

Compactification of Complete Kähler Manifolds

都立大理 辻 元

§ 0. Introduction

Aubin-Yau により 1977 年, Calabi 予想が解決され
1-st Chern class が 0 または負の compact Kähler 多様
体は, smooth Kähler-Einstein metric を許容すること
が証明された。これにより, compact Kähler manifolds
の Ricci curvature を controll する道が開かれた。こ
れは, PDE (partial differential equation) の立場か
ら見れば, elliptic complex Monge-Ampère equation
の global solution の研究が可能になったことを意味する
。

一方, 代数幾何学に於て, projective manifolds/ $\mathbb{C}$
を compact Kähler manifolds と考えた時, その
Ricci curvature を controll できれば, 多くの応用が
期待できる。特に Minimal-Model Conjecture との
関連は深く, 宮岡不等式や uniformization の問題は,
Kähler-Einstein metrics の理論の延長線上にある。

また, degenerate Kähler-Einstein metrics は,

Minimal model conjecture そのものに深い関係がある
と考えられ, さらに variety の退化を記述する新たな方法
として期待されている。

しかし, 現在のところ minimal model conjecture に
微分幾何学的に approach するには, degenerate Monge-
Ampère equation を深く解析する必要があり, 既成の
PDE の理論では, 解析が難しいのが現状である。

このように, 困難を含んでいるとは言え Ricci curvature
を control することにより代数多様体を研究することは,
巨大な可能性を秘めていると筆者は確信する。

実際, こゝを示唆する事実として, Fano manifolds の
boundedness は, Ricci curvature の下からの
control と全く同値であることが示され, 部分的にはあ
るが示すことが可能である。

さて, ここでは, 或る種の complete Kähler manifolds
の quasi-projectivity を, 上記の transcendental
な方法で示そう。このような応用例を示すのは, 筆者が,
この定理を典型的な応用例の一つと考えるからであり, また
新しい種類の応用と考えるからである。

さて, 本稿で解説するのは, 次の定理である。

Theorem 1. (M^m, ω) : complete Kähler manifold such that

- 1) $\text{Ric}_M < 0$,
- 2) M is $(m-2)$ -very strongly pseudconcave,
- 3) $\tilde{M}$ (the universal covering of M) is Stein.

Then M is quasi projective □

2)の条件については §2 で解説することにした。この定理の意味を考えよう。実は、Theorem 1 は、次の Corollary を抽象化した形をしている。

Cor. 1. (Satake, Baily-Borel)

D : bounded symmetric domain

$\Gamma \subset \text{Aut } D$: arithmetic subgroup (discrete)

Then $\Gamma \backslash D$ is quasi projective □

Theorem 1 の証明は、Cor 1 を関数論的方法で証明しようとした。未完に終わった Andreotti - Grauert の方法を complex differential geometry を使って完成させたものと言うことができる。簡単な初等微分幾何学を使うと、次も得られる。

Theorem 2. (M, ω) : complete Kähler manifold s.t.

- 1) M has very strongly 2-negative curvature,
- 2) M has only cusps,
- 3) $\text{vol}(M) < \infty$.

Then M is quasi-projective □

これは、Theorem 1 を微分幾何学的に解釈し直したものと
 言える。直接の系として次が得られる。

Cor. 2. (M, ω) : complete Kähler manifold
 such that

- 1) M is of negative curvature.
- 2) $\text{vol}(M) < \infty$

Then M is quasi projective. □

Cor. 2の方が、幾何学的には、美しい形をしている。1
 が1. Theorem 2は Cor. 1を imply するが、Cor. 2は、
 Cor. 1を imply しない。即ち $\text{rank } D = 1$ の時のみ
 Cor. 1は、Cor. 2より従う。

Theorem 1は、現 I.A.S. の A. Nadel 氏との共同研究で
 得られたものである。

§1. L^2 Riemann-Roch inequality.

