

フーリエ級数論に基づく不連続部分の探索法

東京理科大学理工学部情報科学科 児玉賢史 (Satoshi Kodama)

Department of Information Sciences, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

1 はじめに

フーリエ級数 (Fourier series) とは、フランスの数学者ジョゼフ・フーリエ (Joseph Fourier) により熱伝導問題の解析過程において導入された理論で、周期関数を三角関数を使って級数展開する手法のことである。フーリエ級数を用いることで、複雑な周期関数や周期信号を単純な形の周期性をもつ関数の (無限の) 和によって表現することが可能となり、現在においても信号処理や電気工学、振動解析といった分野で多岐にわたり応用されている。

上述のように自然科学全般にわたり利用されている理論ではあるが、実用上においてしばしば一種のノイズとして観測される「ギブス現象 (Gibbs phenomenon)」と呼ばれる「不連続点付近での収束の乱れ」が問題点として指摘されている。そこで本講究録では、最初にギブス現象を用いて不連続点を探索する方法を紹介する。しかし、この方法はギブス現象の持つ振動性の為、不連続点を見失う可能性を否定できない、そこで不連続探索の確実性を増す為にギブス現象の平滑化操作を施した改良版を提案する。

2 フーリエ級数とギブス現象

2.1 フーリエ級数

周期 L の関数 $f(x)$ のフーリエ級数とは、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{2n\pi}{L} x \right) + b_n \sin \left(\frac{2n\pi}{L} x \right) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \left\{ a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{L} x \right) + b_1 \sin \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \right\} + \left\{ a_2 \cos \left(\frac{4\pi}{L} x \right) + b_2 \sin \left(\frac{4\pi}{L} x \right) \right\} \\ &= \left\{ a_3 \cos \left(\frac{6\pi}{L} x \right) + b_3 \sin \left(\frac{6\pi}{L} x \right) \right\} + \cdots \end{aligned}$$

のように $f(x)$ を余弦関数と正弦関数の無限級数展開したものを指す。ここで、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ および $b_1, b_2, \dots$ はフーリエ係数と呼び、一般に次式で与えられる。

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) dx \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

以上のことから周期 L の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \right\}$$

のように形式的に記述することができる。

上記の式からも明らかなように、フーリエ級数とは $f(x)$ をさまざまな基本振動の成分に分解したものであることが分かる。具体的には、フーリエ係数 a_n 及び b_n は $f(x)$ に含まれるそれぞれの振動成分の振幅を表しており、また、 $\cos kx$ は $f(x)$ の偶関数成分、 $\sin kx$ は $f(x)$ の奇関数成分をそれぞれ表したものとなっている。

2.2 フーリエ級数の例

ここでギブス現象を視覚的に観測するために、[例 1.] および [例 2.] のフーリエ級数を求めることにする。

[例 1.] 周期 2π の図 1. のような関数 (三角パルス)

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のフーリエ級数を具体的に求める。

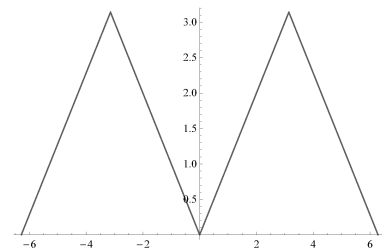


図 1. 3 角パルス

$f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$ のフーリエ係数を最初に求める。 $f(x)$ は偶関数である為、 $b_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ は明らかである。従って、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx \\ &= \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(\left[x \sin nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} \\
&= \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ -\frac{4}{\pi n^2} & (n: \text{奇数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}
\end{aligned}$$

を得る。また、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

のフーリエ級数の第1項 ($n=1$)、第2項 ($n=2$) まで、第10項 ($n=10$) まで、及び、第100項 ($n=100$) までの有限和のグラフをそれぞれ図2. に示す。

