

円 β アンサンブルのトレースの中心極限定理¹

鹿児島大学大学院理工学研究科 松本 詔 (Sho MATSUMOTO)²
Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

本稿は Tiefeng Jiang 氏 (University of Minnesota) との共同研究 [4] の内容を中心に記されている. Diaconis–Shahshahani [2] や Diaconis–Evans [1] により円ユニタリアンサンプルのトレースのモーメントが明示的に計算され, それを用いてトレースの中心極限定理が得られた. 我々の目標は, 彼らの結果を円直交アンサンブルや, より一般の円 β アンサンブルへと拡張することである.

1 円ユニタリアンサンプル

CUE. ユニタリ群 $U(n) = \{g \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid gg^* = I_n\}$ を考える. ユニタリ群は行列の積に関して群をなす, 代表的なコンパクトリー群である. よく知られているようにコンパクトリー群には Haar 確率測度と呼ばれる確率測度 μ が一意的に存在する ([6, §3] 参照). すなわち, $U(n)$ のボレル集合族で定義される μ は,

$$\int_{U(n)} f(g_1 g g_2) \mu(dg) = \int_{U(n)} f(g) \mu(dg), \quad \int_{U(n)} \mu(dg) = 1$$

を満たす. ここで g_1, g_2 は $U(n)$ の固定された元で, f は $U(n)$ 上の可積分関数である. このとき確率空間 $(U(n), \text{ボレル集合族}, \mu)$ を円ユニタリアンサンプル (circular unitary ensemble, CUE) と呼ぶ.

U_n をこの CUE から取り出されたランダム行列とする. 以下これを $n \times n$ CUE 行列と呼ぶ.

CUE の固有値密度. CUE 行列 U_n の固有値を $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ ($\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi)$) としたとき, その密度関数は, Weyl の積分公式 ([6, §8.1]) により

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n; 2) = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2$$

となることが知られている. 定数倍を除き, 固有値の差積の絶対値の 2 乗になっていることに注意しよう.

整数の分割. 我々はまず確率変数 $\text{Tr}(U_n^j)$ ($j, n \in \mathbb{N}$) について考察する. そのために整数の分割の記号を用いるのが都合が良い. 記号は主に Macdonald の本 [7] にしたがうことにする.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ が分割であるとは, それが有限個の正の整数からなる非増加列であるときをいう. $|\lambda| := \sum_{j=1}^l \lambda_j$ を λ のサイズといい, $|\lambda| = m$ のとき λ は m の分割であるという. l を $\ell(\lambda)$

¹確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 平成 26 年 12 月 16 日 ~ 19 日

²shom@sci.kagoshima-u.ac.jp

で表し, λ の長さという. 正の整数 r に対し, $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ の中で r に等しいものの個数を $m_r(\lambda)$ とかく: $m_r(\lambda) = |\{j \mid 1 \leq j \leq \ell(\lambda), \lambda_j = r\}|$. また, 自然数 z_λ を

$$(1.1) \quad z_\lambda = \prod_{r \geq 1} r^{m_r(\lambda)!} m_r(\lambda)!$$

と定める. たとえば $\lambda = (5, 2, 2, 2, 1)$ ならば, $|\lambda| = 5 + 2 + 2 + 2 + 1 = 12$, $\ell(\lambda) = 5$, $z_\lambda = 1 \times 2^3 3! \times 5 = 240$ である.

Diaconis–Shahshahani の結果. ここで Diaconis–Shahshahani [2] の結果を紹介しよう. 行列 U と分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ に対し,

$$p_\lambda(U) = \prod_{j=1}^l p_{\lambda_j}(U), \quad p_r(U) = \text{Tr } U^r \quad (r = 1, 2, \dots)$$

と定める. たとえば $p_{(5,2,2,2,1)}(U) = (\text{Tr } U^5)(\text{Tr } U^2)^3(\text{Tr } U)$ となる. Diaconis–Shahshahani [2] は次のように CUE 行列のトレースのモーメントに対する明示公式を得た.

定理 1.1 (Diaconis–Shahshahani [2]). U_n を $n \times n$ CUE 行列とする. μ, ν を整数の分割とする. $n \geq |\mu| \vee |\nu|$ ならば

$$(1.2) \quad \mathbb{E}[p_\mu(U_n) \overline{p_\nu(U_n)}] = \delta_{\mu\nu} z_\mu.$$

ここで $\delta_{\mu\nu}$ はクロネッカーのデルタであり, z_μ は (1.1) で定まる.