この節では以上の結果の証明の一つの主要な道具となる L^2 -Riemann-Roch inequality を解説する。これは、noncompact complete Kähler manifolds の上の positive line bundles の curvature form の積分とその tensor 積の L^2 -holomorphic sections の次元の asymptotic growth を関連づけるものである。compact の場合の対応物は、Kodaira vanishing + weak Riemann-Roch theorem になる。証明も、mini-max principle を使って、境界付き多様体の場合に帰着させ、compact case と類似の方法で得られる。ここで、主要な困難は、連続スペクトルの存在だが、これは Kodaira vanishing の証明と同じく Bochner-Kodaira formula を使って乗り越えることができる。

Theorem 3. (M, ω) : complete Kähler manifold

L : hermitian line bundle $/M$,

$c_1(L)$: first Chern form of L .

Assume that

$$1) \ c_1(L) > c\omega \quad (c > 0, \text{ const}),$$

$$2) \ c_1(L) + c_1(K_M) > 0$$

Then.

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \uparrow \infty}} \frac{1}{m} \dim H_{0,1}^0(M, L^{\otimes m}) \geq \frac{1}{m!} \int_M c_1^m(L)$$

□

この定理で $H_{0,1}^0(\)$ は L^2 -holomorphic sections の空間を表わす。

証明は、全く解析的なので、ここでは詳説を避ける。

詳しくは [N-T] を参照して下さい。

§2. Theorem 1 の証明

Theorem 1 の証明は、関数論的な部分を除けば、essential な道具は、Kähler-Einstein metric, Bers の同時代化定理、 L^2 -Riemann-Roch theorem の3つである。

まず、Theorem 1 の ii) の条件を解説しておく。

Definition X^m : complex manifold. ($m = \dim X$)

X^m is very strongly $(m-q)$ -pseudo-concave iff. there exists a continuous exhaustion

$v: X \rightarrow (-\infty, 0]$ such that

1) v is plurisubharmonic outside a compact subset of

2) $\bar{\partial} \bar{\partial}^* v$ has at least q positive eigenvalues outside a compact subset of X .

この定義から明らかな様に. $\text{very strongly } 0\text{-pseudoconcave} = \text{strongly pseudoconcave}$ であるか5.

Theorem 1 の条件は. $\text{strongly pseudoconcave}$ より大分弱い。また Cor 2 で $\Gamma \setminus D$ is $\text{strongly pseudoconcave} \iff \text{rank } D = 1$ であることも注意しておく。

以下 M を Theorem 1 の complete Kähler manifold とする。

Prop. 1. M は. projective variety の open subset と普通の位相で biholomorphic になる。

Proof. Hörmander の L^2 -estimate (Kodaira vanishing theorem の noncompact version) により M の任意の相対コンパクト部分集合は. 十分大きな ν をとると $H_{0, \nu}^0(M, K_M^{\otimes \nu})$ に associate した morphism により projective space に locally closed な埋め込みをもつ。要点は. ν が. 部分集合を変えたとき. いくらでも大きくなることのないようにできることを示すことにある。

その前にまず. image が代数的なコンパクト化をもつことを見ておこう。

Lemma 1 (Andreotti) X : pseudoconcave manifold
 L : line bundle on X

$\Rightarrow \exists C > 0$ positive s.t.
 $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(L^{\otimes \nu})) < C\nu^{\dim X}$

for $\nu \gg 0$

□

この補題から、 ν を十分大きくとると有理写像

$\Phi_{|\nu K_M|}: M \dashrightarrow \text{Proj } H^0(M, K_M^{\otimes \nu})$ は image Λ の birational map になり、image は projective closure をもつ。これを $\bar{N}$ とおき $N = \Phi_{|\nu K_M|}(M)$ とおく。ところが、 $\bar{M}$ が Stein であることから M は absolutely minimal となり

$$\Phi_{|\nu K_M|}^{-1}: N \longrightarrow M$$

は morphism となる。 ν を十分大きくとると N の代数性から

N は nonsingular と仮定してよい。従って $B_\nu \Phi_{|\nu K_M|}$

は $\Phi_{|\nu K_M|}^{-1}$ による N の因子の image となる。ところが、

pseudconcavity と Morse 理論から N に含まれる $\Phi_{|\nu K_M|}^{-1}$ の exceptional divisor は有限個である。よって