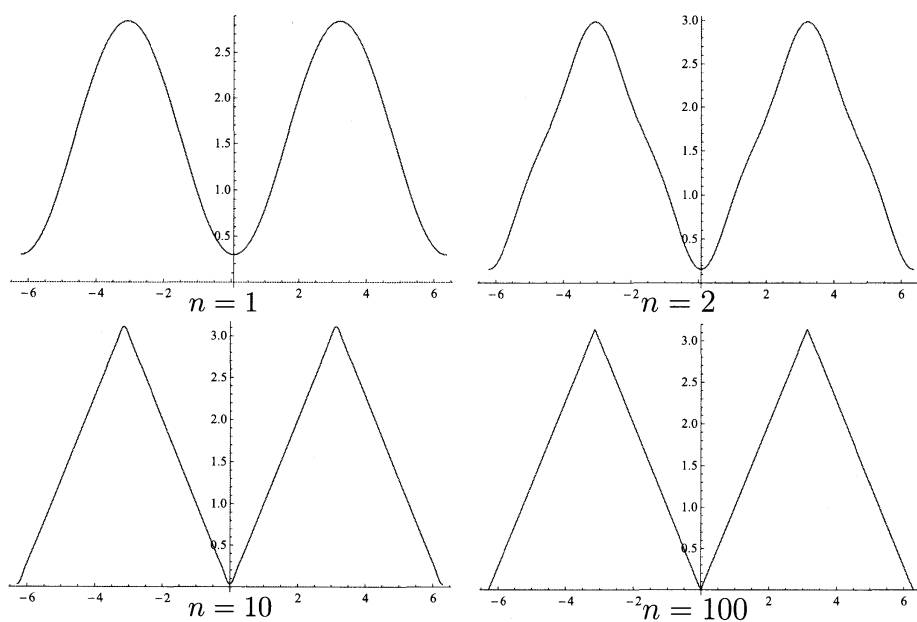


図2. フーリエ級数の有限和

[例 2.] 周期 2π の図 3. に示す関数 (矩形波)

$$\begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数を具体的に求める。

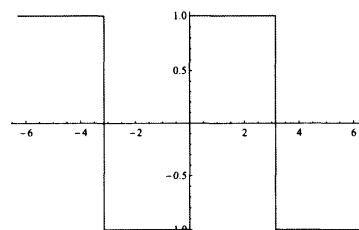


図 3. 矩形波

$f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$ のフーリエ係数を先ほどの [例 1.] 同様に求めることにする。 $f(x)$ は奇関数である為、 $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$ は明らかである。従って、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} [\cos nx]_0^\pi \\ &= -\frac{2\{(-1)^n - 1\}}{\pi n} \\ &= \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ \frac{4}{\pi n} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \end{aligned}$$

を得る。また [例 1.] と同様に、

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

のフーリエ級数の第 1 項 ($n = 1$)、第 2 項 ($n = 2$) まで、第 10 項 ($n = 10$) まで、及び、第 100 項 ($n = 100$) までの有限和のグラフをそれぞれ図 4. に示す。

2.3 ギブス現象と問題点

先述したように不連続周辺で発生する収束の乱れを一般に「ギブス現象」と呼んでいる。このギブス現象は、フーリエ係数列から構成されるフーリエ級数の有限部分和の総和項数をいくら大きくしても振動が発生してしまい無くなることはない。具体例として、先ほどの [例 1.] と [例 2.] の原点周辺での振る舞いを図 5. の (a) と (b) に示した。不連続点を含まない [例 1.] (図 5.

