

Genus 2 の Heegaard 分解をもつ S^3 について

東工大 理学部 本間龍雄

Poincaré 予想がもしも肯定的に解決したとしても、群が trivial かどうかを判定する方法が決定されていないから、与えられた 3-manifold が 3-Sphere かどうかを判定する方法が見つかるとは限らない。この paper では genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold は 3-sphere かどうかを判定する単純な algorithm が存在することを証明する。

Def M, L が genus 2 の solid torus で, $N = M \cap L = \partial M = \partial L$ であるとき, $\{M, L, N\}$ を 3-manifold $M \cup L$ の genus 2 の Heegaard 分解 と言う。

今後 M, L, N は上述の定義の genus 2 の $\Rightarrow$ の solid torus と torus をそれぞれ意味するものとする。

Def $M(L)$ の proper な disc の boundary

を meridian (longitude) と呼ぶ。 $\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$
 $(\lambda = \{l_1, l_2, l_3\})$ が互いに交わらない meridian
 (longitude) で、 どの二つも $H_1(N)$ で 一次独立な
 とき、 meridian-系 (longitude-系) と呼ぶ。

また $\{\mu, \lambda\}$ を m.l.-系 と呼ぶ。

Def. meridian と longitude が transversal
 に交わり、 両者の二つの弧によって N の disc が bound
 されないとき、 m.l.-系 は normal であるという。

meridian 又は longitude を N 上の isotopy で
 動かして、 任意の m.l.-系 は normal にできるから、 今
 後 normal な m.l.-系のみを扱う。

$\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$, $\lambda = \{l_1, l_2, l_3\}$ が normal
 な m.l.-系 であるとき、 $M \cup L$ が homology-sphere なる

$$N = (m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3)$$

の各連結成分の boundary は、 4つの弧、又は6つの弧、
 又は8つの弧からできていて、 meridian と longitude
 の弧が交互に並んでいる。 それぞれの場合各連結成分の閉包
 を 四辺形、 六辺形、 八辺形 といい、 これ等を m.l.-
 系 $\{\mu, \lambda\}$ の 多辺形 と呼ぶ。 homology sphere が
 どうかの判定は容易なので、 ここで扱う 3-manifold は
 homology sphere に限ることにする。

Def. $m.l.$ -系の多面体で一つの meridian あるいは一つの longitude に属する二辺をもつものが存在するとき、reducible であるという。前者の場合を m-reducible、後者の場合を l-reducible という。reducible でないとき irreducible という。

reducible なときに実際に reduction が存在することとを示すために $m.l.$ -系の性質を調べる。つぎのことは良く知られている。

Prop. 1 ($m.l.$ -系の対称性) $\{\mu, \lambda\}$ が任意の $m.l.$ -系であるとき、 N の involution T ($T^2 = I$) が存在し

$$T(m_i) = m_i, \quad T(l_i) = l_i \quad i=1, 2, 3.$$

を満たす。

もちろん $N - (m_1 \cup m_2 \cup m_3)$ は二つの連結成分をもつがその一つの閉包 N^+ 内の longitude の様子により、 $m.l.$ -系の性質もある程度判明する。例えばつぎの命題が成立する。

Prop. 2 多面体で m_3 に属する二つの弧をもつ (従って $m.l.$ -系は m -reducible) ものが存在するための必要充分条件は、 $N^+ \cap (l_1 \cup l_2 \cup l_3)$

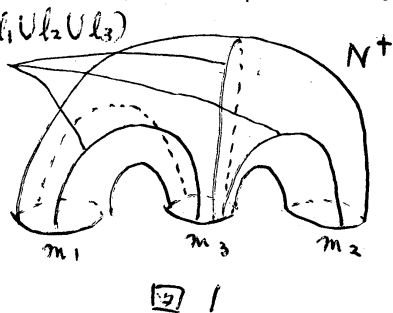


図 1

に含まれる弧で、 m_1 と m_3 、 m_2 と m_3 を結ぶ弧が存在し、 m_1 と m_2 を結ぶ弧が存在しないことである。

Proof m_1 と m_2 を結ぶ longitude の弧が存在すれば m_3 の二つの弧を二辺とする多辺形は存在し得ない。また homology sphere であるから m_1 と m_3 , m_2 と m_3 を結ぶ longitude の弧が存在する。

Remark Prop. 2 で m_3 から出て m_3 に入る longitude の弧がある場合とない場合 (後に述べる 0-型) とがある。図 1 はそのような弧が存在する場合である。