$B_\nu \Phi_{|\nu K_M|}$ は有限個の既約成分からなる。これから

Noetherian induction により Prop. 4 が従う。□

ここまでは、とり立てて新しい手法を使っているわけではない。問題は、 M が Zariski open になることの証明にある。

M は Ricci negative であるが、もっと良い計量を入れることを考えよう。Kähler-Einstein metric を構成する。

しかし、 M 自身に Kähler-Einstein 計量を入れるのには、本質的な障害があって上手く行かない。そこで、 M から適当に因子を除くことを考える。

まず、 M の projective compactification $\bar{M}$ で smooth なものを一つとり、必要なら適当に blow up して $\bar{M}-M$ 内の maximal divisor D が normally crossings になるようにする (D の存在は、 M の pseudoconvexity から従う)。次に、 $\bar{M}$ 上の very ample divisor H で次の各条件を満たすものとする。

- (1) $H+D$ は、normally crossings.
- (2) $K_{\bar{M}}+D+H$ は ample
- (3) $M_H^* = \bar{M}-H-D$ は bounded pseudocover domain で cover される。

(3) の条件のみが、nontrivial であるが、これは Bers の同時一致化定理から従う。

ここで

$$M_H = M - H$$

とおく。さて、 M_H, M_H^* に Kähler-Einstein 計量を入れる。

Lemma 2. M_H は $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域で uniformize される。

ここで次の2つの定理を引用しよう。

Theorem (Mok-Yau) $\square$: bdd. pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^m$: Then there exists unique Kähler-Einstein metric ω such that

$$\omega = -\text{Ric}\omega$$

on $\square$ and ω is complete.

Theorem (R. Kobayashi) Let M be a projective manifold / $\mathbb{C}$ and let D be a divisor on M with only simple normal crossings.

If $K_M + D$ is ample, then there exists a unique complete Kähler-Einstein metric on $M - D$ such that

$$\omega = -\text{Ric}\omega \quad \square$$

この2つの定理から M_H 上に complete Kähler-Einstein metric ω_E で

$$\omega_E = -\frac{1}{2\pi} \text{Ric}\omega_E$$

を満たすものが有り. M_H^* 上に complete Kähler-Einstein metric ω_E^* で

$$\omega_E^* = -\frac{1}{2\pi} \text{Ric} \omega_E^*$$

を満たすものが入ることが解る。

ここで Kähler mfd (N, ω) に対し

$$\text{Ric}_\omega = -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \omega^m$$

であることに注意しよう。これは Kähler-Einstein 計量は、本質的にその体積形式により、定まることを示している。我々の次の目標は、 $\omega_E = \omega_E^*$ on M_H を示すことである。この部分で、 L^2 -Riemann-Roch theorem が、本質的な役割を果たす。上の注意から、体積形式の一致のみ示せばよい。

$$\text{Lemma 3.} \quad (\omega_E^*)^m \leq \omega_E^m$$

(証明) inclusion $(M_H, \omega_H) \hookrightarrow (M_H^*, \omega_H^*)$ に Ahlfors-Yau の Schwarz lemma を適用すればよい。口
さて今度は、逆向きの不等式を考えよう。

Lemma 4. (M_H, ω_H) は、体積有限。

(証明) $p \in M \cap H$ とし、 p を中心とした M 内の polydisc Δ^m を $\Delta^m \cap M_H = (\Delta^*)^q \times \Delta^{m-q}$ となるようにとる。

$(\Delta^*)^q \times \Delta^{m-q}$, Poincaré metric $\hookrightarrow (M_H, \omega_E)$ に

Schwarz lemma を使うと、 ω_E^m は、 H の近傍で高 Poincaré growth であることがわかる。これから

$$H_{0,1}^0(M_H, K_{M_H}^{\otimes \nu}) \subset H^0(M, K_N^{\otimes \nu} \otimes H^{\otimes \nu-1})$$

となる。 L^2 -R-R と Lemma 1 より

$$\frac{1}{m!} \int_{M_H} \omega_E^m \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \dim H_{G,1}^0(M_H, K_{M_H}^{\otimes \nu}) \leq C < \infty \quad \square$$