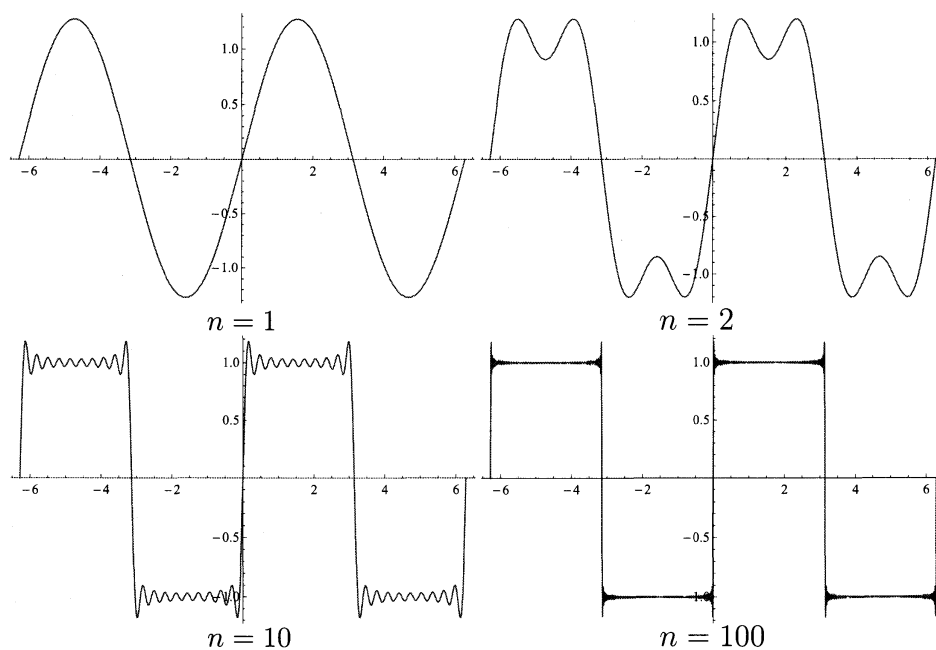


図 4. フーリエ級数の有限和

(a)) と異なり、不連続点を含む [例 2.] (図 5.(b)) の方には収束の乱れ (ギブス現象) が見て取れる。以下、周期的矩形波 ([例 2.]) を用いてギブス現象の発生と振動の大きさについて考察する。

ギブス現象を観察するに当たり、先の [例 2.] 矩形波より周期 2π のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

であることを示した。ここで第 N 項までの部分 and $S_N(x)$ は、

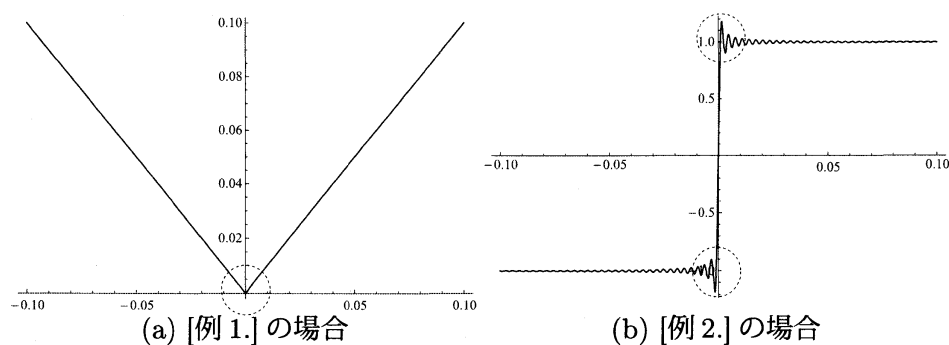


図 5. ギブス現象の有無

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots + \frac{1}{2N-1} \sin(2N-1)x \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^x \left(\cos y + \cos 3y + \cos 5y + \cdots + \cos(2N-1)y \right) dy \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2Ny}{\sin y} dy
\end{aligned}$$

のように表すことができる。よって、ギブス現象を引き起こす点は上記の関数項級数の第 N 部分 $S_N(x)$ の極値として特徴づけられる。一方、 $S_N(x)$ が極大または極小となる点は

$$\frac{d}{dx} S_N(x) = 0$$

として与えられるため、極値を与えるのは、

$$\frac{\sin 2Nx}{\sin x} = 0$$

という方程式の解となることが分かる。従って、 l を整数としたとき

$$x = \frac{\pi l}{2N}$$

がギブス現象を引き起こす点であることが分かる。

今、第 N 部分和まで計算した場合の 0 点付近の x 軸の正部分におけるギブス現象の発生が最も顕著に表れる点 (第 1 の山) ξ_N は、 $l = 1$ の場合であるから、

$$\xi_N = \frac{\pi}{2N}$$

となり、オーバーシュートする値は、

$$\begin{aligned}
S_N(\xi_N) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2N}} \frac{\sin 2Ny}{\sin y} dy \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\frac{z}{2N}}{\sin\left(\frac{z}{2N}\right)} \frac{\sin z}{z} dz
\end{aligned}$$

