n), z) \equiv \frac{1 - z^2}{\prod_{d \geq 1} (1 - z^{2d})^3} \pmod{z^{2n}}$$

$$\left(\equiv p(M(1, -1, n), z) \pmod{z^n} \right)$$

$r=2$ の時 $\operatorname{rk} R_{\pi_X}^1 \mathcal{E}(-2) = \operatorname{rk} R_{\pi_X}^1 \mathcal{E} = m-1$, $\operatorname{rk} R_{\pi_X}^1 \mathcal{E}(-1) = m$ となるので, Th 2 により, 次の自然な全射がある。

$$\varphi: \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_{n-1}] \rightarrow H^*(M(2, -1, n), \mathbb{Z})$$

ただし a_i, b_i, c_i は degree $2i$ の不定元

さて $\ker \varphi$ は Th 1 により a_i, b_i, c_i の linear な関係式をもつ。

そこで 多項式環 $\mathbb{Z}[x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots]$

ただし x_i, y_i, z_i の degree $= 2i$ と $\bigoplus_{i \geq 0} R_{2i}$ と斉次部分に分解した時, 容易に $\sum_{i \geq 0} \operatorname{rk} R_{2i} \cdot z^{2i} = (1-z^2) / \prod_{d \geq 1} (1-z^{2d})^3$ となることがわかる。これらと Cor 5 を合わせると, $\ker \varphi$ の元は a_i, b_i, c_i の linear な関係式と次数が m 以上のものによって生成される事がわかる。

Remark 6 $p(M(2, -1, n), z) \equiv p(M(1, -1, n), z) \pmod{z^n}$

は Th 2 からいかにも成立しそうである。彼らは $H^*(M, \mathbb{Z})$ の生成元の関係式, と求める方法についても [E-S 3] の中に述べているので, それを使って Cor 5 は示されると思う。

尚, asymptotic な Betti 数の挙動が rank によらず"同じになる"ということはおそらく一般の曲面で成立するのではと個人的には思っている。($r \leq 2$ で, 曲面の小平次元が -1 の時には適当な条件下で正しいようである)

Th 3 の証明の方針.

$M(2, -1, n)$ を簡単のため以下 $M(1, n)$ とかく. Maruyama は $M(1, n)$ を $\mathbb{Z}$ 上構成し, しかも smooth projective variety となるので ([M 2]) Weil 予想を利用して Betti 数を計算する事ができる. Weil 予想を利用して Betti 数を求めるという考えは, 曲線上の stable vector bundle の moduli の場合に Harder-Narasimhan ([H-N]) が利用し, 曲面の Hilbert scheme の場合に Göttsche [G] が利用している. 簡単な例を一つあげる.

$\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_q$ -有理点の集合を $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ とかくと,

$$\# \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) = q^2 + q + 1 \quad \text{ここで } \# \mathbb{F}_q = q$$

すると

$$P(\mathbb{P}^2, z) = z^4 + z^2 + 1$$

Weil 予想 (特に絶対値予想)
 $q = z^2$

このように $\mathbb{F}_q$ -有理点を数えることにより $M(1, n)$ の Betti 数を計算できわけである. 以下 $M(1, n)$ の有理点, つまり有限体上定義された stable sheaf を数える方法を説明する.

まず $E \in M(1, n)(\mathbb{F}_q)$ に対し dual dual E^{vv} と考え, 次の完全列が得られる.

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{vv} \rightarrow E^{vv}/E \rightarrow 0$$

ここで $c_1(E) = -1$ ゆえ E^{vv} は stable vector bundle であり, 又 $\text{supp}(E^{vv}/E)$ は有限となるから, quotient $E^{vv} \rightarrow E^{vv}/E$ と考えれば, $\text{supp}(E^{vv}/E) = \{p_1, \dots, p_m\}$ と quotient.

$E_{p_i}^w \rightarrow (E_{p_i}^w)$ と与えればよく, stable sheaf の数え上げは次の2つに分かれる。

(1) stable vector bundle の数え上げ

(2) quotient $\mathcal{O}_P^{\oplus 2} \rightarrow A$, A : Artinian $\mathcal{O}_P$ -module $p \in \mathbb{P}^2$ の数え上げ。

さて (1), (2) の計算で最も重要な働きをするのが, 以下説明するように $\mathbb{P}^2$ 上の line bundle に沿った elementary transformation である。elementary transformation と書くとき長いので, 以下基本変換と書くことにする。尚, この考えはもともとは直線 $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ 上の line bundle に沿った基本変換を通して Chern 類の異なる2つの moduli space の間の関係を探るという丸山先生の考えがきっかけとなっています。