さて、次の Lemma が key である。

Lemma 5. $H_{G,1}^0(M_H, K_{M_H}^{\otimes \nu}) \subset H^0(\bar{M}, K_{\bar{M}}^{\otimes \nu} \otimes H^{\otimes \nu-1} \otimes D^{\otimes \nu-1})$

(証明). $\eta \in$ 左辺とすると、 η は $\bar{M}$ 上 $K_{\bar{M}}^{\otimes \nu}$ の meromorphic section に延びることが、 M と $\bar{M}$ の有理関数体の同型からわかる。 D で、 η がどの位大きな極をもつか見ればよい。

$\bar{M} - M$ は、仮定から pluri polar set となるので、 $\bar{M}$ 上の Lebesgue 測度に関して、測度 0 となることに注意する。

Hölder の不等式から、Lemma 4 を使て

$$\left(\int_{\bar{M}} (\eta \wedge \bar{\eta}) \right)^{\frac{1}{\nu}} \leq \|\eta\|_{L^2}^{\frac{\nu-1}{\nu}} \text{Vol}(M_H)^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

を得る。これから Lemma は直ちに従う。 □

Lemma 5 と L^2 -R-R より

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \int_{M_H} \omega_E^m &\leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \dim H_{G,1}^0(M_H, K_{M_H}^{\otimes \nu}) \\ &\leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \dim H^0(\bar{M}, K_{\bar{M}}^{\otimes \nu} \otimes H^{\otimes \nu-1} \otimes D^{\otimes \nu-1}) \\ &= \frac{1}{m!} \int_{M_H} (\omega_E^*)^m \end{aligned}$$

を得る。最後の式は、Riemann-Roch + 1 次元 vanishing current として $[\omega_E^*] = [K_{\bar{M}} + D + H]$ となる、という

ことによる。なおここで $M_H^* - M_H$ が測度であることを使っている。

これと Lemma 3 より

$$(\omega_E^*)^n = \omega_E^m \quad \text{on } M_H$$

となるが、これから $\omega_E = \omega_E^*$ が従うことは既に述べた。

ω_E, ω_E^* も complete なので結局

$$M_H = M_H^*$$

を得る。H の任意性から

$$M = \overline{M} - D$$

を得る。

Q.E.D.

§3. Theorem 2 の証明

Theorem 1 の条件のうち 1) と 3) は、かなり普遍的な条件である。例えば、 $\mathbb{C}^m$ 内の有界領域で cover される quasi-projective manifold は、1) と 3) を満たすことが、Bergmann Kernel を考えるとすぐわかる。2) の条件は、これに反しやや強い条件である。

この節では、2) の条件は、微分幾何学的条件から従うことを述べる。

M を complete, nonpositive curvature の Kähler manifold とする。 M の普遍被覆を $\tilde{M}$ とおくと

$M = \Gamma \backslash \tilde{M}$ ($\Gamma \subset \text{Aut } \tilde{M}$, discrete) と書ける。

Green-Wu の結果から $\tilde{M}$ は Stein となる。 $\gamma: [0, \infty)$

$\rightarrow \tilde{M}$ を弧長でパラメトライズした測地線とする。

この時、 γ に付随した Busemann 関数を

$$B_\gamma(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{dist}(p, \gamma(t)) - t)$$

で定義する。この時、 B_γ について次が成り立つ。

Lemma 6. B_γ は plurisubharmonic である。 $\square$

Theorem 2 は Lemma 6 を使, て Theorem 1 の 2) の条件を確かめることによ, て得られる。この時、 B_γ が適当な γ をとると、cusp の近傍に “diverge” することが essential である。詳細は、論文を見て下さい。

§4. 今後の課題

Ricci 曲率の制御は、代数多様体の研究に、最近大変役立, ている。Minimal model 予想と関連して、代数多様体上の Ricci flat foliation を解析的に作ることは、非常に興味深いと思われる。今後の発展を期待したいと思います。

参考文献

A. Nadel - H. Tsuji: Compactification of complex Kähler manifolds of negative Ricci curvature

Jour. of Diff. Geom. 28. 503-512. (1988)