

Homology of the Kac-Moody Lie groups

京大理 河野 明 (Akira Kono)

最近 V. G. Kac と D. H. Peterson は, Kac-Moody Lie algebra に対応する, 無限次元のリー群を構成した。Kac-Moody Lie algebra のうち tier number が 1 のものは X を有限次元 Lie group として次の中心拡大であらえらる

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow X \otimes \mathbb{R}[t, t^{-1}] \rightarrow 1$$

フルーエ級数を考えることにより, $X \otimes \mathbb{R}[t, t^{-1}]$ は loop group

$$X^{S'} = \text{Map}(S', X)$$

($X, X^{(1)}$ でそれぞれ $X, X^{(1)}$ に対応する群を表わすことにする。) で実現されるので, $X^{(1)}$ は中心拡大

$$(2) \quad 0 \rightarrow S^1 \rightarrow X^{(1)} \rightarrow X^{S'} \rightarrow 0$$

であらえらる。 X が単純な時 $X^{(1)}$ が 2 連結に与えられることが知られている (Kac-Peterson)

以下では $X, X^{(1)}$ は群の対である。 X が単連結, 単純リー群の時 Bott [1] により

$$\pi_j(X) = \begin{cases} 0 & j \leq 2 \\ \mathbb{Z} & j = 3 \end{cases}$$

であることが知られている。また

$$X^{S^1} \simeq X \times \Omega X$$

であるから、中心拡大 (2) を考えると fibering

$$(3) \quad S^1 \rightarrow X^{(1)} \rightarrow X \times \Omega X$$

が存在する。fibering の homotopy 群の完全列で

$$(4) \quad \pi_2(X \times \Omega X) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1)$$

は同型である。従って X の 3 連結ファイバー空間を $X\langle 3 \rangle$ とすると次が得られる。

$$\text{定理 1} \quad X^{(1)} \simeq X \times \Omega X\langle 3 \rangle$$

$\Omega X\langle 3 \rangle$ は ΩX の 2 連結ファイバー空間だから $\Omega X\langle 3 \rangle \simeq (\Omega X)\langle 2 \rangle$ である (cf. Kac [2])

ファイバー空間

$$(5) \quad S^1 \rightarrow \Omega X\langle 3 \rangle \rightarrow \Omega X$$

の Gysin 完全列を考えると、 ΩX は Hopf 空間であり、従って $H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p)$ は Hopf algebra であり、従って

$$H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^{p^d}) \otimes A$$

($\deg t = 2$) の形だから、次が得られる。(p は素数)

定理2 $H^*(\Omega X^{<3>}; \mathbb{F}_p) \cong \Lambda(A) \otimes A \quad \deg A = 2p^d - 1$

ただし上で $d = \infty$ の時は $\Lambda(A)$ の部分になるか以下で示すように $d < \infty$ が得られる。

一方 $H^*(\Omega X; \mathbb{Z})$ は Bott [1] により torsion free 故から X の巾指数を $1 = m(1) \leq \dots \leq m(\ell)$ とするとき A の Poincaré 級数は

$$\left(\prod_{j=2}^{\ell} (1 - t^{2m(j)})^{-1} \right) \cdot (1 - t^{2p^d})^{-1}$$

である。従って この d を定めると $H^*(X^{(1)}; \mathbb{F}_p)$ がわかる (少なくとも vector space として)。 d は実は決まてゐる。 d は X と p によるので $d(X, p)$ と書く。

定理3. (1) X が古典型の時

$$d(X, p) = \begin{cases} r(n, p) & , G = SU(n) \\ r([\frac{n}{2}], 2) & , G = Spin(n) \quad p=2 \\ 1 & , G = Sp(n) \quad p=2 \\ r(2n, p) & , G = Spin(n) \text{ or } Sp(n) \quad p \text{ odd} \end{cases}$$

ただし $p^{r(n, p)-1} < n \leq p^{r(n, p)}$ である。

(2) X が例外型の時

$$d(G_2, 2) = d(F_4, 2) = 2, \quad d(E_6, 2) = 4 \quad \ell = 6, 7, 8$$

p が奇数の時は次の表を見よ。

X	G_2		F_4, E_6		E_7			E_8		
p	5,	$\neq 5$	≤ 11	> 11	3	$5 \leq p \leq 17$	> 17	3	$5 \leq p \leq 29$	> 29
$d(X, p)$	2	1	2	1	3	2	1	3	2	1

この講演の目的は上の定理3の証明である。上でわかるように $m(l) < p$ の時 $d(X, p) = 1$ であるか、これは Kac [2] により知られている。

x_3 を $H^3(X; \mathbb{F}_p)$ の生成元とし、その cohomology suspension を t とする。だから $\beta^{pd-1} \cdots \beta^1 x_3 \stackrel{(\pm 1)}{=} 0$ をみれば、

$$\tau^{pd} = \beta^{pd-1} \cdots \beta^1 t = \sigma(\beta^{pd-1} \cdots \beta^1 x_3) = 0.$$

(σ は cohomology suspension 従って $t = \sigma(x_3)$) である。定理3の $d(X, p)$ について、これを成立することは、リー群のコホモロジーの結果よりすぐにわかる。従って逆に定理3の $d(X, p)$ について $\tau^{pd(X, p)-1} \neq 0$ を示せばよい^(=註2)。まず X が古典型の場合は次のようにすればよい ($X = SU(n)$ とする)。Bott [1] によ

$$(b) \quad \lambda: \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \Omega SU(n)$$

で $\lambda^*: H^2(\Omega SU(n); \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^{n-1}; \mathbb{Z})$ が同型になるものが存在する。従って $H^*(\mathbb{C}P^{n-1}; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[a]/(a^n)$ ($\deg a = 2$) だから、これから $\tau^{pd(X, p)-1} \neq 0$ はすぐにわかる。

一方例外型の場合には別々に計算することになる。^(注3) 例えば

$$X = G_2 \quad p=2 \quad \text{とすると}$$

$$H^*(G_2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_3]/(x_3^4) \otimes \Delta(x_5)$$

$$\deg x_3 = 3, \deg x_5 = 5, \quad S_g^2 x_3 = x_5 \quad \text{である。すると}$$

$$H^*(G_2 \langle 3 \rangle; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_8] \otimes \Delta(y_9, y_{11})$$

$$\deg y_j = j \quad \text{である。従って}$$

$$H^*(\Omega G_2 \langle 3 \rangle; \mathbb{F}_2) = 0 \quad 0 < * \leq 7$$

であり $d \geq 2$ が得られる。他の場合も同様である

(注1) $p=2$ の時 $S_g^2 = \partial^1$ とする

(注2) $\tau^{p^d-1} \neq 0$ を示すべきであるが $H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p)$ が Hopf algebra なので $\tau^{p^d-1} \neq 0$ ならばいつも $\tau^{p^d-1} \neq 0$ である

(注3) $p=2$ の時 $H^*(\Omega X \langle 3 \rangle; \mathbb{F}_2)$ X が例外型は小島 [4] により計算されている。

- References -

- [1] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Michigan Math. J., 5(1958), 35-61
- [2] V.G. Kac, Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups, Inv. Math., 80(1985), 69-79
- [3] A. Kono, On the cohomology of the 2-connected cover of the loop spaces of simple Lie groups (to appear)

[4] K. Kozima, Mod 2 homology ring of the space of loops on exceptional Lie groups (in Japanese)