として記述できる。ここで、 $N \rightarrow \infty$ のとき、 $\xi_N \rightarrow 0$ となることから、真値と再生値との誤差の上限の評価に使われるギブス現象のピーク点は、総和項数が増大するに伴って不連続点に 0 の右側から 0 に向かって近づくことが分かる。よって、次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} S_N(\xi_N) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z} dz \\
&= \frac{2}{\pi} \times 1.85194 \cdots \\
&= 1.17898 \cdots
\end{aligned}$$

ここで、 N が十分大きい場合の ξ_N は 0 に近い為、 $f(\xi_N) = 1$ である。しかし、観測値は $S_N(\xi_N)$ であることから、ギブス現象によって発生する誤差 $R(\xi_N)$ は、

$$\begin{aligned} R(\xi_N) &= |f(\xi_N) - S_N(\xi_N)| \\ &= \left| 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz \right| \\ &\approx |1 - 1.17898| \\ &= 0.17898 \end{aligned}$$

となる。

上記の結果より、真値と比べて約 17.898% の誤差が発生することが分かり、フーリエ級数の有限部分和の総和項数をいくら大きくしてもギブス現象が消失しないことが示された。

3 チェザロ総和法を用いた不連続点探索

3.1 チェザロ総和法

数列 d_n における相加平均を

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k$$

と置くと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = d$$

が成り立つ。これをチェザロ総和法という。

ここでこれまでと同様に周期 L として、関数 $f(x)$ のフーリエ級数を以下のように定義する。

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos \left(\frac{2k\pi}{L} x \right) + b_k \sin \left(\frac{2k\pi}{L} x \right) \right\}$$

(a_0, a_k, b_k は $f(x)$ のフーリエ係数とした)

S_n に対してチェザロ総和法を適用すると、

$$T_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k(x)$$

となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$$

が成立する。ここで n が十分大きいとき、 $S_n(x)$ の代わりに $T_n(x)$ を用いて $f(x)$ を再生すると、ギブス現象が起こらないことが一般に知られている。

先ほどの [例 2.] に基づいてフーリエ級数をグラフ化したもの ($S_n(x)$ のグラフ) を図 6. の (a) に示した。さらにチェザロ総和法を用いて作成したグラフ ($T_n(x)$ のグラフ) を図 6. の (b) に示した。また、図 6. の (a) と (b) の比較から明らかなように、不連続点の近傍で差が大きくなることを利用して不連続点を検出することが可能である。すなわち、 $V_n = |S_n(x) - T_n(x)|$ を行うことで不連続点を探索することが可能である。 V_n を用いて探索した結果を図 6. の (c) に示した。ただし、いずれのグラフにおいても第 30 項までの有限和 ($n = 30$) としている。

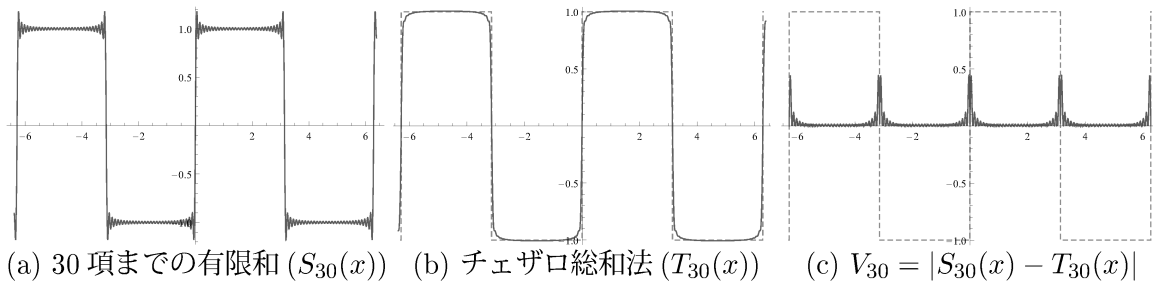


図 6. フーリエ級数の有限和とチェザロ総和法

3.2 2重チェザロ総和法

先述したように、図 6. の (c) で用いた不連続探索法は、不連続点の前後で $V_n(x) = |S_n(x) - T_n(x)|$ の値の変化が大きくなり、その極大値の中央で値が急激に小さくなる点に着目して探索している。しかしながら、この手法ではギブス現象における不連続点近傍での振動現象が残ってしまう為、不連続点を探索しにくいという問題があった。そこでこのような問題を解決するために、ここでは再度チェザロ総和法を適用することで、上記のような変化を観測できるように改良を加える (以下、このような操作法を 2 重チェザロ総和法と記述する)。