この公式において, 以下の点に注意してほしい.

- すべてのモーメントではなく $n \geq |\mu| \vee |\nu|$ という仮定がある. $n < |\mu|$ または $n < |\nu|$ のときはこの主張は成立しない. たとえば自明な例ではあるが, $n = 1$ のときはどのような μ と ν に対しても $\mathbb{E}[p_\mu(U_1) \overline{p_\nu(U_1)}] = \int_0^{2\pi} e^{i|\mu|\theta} \overline{e^{i|\nu|\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{|\mu|, |\nu|}$ となり, z_μ は現れない.
- (1.2) の右辺は n に依らない形である. よって n が十分に大きければ $\mathbb{E}[p_\mu(U_n) \overline{p_\nu(U_n)}]$ は n に依存しない.
- (1.2) の右辺は μ と ν が等しいときのみ消えない. よって n が十分に大きければ $p_\mu(U_n)$ たちは「直交」する.
- (1.2) の右辺は z_μ というとても簡単な形で与えられている.

中心極限定理. 定理 1.1 を用いて, 確率変数 $\{\text{Tr}(U_n^k)\}_{n,k=1,2,\dots}$ の $n \rightarrow \infty$ における中心極限定理を得ることができる. 複素標準正規分布を思い出そう. ξ, η を独立で, ともに実標準正規分布にしたがう確率変数とする. このとき複素数値確率変数 $\xi^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\eta)$ は複素標準正規分布にしたがうという. $\mathbb{E}[\xi^C] = 0$, $\mathbb{E}[|\xi^C|^2] = 1$ が成り立つ.

k を (固定された) 正の整数, $\xi_1^{\mathbb{C}}, \dots, \xi_k^{\mathbb{C}}$ を i.i.d. で複素標準正規分布をもつとする. このとき, 分割 $\mu = (1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, k^{a_k})$, $\nu = (1^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, k^{b_k})$ に対し

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^k (\sqrt{j} \xi_j^{\mathbb{C}})^{a_j} \overline{(\sqrt{j} \xi_j^{\mathbb{C}})^{b_j}} \right] = \delta_{\mu\nu} z_{\mu}$$

が成り立つことが容易に分かる. (1.2) と比較すると, n を固定したとき, $(\text{Tr}(U_n^1), \text{Tr}(U_n^2), \dots, \text{Tr}(U_n^k))$ と $(\sqrt{1}\xi_1^{\mathbb{C}}, \sqrt{2}\xi_2^{\mathbb{C}}, \dots, \sqrt{k}\xi_k^{\mathbb{C}})$ の混合モーメントが, 高次を除いて一致することが見てとれる. 標準的な moment method を適用することで次の中心極限定理が得られる.

系 1.2. U_n を $n \times n$ CUE 行列とする. 各 $k \geq 1$ に対し, 次の分布収束が成立する.

$$(\text{Tr}(U_n^1), \text{Tr}(U_n^2), \dots, \text{Tr}(U_n^k)) \xrightarrow{\text{distribution}} (\sqrt{1}\xi_1^{\mathbb{C}}, \sqrt{2}\xi_2^{\mathbb{C}}, \dots, \sqrt{k}\xi_k^{\mathbb{C}}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

定理 1.1 の証明. [2] における証明を簡単に紹介しよう. 証明は全く確率論的ではない. 表現論, 特に対称群とユニタリ群の指標の理論を用いる. n 変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する Schur 多項式とは, 長さ $\ell(\lambda)$ が n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (ただし $\lambda_{\ell(\lambda)+1} = \dots = \lambda_n = 0$ とおく) に対し

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + n - i})_{1 \leq i, j \leq n}}{\det(x_j^{n-i})_{1 \leq i, j \leq n}}$$

で定義される ([7, Ch. 1]). 有理式に見えるが, 分子は交代式で分母は Vandermonde の行列式であるため, 割り切れて対称多項式を定める. より一般に $n \times n$ 行列 A に対して, $s_{\lambda}(A) = s_{\lambda}(a_1, \dots, a_n)$ と定める. ただし $a_1, \dots, a_n$ は A の固有値. また $\ell(\lambda) > n$ のときは $s_{\lambda}(A) = 0$ と定める.