(1) Ellingsrud - Strømme の方法を使う。

$p: \hat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ と $\mathbb{P}^2$ の1点 blowing-up, C と p の例外因子とする。又 $q: \hat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ と自然な fibration, f と g の fibre とする。

$$\hat{\mathbb{P}}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{P}^2$$

$$q \downarrow$$

$$\mathbb{P}^1$$

E と $\mathbb{P}^2$ 上の rank 2 vector bundle で $c_1(E) = -1$ であるものとする。 p^*E と考える。 η と $\mathbb{P}^1$ の generic point

とし、 P^*E を $\mathcal{O}$ の generic fibre $\mathcal{O}(q)$ ($\simeq P^*_{\mathcal{O}(q)}$) に制限すると、
 $P^*E|_{\mathcal{O}(q)} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{O}(q)}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{O}(q)}(-a-1) \quad a \geq 0$

よって次の完全列が得られる (Harder-Narasimhan-filtration)
 $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{O}(q)}(aC) \rightarrow P^*E|_{\mathcal{O}(q)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{O}(q)}(-(a+1)C) \rightarrow 0$

これを $\mathbb{P}^2$ にのばして、

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow P^*E \rightarrow \mathcal{I}_2(D') \rightarrow 0.$$

$D = aC - bf$, $D' = c_1(E) - D$, $\mathcal{I}_2$ = ideal sheaf of Z
 なる完全列が得られる。これから $E \otimes \mathcal{I}_2(D')$, $\mathcal{O}(D)$ を考えて
 も良いし、次のように考えてもよい。(本質的に同じ) $Z \neq \emptyset$ 時

$Z \cap l \neq \emptyset$ とする $\mathcal{O}$ の fibre l とする。すると $\mathcal{I}_2(\mathcal{O}_l \hookrightarrow \mathcal{O}_l(-d))$

$d > 0$ E_1 を自然な全射 $\varphi = P^*E \rightarrow \mathcal{I}_2(D')|_l \rightarrow \mathcal{O}_l(D'-d)$ で
 定まる基本変換、つまり $E_1 = \ker \varphi$ とする。すると E_1 に対し
 次の完全列がある

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow E_1 \rightarrow \mathcal{I}_2(D'-f) \rightarrow 0$$

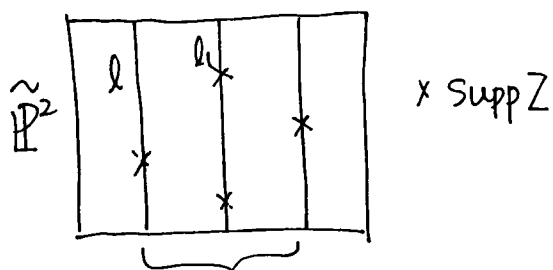
この時 $\deg Z > \deg Z_1$ から $Z \supset Z_1$

この E_1 に対し $Z_1 \neq \emptyset$ なら、 $Z_1 \cap l_1 \neq \emptyset$ とする fibre l_1 で同様の
 な基本変換を繰り返す。つまり $\varphi_1: E_1 \rightarrow \mathcal{I}_2(\mathcal{O}_{l_1}(D'))$ とし、

$E_2 = \ker \varphi_1$ とおく。これをくり返すと $E, E_1, E_2, \dots, E_n$
 と $Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$ なる系列を得るが、いずれ $Z_m = \emptyset$ とする。
 つまり E_{m+1} に対しては、

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow E_m \rightarrow \mathcal{O}(D-mf) \rightarrow 0$$

なる完全列を得る。



この fibre で $\mathbb{P}(E_i)$ の minimal section に属し 基本変換を行う。

E から $E_1, E_2, \dots, E_m$ を得る
手続は標準的なものであり、 E_1 に対して $E_2, \dots, E_m$ は一意に定まる。よって E は逆に E_m を適当な fibre で基本変換したものと考えることができ、この事を使うと、

$\text{Ext}^1(\mathcal{O}(D-mf), \mathcal{O}(D))$ と基本変換のえらび方に関する情報から E が復活できる。(ここで曲線の場合にはなかった $\text{codim } 2$ に関する部分が統制できたことによる。)

Remark 7 Langton [L] (Mumford [M1, 2]) は基本変換を使って moduli が proper である事を示した (もちろん semi-stable の範囲で考える。) この手法は上の手法と同じである。従って、 $\pi: X \rightarrow C$ を smooth projective surface から smooth curve への smooth fibration とした時 generic fibre に制限した時の形からある程度定まる X 上の標準的 vector bundle とその基本変換として X 上の一般の vector bundle はとらえる事ができる。特に fibre が $\mathbb{P}^1$ の時は、標準的 vector bundle として、

π^*E , E は C 上の vector bundle 又は、完全方!!.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(D') \rightarrow 0 \quad \text{ただし } (D, f) > (D', f)$$

f は π の fibre

で定まる vector bundle がとれる。尚 [M4] も参照.