MUL は homology sphere であることと Prop. 2 よりつぎの命題が直ちに導かれる。

Prop. 3 Prop. 2 の条件のもとで, $(l_1 \cup l_2 \cup l_3) - (m_1 \cup m_2)$ の弧 a で m_1 と m_2 を結ぶものが存在し, a は m_3 と交わる。(図 2)

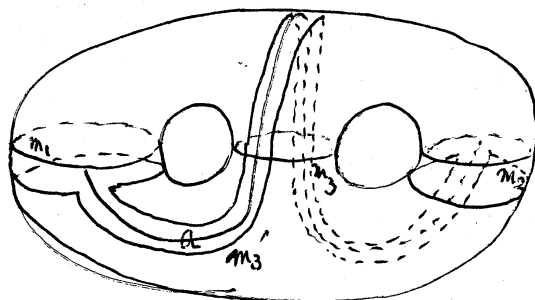


図 2

$\{\mu, \lambda\}$ が reducible とする。

たとえば Prop. 2 の条件を満足したとする。図 2 のように a を中心線とする band で m_1 と m_2 をつなぐと新しい meridian 系 $\mu' = \{m_1, m_2, m_3'\}$ を得る。(後に述べる simple transformation) つぎの命題によりこの変換 $\{\mu, \lambda\} \rightarrow \{\mu', \lambda\}$ は reduction となつてゐる。

Prop. 4 meridian 系と longitude 系の交点数は

$\{\mu', \lambda\}$ が $\{\mu, \lambda\}$ より少なくなっている。

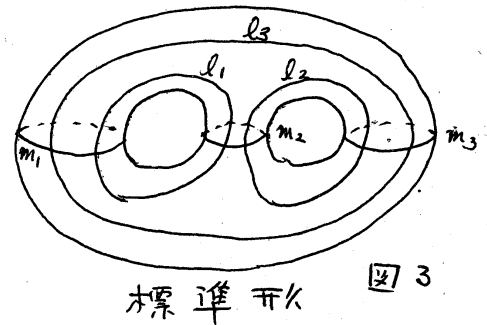
Proof m_1 と m_2 , λ はそのままだから, m_3 と λ の交点数が, m_3 より少なくなっていることを示せば良い。

図1を見れば判るように m_3 と λ の交点数は

m_1 の交点数 + m_2 の交点数 + m_3 と結合弧の数

であるが, 図2で判るように m_3' と λ の交点数は m_3 と λ の交点数だけ少なくなる (normal になおすので実際はもっと少なくなる。)

Def. 任意の meridian と 任意の longitude が丁度一点で交わるとき, その m, l -系は標準系と呼ばれる。



m, l -系が標準系ならば, もちろん

3-manifold MVL は 3-sphere となるが, 次の定理がこの paper の主定理である。

Theorem S^3 の genus 2 の Heegaard 分解の irreducible な m, l -系は標準系である。

S^3 判定の algorithm genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3-manifold MVL が与えられれば homology sphere かどうかは直ちに判定できる。homology sphere ならばその m, l -系が reducible か irreducible かを判定し

(判定の方法は簡単である) reducible ならば irreducible になるまですでに述べた手段で reduction を繰り返して、最後に得た irreducible な m.l.-系が標準形ならば S^3 , 標準形でないならば S^2 である。

Def. meridian系 (longitude系) の simple transformation $\mu \xrightarrow{S} \mu'$ ($\lambda \xrightarrow{S} \lambda'$) とは, $\mu = \{m_i, m_j, m_k\}$

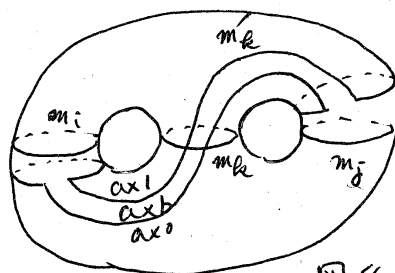


図 4

の二つの meridian m_i, m_j はそのままにして, 残りの一つの meridian m_k の代りに m_i と m_j を band $a \times b$ ($a = b = [0, 1]$) でつなぐ新しい meridian系 $\mu' = \{m_i, m_j, m'_k\}$ を作ることをあ。 (図 4)

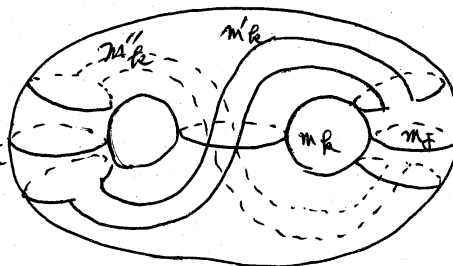
Remark band $a \times b$ が m_k と交わるなければ, m'_k は μ 上の isotopy で m_k に移れるから μ と μ' は同じ meridian系と考える。故に band $a \times b$ は常に m_k と交わるものとする。