Schur 多項式はユニタリ群の既約表現の指標なので, Haar 測度に関する積分において正規直交系をなす. すなわち次の式が成り立つ.

$$(1.3) \quad \mathbb{E}[s_{\lambda}(U_n) \overline{s_{\rho}(U_n)}] = \delta_{\lambda\rho} \delta(\ell(\lambda) \leq n).$$

ここで $\delta(\ell(\lambda) \leq n)$ は, $\ell(\lambda) \leq n$ のとき 1 でそれ以外では 0 を表す.

では, 定理 1.1 の証明に戻ろう. まず関数 p_{μ} を s_{λ} たちで展開する.

$$p_{\mu} = \sum_{\lambda} \chi_{\mu}^{\lambda} s_{\lambda}.$$

和は $|\lambda| = |\mu|$ なる分割 λ 全体を走る. ここで χ_{μ}^{λ} は対称群の指標値を表していて, $\mathbb{Z}$ に値をとる. この等式は Frobenius の指標公式と呼ばれるよく知られた古典的なものである. これによりまず

$$\mathbb{E}[p_{\mu}(U_n) \overline{p_{\nu}(U_n)}] = \sum_{\lambda} \sum_{\rho} \chi_{\mu}^{\lambda} \chi_{\nu}^{\rho} \mathbb{E}[s_{\lambda}(U_n) \overline{s_{\rho}(U_n)}]$$

と展開される. 次に Schur 多項式の直交性 (1.3) から

$$\mathbb{E}[p_{\mu}(U_n) \overline{p_{\nu}(U_n)}] = \sum_{\lambda} \chi_{\mu}^{\lambda} \chi_{\nu}^{\lambda}$$

となる. ここで和は $|\lambda| = |\mu| = |\nu|$ かつ $\ell(\lambda) \leq n$ なる λ 全体を走り, 特に $|\mu| \neq |\nu|$ のときは $\mathbb{E}[p_\mu(U_n)\overline{p_\nu(U_n)}] = 0$ となる. ところが定理の仮定 $n \geq |\mu| \vee |\nu|$ から, 条件 $\ell(\lambda) \leq n$ は自動的にしたがう. よって λ は $|\lambda| = |\mu| (= |\nu|)$ となる分割全体を走る. 最後に対称群の指標の直交性から, 直前の式は $\delta_{\mu\nu} z_\mu$ に等しいことが直ちにしたがう. 以上により定理 1.1 の証明が完了した.

2 円 β アンサンブル

前章で Diaconis–Shahshahani による CUE の結果を得た. これを円 β アンサンブルまで拡張することが我々の目標である.

COE, CSE. U_n を $n \times n$ CUE 行列という. ランダム行列 $V_n^{(1)} := U_n U_n^T$ ($\cdot^T$ は転置行列を表す) を COE 行列という. また $V_n^{(4)} := U_{2n} U_{2n}^D$ を CSE 行列という. ただし $U_{2n}^D = J_n U_{2n}^T J_n^T$, $J_n = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$ である. $V_n^{(4)}$ は $2n$ 次の複素行列であるが, n 次の四元数行列と自然に同一視することもできる. なお, COE, CSE はそれぞれ circular orthogonal/symplectic ensemble の略である. また $V_n^{(2)} := U_n$ とおく. これら 3 種類のランダムユニタリ行列 $V_n^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2, 4$) の集団を, まとめて Dyson の円アンサンブル [3] という.

$V_n^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2, 4$) の固有値密度関数は

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n; \beta) = \frac{\Gamma(1 + \beta/2)^n}{(2\pi)^n \Gamma(1 + \beta n/2)} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^\beta \quad (\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, 2\pi))$$

で与えられることが知られている. $\beta = 2$, すなわち CUE のときは既に前章で述べた.

C β E. β を正の実数, n を正の整数とする. $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ が確率分布 $f(\theta_1, \dots, \theta_n; \beta) d\theta_1 \cdots d\theta_n$ に従う確率変数であるとき, ランダム列 $Z_n^{(\beta)} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ の集団を円 β アンサンブル (circular β -ensemble, C β E) という. $\beta = 1, 2, 4$ のときはそれぞれ COE, CUE, CSE の固有値分布に他ならない. 一般の $\beta > 0$ に対しても, これを固有値分布にもつようなランダム行列 $V_n^{(\beta)}$ の構成法が知られている ([5]).