Remark 8 土基氏に教えて頂いた事だが、曲線の場合に stable vector bundle を数えるのに使う Harder-Narasimhan の方法も基本変換とみなせる。従って曲面の場合も基本変換にこだわるのは自然な考えだと思える。ただ曲線の場合と異なり、基本変換の中心ののっている因子の取り方が難かしい。たとえば、2つの因子 D_1, D_2 の上の line bundle に沿った基本変換を行う場合、 $(D_1 \cdot D_2) = 0$ でないと、互いに影響を及ぼしあって都合が悪い。又因子は smooth でないと難かしいので、smooth fibration のある曲面でしかも基本変換は fibre 方向に行うことにする。もちろん横方向の基本変換は考えていないので、あとは他の方法を利用する事になる。これが Remark 7 の方法である。又 $\mathbb{P}^2$ 代わりに $\tilde{\mathbb{P}}^2$ で考えるのもこれらのことから自然である。

これらの事から $\tilde{\mathbb{P}}^2$ 上 (一般に ruled surface 上、ただし ample divisor H は $(H \cdot K_X) < 0$ となるようにとる。) の rank 2 stable

vector bundle の数が数えられる事がわかる。さてこの様に
して数えた vector bundle の中で $\mathbb{P}^2$ から来るものと区別するの
は難しい。しかし例外因子上の line bundle に沿った基本変
換を通して $\tilde{\mathbb{P}}^2$ 上の stable vector bundle (適当な polarization で
考える。) と $\mathbb{P}^2$ 上の stable vector bundle は対応がつく。以下
これを説明する。

(Y, H) を smooth projective surface Y と ample divisor H
on Y の組とする。 $M_H(c_1, c_2)_0$ を H -stable vector bundle
on Y の moduli space とする。 $\phi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を Y の点
blowing-up C を ϕ の例外因子とする。すると、

$$\phi^*: M_H(c_1, c_2)_0 \hookrightarrow M_{\phi^*H-C}(c_1, c_2)_0 \quad d \gg 0$$

$$\parallel$$

$$M_{H_\infty}(c_1, c_2) \quad \text{とかく。}$$

(c_1, H) が奇数とする。 $\mathbb{P}^2$ 上の stable vector bundle を数
えるには次を示せば十分である。

Prop 9 上の仮定の下。

$$\sum_n \# M_{H_\infty}(c_1, n)_0(\mathbb{F}_q) t^n = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(2n-1)} t^{n^2} \right) \prod_{d \geq 1} \frac{1 - q^{2d-4d}}{1 - q^{2d} t^d}$$

$$\times \left(\sum_n \# M_H(c_1, n)_0(\mathbb{F}_q) t^n \right)$$

証明の idea 基本的には前と同じである。つまり

$E \in M_{H_0}(c, n)_0$ に対し $E|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_0) \oplus \mathcal{O}_C(-d_0)$, $d_0 \geq 0$ とする。自然な全射 $\varphi_0: E \rightarrow \mathcal{O}_C(d_0)$ の kernel を E_1 とおくと、 E_1 は E の $\mathcal{O}_C(-d_0)$ に沿った基本変換と見る。 $E_1|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_1+1) \oplus \mathcal{O}_C(d_1)$, $d_1 \geq 0$ に対し $\varphi_1: E_1 \rightarrow \mathcal{O}_C(d_1)$ とおく。又 $E_2 = \ker \varphi_1 \otimes \mathcal{O}_C$ とおく。 $E_2|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_2) \oplus \mathcal{O}_C(-d_2)$, $d_2 \geq 0$ ならば $E_3 = \ker(E_2 \rightarrow \mathcal{O}_C(-d_2))$ とおく。 $E_3|_C \simeq \mathcal{O}_C(d_3+1) \oplus \mathcal{O}_C(-d_3)$, $d_3 \geq 0$ ならば分解に対し $E_4 = \ker(E_3 \rightarrow \mathcal{O}_C(-d_3)) \otimes \mathcal{O}_C$ とおく。以上これをくり返して、
 $d_0 > d_2 > d_4 > \dots \geq 0$

$$c_2(E) > c_2(E_2) > c_2(E_4) > \dots$$

なる系列を得る。これからある m が存在し、 $d_{2m} = 0$ と見る。つまり $E_{2m}|_C \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ 。これは $E_{2m} \in \phi^* M_H(c, c_2(E_{2m}))$ を意味する。これから E は $\phi^* M_H(c, *)$ の元と例外因子でくり返し基本変換を行うことにより得られる事がわかる。この事を使うと $\sum_n \# M_{H_0}(c, n)(\mathbb{F}_q) t^n$ と $\sum_n \# M_H(c, n)_0(\mathbb{F}_q) t^n$ の間の関係がわかり Prop 9 が示される。