つぎの Prop. は明らかである。

Prop. 5 (Simple transformation の 可逆性)

Simple transformation $\mu \rightarrow \mu'$

と $\mu \rightarrow \mu''$ において, $\mu = \{m_i, m_j, m_k\}$, $\mu' = \{m_i, m_j, m'_k\}$, $\mu'' = \{m_i, m_j, m''_k\}$ 図 5



で、両者の band が交わらず m_i と m_j を反対側からつないで、 μ'_i と μ''_i が作られるならば、 μ'_i と μ''_i は N 上の isotopy で互いに移れるから、 μ' と μ'' は同じ meridian 系と考えてよい。

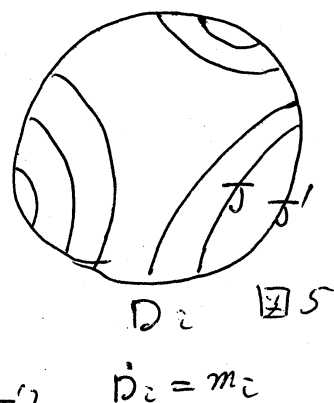
Def. $\mu = \mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \mu_2 \xrightarrow{s} \cdots \xrightarrow{s} \mu_m = \mu'$ が simple transformation の列で、(1) μ_i の新しい meridian と古い meridian の一つを band をつないで μ_{i+1} の新しい meridian が作られ、(2) $\mu_i \xrightarrow{s} \mu_{i+1}$ の band は $\mu_{i-1} \xrightarrow{s} \mu_i$ の band の中を通っているとき、この列を elementary transformation と呼ぶ、 $\mu \xrightarrow{s} \mu'$ と書く。

$m, \{m_1, m_2, m_3\}$ は meridian と meridian 系で normal に交わるものとする。 $D, \{D_1, D_2, D_3\}$ をそれぞれに対応する meridian disc とする。 $D \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ は $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ の boundary の二点を結ぶ曲線の集合からできているとしてよいが、

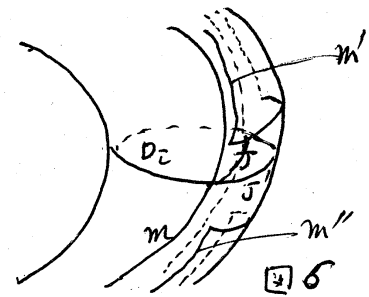
その中で outermost なものを J とし、それに対応する boundary arc (meridian の弧) を J' とする。

m を二点 $\partial J = \partial J'$ で切断してできる

弧を $\bar{m}, \bar{m}'$ とし、 $\{m, \bar{m} \cup J, \bar{m}' \cup J'\}$



を normal になおして meridian 系 $\{m, m', m''\}$ を得る。これは m' と m'' を band をつないで m を作る操作の逆をしたことになる。



Prop. 6 (meridian 系作成の一意性) 上に述べた $\{m, m', m''\}$ は $\mathcal{J}$ の選び方に無関係に一意的に定まる。
(mod. isotopy)

Proof $\mathcal{J}$ の選び方によって、二つの meridian 系 $\mu_1 = \{m, m'_1, m''_1\}$, $\mu_2 = \{m, m'_2, m''_2\}$ が作れたとする。 m'_1 は μ_2 と交わらず、 m''_2 は μ_1 と交わらないとして差支えない。 meridian 系 μ_i ($i=1, 2$) と交わらない meridian は μ_i の三つの meridian のどれか一つと isotopic である。故に μ_1 と μ_2 は isotopic である。

二つの meridian 系 $\mu = \{m_1, m_2, m_3\}$ と $\bar{\mu} = \{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$ が与えられたとき、上に述べた meridian 系の作り方と同じ方法で新しい meridian 系 $\mu' = \{m'_1, m'_2, m'_3\}$ を作り、 $\mu' \xrightarrow{s} \mu$ は simple transformation となり、 μ' と $\bar{\mu}$ の交点数を μ と $\bar{\mu}$ の交点数より下げることができる。 Prop. 6 よりこの命題を得る。

Prop. 7 (simple transformation 作成の一意的性) 上に述べた $\mu' \xrightarrow{s} \mu$ の作り方において, μ' は μ と $\bar{\mu}$ によってのみ一意的に定まる。(mod. isotopy)