トレースの計算例. 我々の最初の目的は, CUE ($\beta = 2$) の場合である定理 1.1 を一般の β へ拡張することである. 分割 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ に対し

$$p_\mu(Z_n^{(\beta)}) = \prod_{j=1}^l p_{\mu_j}(Z_n^{(\beta)}), \quad p_r(Z_n^{(\beta)}) = p_r(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = \sum_{k=1}^n e^{ir\theta_k} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

とおく.

例を見よう. 以下 $\alpha = 2/\beta$ とする. $\beta = 1, 2, 4$ はそれぞれ $\alpha = 2, 1, 1/2$ に対応する. 後述する Jack 多項式の理論を用いて, 次の例が代数的に計算できる: $n \geq 2$ のとき

$$(2.1) \quad \mathbb{E} \left[|p_2(Z_n^{(\beta)})|^2 \right] = \frac{2\alpha n(n^2 + 2(\alpha - 1)n + \alpha^2 - 3\alpha + 1)}{(n + \alpha - 1)(n + 2\alpha - 1)(n + \alpha - 2)}.$$

$\beta = 2$ のときは単にこれは $\mathbb{E}[|p_2(U_n)|^2] = 2$ となる. 他の例をみよう. $n \geq 2$ のとき

$$(2.2) \quad \mathbb{E} \left[p_2(Z_n^{(\beta)}) \overline{p_{(1,1)}(Z_n^{(\beta)})} \right] = \frac{2\alpha^2(\alpha-1)n}{(n+\alpha-1)(n+2\alpha-1)(n+\alpha-2)}.$$

$\beta = 2$ のときこの式は 0 となる.

定理 1.1 の直後に注意したことを思い出そう. そこで述べられた CUE のときの良い性質は最早 $\beta \neq 2$ では破綻している. すなわち, n がいくら大きな数でも $\mathbb{E} \left[p_\mu(Z_n^{(\beta)}) \overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})} \right]$ は n に依存し, たとえ $\mu \neq \nu$ でも消えずに簡単な値にならない. より一般の μ, ν ではますます複雑になり, 単純な閉じた形で表示することは不可能に思える. そこで我々はモーメントの具体的な等式表示は諦めて, 不等式により評価する. 次のような結果を得た.

モーメントに関する主定理.

定理 2.1 (Jiang-M. [4]). 定数 A, B を

$$A = A(n, m, \alpha) = \left(1 - \frac{|\alpha-1|}{n-m+\alpha} \delta(\alpha \geq 1) \right)^m,$$

$$B = B(n, m, \alpha) = \left(1 + \frac{|\alpha-1|}{n-m+\alpha} \delta(\alpha < 1) \right)^m$$

により定義する. ここで $\delta(\dots)$ は, いつものように $(\dots)$ の中身が正しいときに 1, そうでなければ 0 を与えるものとする.

(i) μ が m の分割で, $n \geq m$ ならば,

$$A \leq \frac{\mathbb{E} \left[|p_\mu(Z_n^{(\beta)})|^2 \right]}{\alpha^{\ell(\mu)} z_\mu} \leq B.$$

(ii) μ, ν が m の異なる分割で, $n \geq m$ ならば,

$$\left| \mathbb{E} \left[p_\mu(Z_n^{(\beta)}) \overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})} \right] \right| \leq \max\{|A-1|, |B-1|\} \sqrt{\alpha^{\ell(\mu)+\ell(\nu)} z_\mu z_\nu}.$$

(iii) $|\mu| \neq |\nu|$ のときは $\mathbb{E} \left[p_\mu(Z_n^{(\beta)}) \overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})} \right] = 0$.

$\beta = 2$ のときは定理 1.1 の「等式」を復元することに注意せよ.

CUE のときと同様に moment method により次の中心極限定理がいえる.

系 2.2. 各 $k \geq 1$ に対し, 次の分布収束が成立する.

$$(p_1(Z_n^{(\beta)}), p_2(Z_n^{(\beta)}), \dots, p_k(Z_n^{(\beta)})) \xrightarrow{\text{distribution}} \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 1}{\beta}} \xi_1^C, \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{\beta}} \xi_2^C, \dots, \sqrt{\frac{2 \cdot k}{\beta}} \xi_k^C \right). \quad (n \rightarrow \infty)$$

定理 2.1 の証明と Jack 多項式. 定理 1.1 の証明では, 表現論, 特に指標の理論を用いた. $C\beta E$ においても基本的なアイディアは同じである. しかし Schur 多項式の代わりに Jack 多項式 ([7, §VI.10]) を用いる.