先ほどの $T_n(x)$ に対して、再度チェザロ総和法を適用することを考える。すなわち、

$$U_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k(x)$$

と置くと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = f(x)$$

が成立する。

[例 2.] に対してこの 2 重チェザロ総和法を適用したグラフを図 7. の (a) に示す。また、先ほどのチェザロ総和法を行ったグラフとの比較のために重ねたグラフを図 7. の (b) に示す。最後に、不連続点周辺での不必要な振動を連続化することにより探索しやすくした $W_{30}(x) = |U_{30}(x) - T_{30}(x)|$ のグラフを図 7. の (c) に示した。

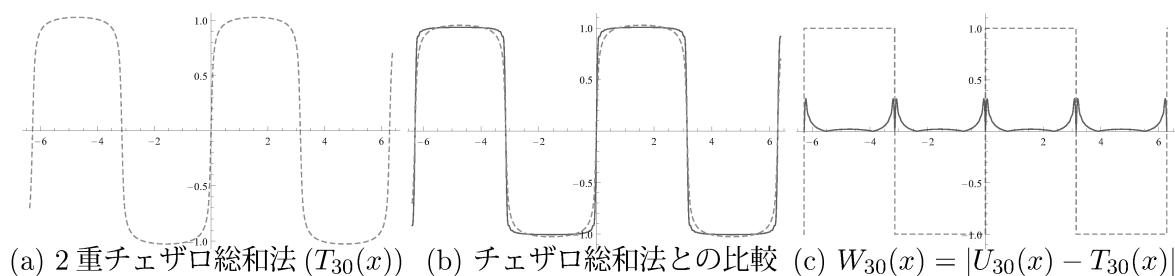


図 7.2 重チェザロ総和法による探索法

3.3 チェザロ総和法に基づく探索法

チェザロ総和法 ($V_n(x)$ または $W_n(x)$) を適用することで、前述の結果より不連続点を探索することが可能であるということが示された。最後に先ほどの $V_{30}(x)$ に基づく図 6.(c)、および、 $W_{30}(x)$ に基づく図 7.(c) の原点付近の不連続点を拡大したグラフを順に図 8. の (a) と (b) に示す。

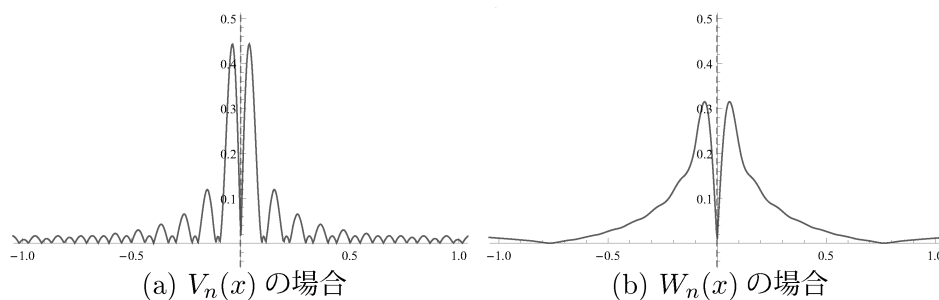


図 8. チェザロ総和法に基づく不連続探索法

上記の図 8.(a) のグラフでは、不連続点 0 に十分近い箇所でも値が 0 となる点の存在を観測することができる。その一方で、図 8.(b) では不連続点 0 の近傍以外では値が 0 となっていない。従って、2 重チェザロ総和法を用いた探索法の方が不連続点を明確にとらえられことが示された。

謝辞

京都大学数理解析研究所共同研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」において講演の機会を与えていただきました高橋渉先生と田中環先生に感謝の念を申し述べます。

参考文献

- [1] 松下泰雄, フーリエ解析 基礎と応用, 培風館, 2001.
- [2] 猪狩惺, フーリエ級数, 岩波全書, 1975.
- [3] T. W. ケルナー, 高橋 陽一郎 (訳), フーリエ解析大全 〈上〉, 朝倉書店, 1996.