(2) quotient の計算

次の Lem 10 を示せば十分である

Th 10

$$\sum_{n \geq 0} \# \text{Quot}^n_{\mathcal{O}_P^{\oplus r} / \text{Spec}(\mathcal{O}_P)}(\mathbb{F}_q) t^n = \prod_{a \geq 1} \prod_{b=1}^r Z_q(p, q^{ra-b/a}).$$

$$\therefore Z_q(p, t) = \frac{1}{1-t} \quad (\text{1 葉の zeta 関数})$$

Remark 11 $r=1$ 時は Ellingsrud-Strømme [E-S /] が示した。又 Gottsche [G] は一般の global な surface X の場合は上で P と X に取り替えるだけでよい事を示した。(母関数を使って定式化したのも Gottsche である。)

証明の idea idea はいたって簡単今までと全く同じである。まず本当は局所的な問題だが, global に考えた方が簡単なので, $\text{Quot}^n_{\mathcal{O}_P^{\oplus r} / \text{Spec}(\mathcal{O}_P)}$ の元は $E \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus r}$, $\text{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus r}/E) = \{p\}$ 1 点, $p \in \mathbb{P}^2$ として考えよ。 P を含む直線 l と l を固定する。

$E \rightarrow E'_l / \text{torsion}$ と自然な全射。その kernel を $E(-1)$ と書く。すると $E' \in \text{Quot}^{n'}_{\mathcal{O}_P^{\oplus r} / \text{Spec}(\mathcal{O}_P)}$ $n' < n$ 。
よって帰納的に $\text{Quot}^n_{\mathcal{O}_P^{\oplus r} / \text{Spec}(\mathcal{O}_P)}$ の有理点が数えられる。

最後に Th 3 で個人的に不満な点を述べる。Remark 8 で $\mathbb{P}^2$ を考察するのは自然であると述べたが, できれば, $\mathbb{P}^2$

の中だけで考えたい。というのは、上の表現では、実は $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ の情報と $\mathbb{P}^2$ の点から決まる情報 $\mathbb{Z}_2(\mathbb{P}^2, t)$ による表現となっていて、こので少し不自然に思える。できれば、 $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ と $\mathbb{Z}_2(\mathbb{P}^2, t)$ だけで書き表わしたいわけである。例外因子の寄与である $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{2m(2m-1)} t^{m^2}$ は積表示できるので、もし後半の $\sum$ の部分が積表示できれば、例外因子の寄与の部分が消えて、もっと自然な形に書き表わす事ができるかも知れない。

参考文献

- [D 1] J. M. Drezet, Groupe de Picard des variétés de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, Ann. Inst. Fourier, 38, 3 (1988)
- [D 2] J. M. Drezet, Cohomologie des variétés de modules de hauteur nulle, Math. Ann 281 (1988)
- [E-S, 1] G. Ellingsrud-S.S. Strømme On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane, Invent. Math. 87 (1987)
- [E-S, 2] G. Ellingsrud-S.S. Strømme, On generators of the Chow ring of fine moduli spaces on $\mathbb{P}^2$ preprint (1989)
- [E-S, 3] G. Ellingsrud-S.S. Strømme, Towards the Chow ring of the moduli space for stable sheaves on $\mathbb{P}^2$ with

$u=1$ preprint (1991)

- [H-N] G. Harder - M.S. Narasimhan, On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves, Math. Ann. 212 (1975)
- [G] L. Göttsche The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface, Math. Ann. 286 (1990)
- [L] S. G. Langton, Valutive criteria for families of vector bundles on algebraic varieties, Ann. of Math., 101 (1975)
- [M 1] M. Maruyama Openness of a family of torsion free sheaves, J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976)
- [M 2] M. Maruyama Moduli of stable sheaves II J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978)
- [M 3] M. Maruyama, Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles, Lect. Notes Math. 961 Springer-Verlag 1983
- [M 4] M. Maruyama, Singularities of the curve of jumping lines of a vector bundle of rank 2 on $\mathbb{P}^2$, Alg. Geom., Proc. of Japan-France Conf., kyo and Kyoto 1982, Lect. Notes in Math. 1016 Springer-Verlag (1983)

- [M5] M. Maruyama Instantons and parabolic sheaves, preprint
- [Y] K. Yoshida The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on $\mathbb{P}^2$. preprint