Jack 多項式 $J_\lambda^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n)$ (λ は長さが n 以下の分割) は n 変数対称多項式であり, $\alpha = 1$ のとき Schur 多項式に定数倍を無視すれば一致する. より正確に述べるために, 分割に関する用語を追加しよう. 分割 λ に対し, 対応する Young 図形 $Y(\lambda)$ を考える. たとえば $\lambda = (5, 2, 2, 2, 1)$ のときは

$$Y(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

である. $Y(\lambda)$ の転置 (対角における鏡映) を与える分割を $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ と書き, λ の共役な分割という. $\lambda = (5, 2, 2, 2, 1)$ に対し,

$$\lambda' = (5, 4, 1, 1, 1), \quad Y(\lambda') = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

である. 分割 λ に対し,

$$h(\lambda) = \prod_{(i,j) \in Y(\lambda)} (\lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1)$$

を λ のフック積という. ここで積 $\prod_{(i,j) \in Y(\lambda)}$ は Young 図形の箱全体を走り, $\prod_{(i,j) \in Y(\lambda)} = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i}$ の意味である. 次の式のように各箱に $\lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$ の値を書きこんで, それらをすべて掛けると計算できる.

$$\lambda = (4, 2, 2), \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & & \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array}, \quad h(\lambda) = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

話を Jack 多項式に戻そう. Jack 多項式 $J_\lambda^{(\alpha)}$ は $\alpha = 1$ のとき, Schur 多項式 s_λ の $h(\lambda)$ 倍になる: $J_\lambda^{(1)} = h(\lambda)s_\lambda$. Jack 多項式は次の直交性を満たす: $\alpha = 2/\beta$ に注意して

$$\mathbb{E} \left[J_\lambda^{(\alpha)}(Z_n^{(\beta)}) \overline{J_\mu^{(\alpha)}(Z_n^{(\beta)})} \right] = \delta_{\lambda\mu} \cdot \delta(\ell(\lambda) \leq n) \cdot C_\lambda(\alpha) \mathcal{N}_\lambda^\alpha(n),$$

ただし,

$$C_\lambda(\alpha) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + 1)(\alpha(\lambda_i - j) + \lambda'_j - i + \alpha),$$

$$\mathcal{N}_\lambda^\alpha(n) = \prod_{(i,j) \in Y(\lambda)} \frac{n + (j-1)\alpha - (i-1)}{n + j\alpha - i}.$$

さらに, 関数 p_μ を Jack 多項式で展開すると,

$$p_\mu = \alpha z_\mu \sum_\lambda \frac{\theta_\mu^\lambda(\alpha)}{C_\lambda(\alpha)} J_\lambda^{(\alpha)}$$

となる. ここで, $\theta_\mu^\lambda(\alpha)$ は α について有理数係数の多項式で, Jack 指標と呼ばれている. $\alpha = 1$ では $\theta_\mu^\lambda(1) = z_\mu^{-1} h(\lambda) \chi_\mu^\lambda$ となり, 本質的には対称群の既約指標値 χ_μ^λ になる.

以上の性質を用いると, 定理 1.1 と同様の証明で次を得る.

命題 2.3. μ と ν が m の分割ならば, 次が成り立つ.

$$(2.3) \quad \mathbb{E} \left[p_\mu(Z_n^{(\beta)}) \overline{p_\nu(Z_n^{(\beta)})} \right] = \alpha^{\ell(\mu) + \ell(\nu)} z_\mu z_\nu \sum_{\substack{\lambda: |\lambda|=m, \\ \ell(\lambda) \leq n}} \frac{\theta_\mu^\lambda(\alpha) \theta_\nu^\lambda(\alpha)}{C_\lambda(\alpha)} \mathcal{N}_\lambda^\alpha(n).$$

m が小さいときは, この公式からモーメントの明示的な値を計算することが可能である. 実際 (2.1), (2.2) はこれを用いて求めた.

さて, $\beta = 2$ のときと最も大きな違いは, 項 $\mathcal{N}_\lambda^\alpha(n)$ がある点である. 実際, この項がなければ Jack 指標の直交性

$$\sum_\lambda \frac{\theta_\mu^\lambda(\alpha) \theta_\nu^\lambda(\alpha)}{C_\lambda(\alpha)} = \delta_{\mu\nu} (\alpha^{\ell(\mu)} z_\mu)^{-1},$$

から (2.3) はもっと簡単に記述できる. $\mathcal{N}_\lambda^{(\alpha=1)}(n) = 1$ だが, $\alpha \neq 1$ では $\mathcal{N}_\lambda^{(\alpha)}(n)$ が邪魔をして Jack 指標の直交性がそのまま適用できず, (2.1), (2.2) で見たように n の入った複雑な式になる.