Prop. 7 を繰り返して用いることによりつぎの Lemma を得る。

Lemma 1 二つの meridian 系 $\mu, \bar{\mu}$ が与えられれば, elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ が存在し, 一意的に定まる。

つぎの Lemma は良く知られている。

Lemma 2 (Waldhausen の定理) S^3 の genus 2 の Heegaard 分解は標準形の m.l.-系をもつ。

Lemma 1 と Lemma 2 よりつぎの Lemma を得る。

Lemma 3 S^3 の任意の genus 2 の Heegaard 分解の m.l. 系を $\{\mu, \lambda\}$ とする。標準形 $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\}$ からの elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ が存在し, 一意的に定まる。

elementary transformation $\{\bar{\mu}, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{e} \{\mu, \lambda\}$ とは meridian 系の elementary transformation $\bar{\mu} \xrightarrow{e} \mu$ と longitude 系の elementary transformation $\bar{\lambda} \xrightarrow{e} \lambda$ を組み合わせただけで,

$$\bar{\mu} = \mu_0 \xrightarrow{s} \mu_1 \xrightarrow{s} \dots \xrightarrow{s} \mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1 \xrightarrow{s} \dots \xrightarrow{s} \lambda_{l-1} \xrightarrow{s} \lambda_l = \lambda$$

と表わされていゝものとする。

定理の証明では $\{\mu, \lambda_i\}$ の reducibility を i に依する induction で確かめる。もしも $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band が μ の meridian を横切れば、 $j \geq i$ なるすべての j に対し、 $\lambda_{j-1} \xrightarrow{s} \lambda_j$ の band が μ を横切つて、 $\{\mu, \lambda_j\}$ はすべて ℓ -reducible で、もちろん $\{\mu, \lambda\}$ も ℓ -reducible となるから、(i) $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band は μ を横切らないと仮定してよい。

もしも $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band が $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切らなければ、 μ は標準形となり (i) より λ も標準形となつて定理は自明となるので、(ii) $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band は $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切るものとする。

Def. m.l.-系がハロ開曲をもつとき、0-型 といふ。

ハロ開曲なるば「四辺は meridian の弧であり、他の四辺は longitude の弧であるから、二辺は一つの meridian に属し、二辺は一つの longitude に属するから」の命題が成立つ。

Prop. 8 0-型の m.l.-系は m -reducible であり、 ℓ -reducible である。

Def. $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band $a \times b$ の subband

$[t_1, t_2] \times b$ ($0 < t_1 < t_2 < 1$) が λ_i の二つの longitude を結んでいてそれ以外では λ_i の longitude と交わらないとき, $[t_1, t_2] \times b$ を bridge と呼ぶ。

Def. $\{\mu, \lambda_i\}$ を bridge を用いてつぎのように分類する。

1-型 : 1つの longitude に bridge が存在し, 他の二つに bridge が存在しない。

2-型 : 2つの longitude に bridge が存在し, 1他の一つに bridge が存在しない。

3-型 : 三つの longitude とも bridge が存在する。

Prop. 8 $\{\mu, \lambda_i\}$ が 1-型, 2-型または 3-型 なるば, m -reducible である。

Proof bridge $[t_1, t_2] \times b$ は四角形で, $= \partial$
 $[t_1, t_2] \times \dot{b}$ は μ の一つの meridian に属するから,
 いずれの場合も m -reducible である。

定理の証明には, (i), (ii) の仮定のもとですべての $\{\mu, \lambda_i\}$ が $\{\mu, \lambda_i\}$ が 0, 1, 2, 3-型 のいずれかであることを確かめる。つぎの命題が定理の証明に非常に役に立つ。

Lemma 4 simple transformation $\lambda_{i-1} \xrightarrow{S} \lambda_i$ で結ばれる λ_{i-1} の二つの longitude をつなぐ bridge が存在すれば, $\lambda_i \xrightarrow{S} \lambda_{i+1}$ で結ばれる二つの longitude をつなぐ bridge が存在する。

Proof $\lambda_{i-1} = \{l_1, l_2, l_3\}$, $\lambda_i = \{l_1, l_2, l_3'\}$ で,
 l_1 と l_2 を結ぶ bridge が存在したとする。 l_3' は l_1 と l_2 を
band で結んでできる longitude であるから, λ_{i-1} にあ
って l_1 と l_3' を結ぶ bridge と, l_2 と l_3' を結ぶ bridge
が共に存在する。 simple transformation $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ は
 l_1 と l_3' を band で結ぶか, l_2 と l_3' を band で結ぶ
かのどちらかであるから, Lemma 4 が成立する。