我々の定理 2.1 の証明の最終段階は, $\mathcal{N}_\lambda^\alpha(n)$ を λ に依らないように定数 A, B で評価したあと, Jack 指標の直交性を用いることである. 詳しい証明は論文 [4] に譲ろう.

より強い中心極限定理. $\beta = 1$ と 4 (COE と CSE) の場合に限るが, より強い形の中心極限定理を得た. COE の場合のみ記そう.

定理 2.4 (Jiang-M. [4]). $V_n^{(1)}$ を COE 行列とする. 複素数列 $\{a_j\}_{j=1}^\infty, \{b_j\}_{j=1}^\infty$ は $\sum_{j=1}^\infty j(|a_j|^2 + |b_j|^2) \in (0, \infty)$ を満たすとする. このとき, 確率変数

$$X_n := \sum_{j=1}^\infty \left(a_j \operatorname{Tr}[(V_n^{(1)})^j] + b_j \operatorname{Tr}[(V_n^{(1)})^{-j}] \right)$$

は, $n \rightarrow \infty$ で $U + iV$ に弱収束する. ここで, ランダムベクトル (U, V) は次の共分散をもつ平均 0 の 2 次元実正規分布に従う.

$$\mathbb{E}[U^2] = \sum_{j=1}^{\infty} j|a_j + \overline{b_j}|^2, \quad \mathbb{E}[V^2] = \sum_{j=1}^{\infty} j|a_j - \overline{b_j}|^2, \quad \mathbb{E}[UV] = 2\Im\left(\sum_{j=1}^{\infty} ja_j b_j\right).$$

この定理の CUE 版 (のより強い主張) は, Diaconis–Evans [1] により得られている. CUE では定理 1.1 のようにモーメントが簡単に記述できるので, 楽に証明できる. 定理 2.4 の我々の証明も標準的な moment method を用いるが, CUE のときと異なりモーメントの評価が困難になる. 定理 2.1 で得た不等式に加え, 次の命題が必要になる.

命題 2.5 ([4]). ある定数 $K > 0$ が存在して, 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{E}[|p_m(Z_n^{(\beta)})|^2] \leq Km$.

定理 2.4 の同様の結果は CSE に対しても成立する. CUE の場合は上で述べたように [1] で得られている. より一般の $\beta > 0$ に対して, 次が予想される.

予想 2.1. $\beta > 0$ とし, $C\beta \mathbb{E} Z_n^{(\beta)}$ を考える. 複素数列 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}, \{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $\sum_{j=1}^{\infty} j(|a_j|^2 + |b_j|^2) \in (0, \infty)$ を満たすとする. このとき, 確率変数

$$X_n := \sum_{j=1}^{\infty} (a_j p_j(Z_n^{(\beta)}) + \overline{b_j p_j(Z_n^{(\beta)})})$$

は, $n \rightarrow \infty$ で $U + iV$ に弱収束する. ここで, ランダムベクトル (U, V) は次の共分散をもつ平均 0 の 2 次元実正規分布に従う.

$$\mathbb{E}[U^2] = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} j|a_j + \overline{b_j}|^2, \quad \mathbb{E}[V^2] = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} j|a_j - \overline{b_j}|^2, \quad \mathbb{E}[UV] = \frac{2}{\beta} \Im\left(\sum_{j=1}^{\infty} ja_j b_j\right).$$

参考文献

- [1] P. Diaconis and S. N. Evans, *Linear functionals of eigenvalues of random matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 7, 2615–2633.
- [2] P. Diaconis and M. Shahshahani, *On the eigenvalues of random matrices*, J. Appl. Probab. 31A (1994), 49–62.
- [3] F. J. Dyson, *Statistical theory of energy levels of complex systems*, I, II, III. J. Math. Phys. 3, 140–156, 166–175, 1191–1198.
- [4] T. Jiang and S. Matsumoto, *Moments of traces for circular beta-ensembles*, To appear in Ann. Probab. arXiv:1102.4123.
- [5] R. Killip and I. Nenciu, *Matrix models for circular ensembles*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 50, 2665–2701.
- [6] 小林俊行・大島利雄, リー群と表現論, 岩波書店.
- [7] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995.