Lemma 4 の前提の条件を $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ が満足すれば
それ以後の $\lambda_j \xrightarrow{s} \lambda_{j+1}$ ($i \leq j$) はすべてその条件を満足
することと Lemma 4 は明らかにしている。 故に結論とし
て $\{\mu, \lambda\}$ にも bridge が存在し, 従って m -reducible で
ある。

定理の証明 elementary transformation

$$\{\mu, \bar{\lambda}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_1\} \xrightarrow{s} \cdots \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda_{e-1}\} \xrightarrow{s} \{\mu, \lambda\}$$

の各 step の m.l. 系 $\{\mu, \lambda_i\}$ が 0, 1, 2, 3-型 のどれ
かであることを確かめる。 仮定(ii) より $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の
band は $\bar{\lambda} = \lambda_0$ を横切るが, bridge が存在しなければ,
isotopy で band と $\bar{\lambda}$ の交わりはなくせるから, bridge
は必ず存在するとして良い。 故に induction の出発点
の $\{\mu, \bar{\lambda}\}$ は 1, 2, 3 型 のいずれかである。

a) $\{\mu, \bar{\lambda}\}$ が 3-型の場合, この場合は $\bar{\lambda} = \lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$

Lemma 4 の前提の条件が満足されるので, inductive にすべての段階でこの条件が満たされ, 結局 $\{\mu, \lambda\}$ は m -reducible となる。

b) $\{\mu, \lambda\}$ が 1-型の場合, この場合は, $\bar{\lambda} = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$ で l_1 と l_2 を結ぶ bridge が存在したとする。もしも simple transformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ において, l_1 と l_2 が band で結ばれるなら Lemma 4 より, a) の場合と同じ理由で $\{\mu, \lambda\}$ は m -reducible となる。故に l_1 と l_3 または l_2 と l_3 を band で結び場合のみを考えれば良い。いま l_1 と l_3 が band で結ばれ新しく λ_1 の longitude l_3' ができたとする。仮定(i)よりその band は μ を横切らないことと, l_1 と l_2 にかかる bridge が存在することより, l_2 と l_3' を結ぶ bridge の数は l_2 と l_3 を結ぶ bridge の数より少なくなる。引き続き longitude-系 の simple transformation を進めると, $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude 系の交わりが減っていく。 $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude が交わらなくなった後は, $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と, $\lambda_{i-1} \xrightarrow{s} \lambda_i$ の band の交わりの中1回以上が現われるから, $\{\mu, \lambda_i\}$ は 0-型となる。 $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m$ の band と longitude が交わって

いる向はもちろん $\{\mu, \lambda\}$ は m -reducible であるから、いずれにしても reducible である。

c) $\{\mu, \lambda\}$ が 2-型の場合 この場合は $\bar{\lambda} = \lambda_0 = \{l_1, l_2, l_3\}$ において l_1 と l_2 を結び bridge と l_1 と l_3 を結び bridge が存在したとする。Lemma 4 より simple transformation $\lambda_0 \xrightarrow{s} \lambda_1$ は l_2 と l_3 を band で結び場合を存之れば良い。このとき二つの場合が考えられる。まず $\{\mu, \lambda_1\}$ が 3-型 1 になる場合であるが、この場合は a) に帰着する。つぎは $\{\mu, \lambda_1\}$ が 2-型 または 1-型 となる場合で、このときは $\mu_{m-1} \xrightarrow{s} \mu_m = \mu$ の band と λ_1 の交わりは減つていく。さらに引続く simple transformation で交わりは単調に減つていくから、b) の場合に戻る。証明終り

[1] によるとソ連の A. Volodin, V. E. Kuznetsov, A. T. Fomenko は同じような Algorithm を genus が一般の場合の Heegaard 分解に対して考えている。10⁶個の例について試したところ正しかったそうであるが、まだ証明はできていないらしい。

参照文献

- [1] A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko

The Problem of Discriminating Algorithmically the Standard Three-dimensional Sphere, Russian Math. Surveys, 29:5 (1974), p.71-74.

[2] Birman J. S. and Hilden H. M., The homeomorphism for S^3 . Bulletin of the A.M.S. vol. 79 No.5 (1973), p.1006 ~ 1010.

[3] 高橋元男, 種類 2 の Heegaard 分解 についての Birman-Hilden の定理の別証, 数理解析研究所講究録, 243, (1975).

[4] F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre, Topology, 7 (1968) p.195 ~ 203

[5] 本間龍雄, S^3 判定の Algorithm について, (多様体の低次元位置問題について), 数理解析研究所講究録, 243, (1975).