

C^* -環の指数理論

大阪教育大 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

① はじめに

factor M とその sub factor N に関する指数理論全体は (文献も含めて) 幸崎さんによって説明されるので、ここでは C^* -環の指数理論について、なぜ、そういう風に定義するかに関心をおいてみる。

C^* -環に対する指数の定義は次の3つのことをぼんやりと念頭におかれてつくられている:

① Pimsner-Popa basis

② Kosaki の定義: $\text{Index } E = E^{-1}(1)$

③ 半単純リー環の Casimir 元

そこで以上の①, ②, ③をざっと復習してみよう

① Pimsner-Popa basis

M を II_1 -factor, N をその sub factor とする。今 Jones の index $[M:N] < +\infty$ と仮定しよう。

この時 Pimsner-Popa は 次のような orthonormal basis $\{m_j, j=1, \dots, n+1\} \subset M$ の存在を示した:

$$\textcircled{1} E_N(m_j^* m_k) = 0 \quad j \neq k$$

$$\textcircled{2} E_N(m_j^* m_j) = 1 \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\textcircled{3} E_N(m_{n+1}^* m_{n+1}) \text{ is a projection of trace } [M:N]^{-1}.$$

$$\textcircled{4} n \text{ is } [M:N] \text{ の整数部分}$$

$$\textcircled{5} m_j \cdot e_N \text{ is partial isometries } (1 \leq j \leq n+1)$$

$$\textcircled{6} \sum_{j=1}^{n+1} m_j \cdot e_N m_j^* = 1$$

$$\textcircled{7} \sum_{j=1}^{n+1} m_j m_j^* = [M:N]$$

$$\textcircled{8} \forall m \in N \text{ is } m = \sum_{j=1}^{n+1} m_j y_j \quad \left(\begin{array}{l} y_j \in N \\ y_{n+1} \in E_N(m_{n+1}^* m_{n+1})N \end{array} \right)$$

と一意的に分解できる

⑧ はいいかえると

$$\textcircled{8}' \forall x \in M \quad \sum_{j=1}^{n+1} m_j E_N(m_j^* x) = x$$

となる。 C^* -部分環の指数の有限性を定義するのにこの⑧'の性質のみを使うことにする。なぜなら C^* -環では projection が一般には存在しないため, orthonormality は少し強すぎる気がするから。また分解の一意性も C^* -環では必ずしも成り立たない。

② Kosaki の Index

$M \supset N$ をある Hilbert 空間 H 上の (σ-finite) factor とする. $E: M \rightarrow N$ を faithful normal conditional expectation とする. M から N への normal faithful semifinite operator valued weights 全体を $P(M, N)$ とおく. $P(M, N)$ と $P(N', M')$ の間には 次の Connes の spatial derivative の等式を通じて全単射 $E \leftrightarrow E^{-1}$ がある:

$$\frac{d(\phi \cdot E)}{d\psi} = \frac{d\phi}{d(\psi \cdot E^{-1})}$$

ここで ϕ は M 上の (ψ は M' 上の) 任意の normal faithful semifinite weights を動く.

Definition (Kosaki)

$$\text{Index } E = E^{-1}(1)$$

± Kosaki の index $E < +\infty$ の時も Pimsner-Popa 型の basis $\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \subset M$ がとれる:

$$\forall x \in M \quad x = \sum_i m_i E(m_i^* x)$$

この basis $\{m_1, \dots, m_n\}$ と E^{-1} は次の関係にある.

Lemma 1

$$\forall \lambda \in N' \quad E^{-1}(\lambda) = \sum_{i=1}^n m_i \lambda m_i^*$$

特に $\text{Index } E = E^{-1}(1) = \sum_{i=1}^n m_i m_i^*$

以上により, Index の理論はある種の basis の存在を仮定してそこを出发点にしてもかなりの所がおおえそうな気になるでしょう。(たとえばそれが論点先取であるというゴマカシに近い側面をもっているにしてもですが。)

③ 半単純リー環の Casimir 元

L を $\mathbb{C}$ 上の半単純リー環とする。 $A, B \in L$ に対し

$$K(A, B) = \text{Tr}(\text{ad} A, \text{ad} B)$$

で定義して, この $K: L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ のことを killing form とし,

$X_1, \dots, X_n$ を L の basis とし, K に関する dual basis と

$Y_1, \dots, Y_n$ とする: つまり

$$K(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$$

とちよようにしておく。 $U(L)$ を L の universal enveloping algebra とする。リー環 L の Casimir 元 C は $U(L)$

の元として次で定義される:

$$C = \sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i \in U(L)$$

このCasimir元 C は $U(L)$ の center に含まれる。こゝで $\text{Index } E = \sum m_i m_i^*$ と比較してみると、どちらもある種の basis (とこの dual basis) の積の和をとって得られているという共通点に気がつく。そこで C 環において Index を定義するに当たってもある種の basis (とこの dual basis) の積の和という形で Index を定義することにする。すると casimir 元と同じように C 環の center の元になっていることがわかる。

以上の①～③を念頭において C 環の Index を定義する。が他分野との関連を明示する説明のつごう上、一般の多元環に対して定義をおこそう。

④ Index の定義

R を可換環で単位元 1 をもつものとする。 $R = \mathbb{Z}$ か R が $\mathbb{C}$ 位を描いてくれたい。 R 上の代数 B とその部分代数 A の組 $B \supset A$ を考える。 B と A は 1 を共有すると仮定する。

Definition $E: B \rightarrow A$ を conditional expectation

def E は A - A -bimodule map かつ $E(1) = 1$

特に $E^2 = E$ となる. $B \supset A$ が C^* -環の場合は positivity を仮定するのち E は必然的に projection of norm one になる.

Definition a finite family $\{(u_i, v_i), \dots, (u_n, v_n)\} \subset B \times B$ が quasi-basis for E

def $\forall x \in B$

$$(\#) \quad x = \sum_{i=1}^n u_i E(v_i x) = \sum_{i=1}^n E(x u_i) v_i$$

Definition $E: B \rightarrow A$ を conditional expectation とす
 E を of index-finite type

def $\exists \{(u_i, v_i), \dots, (u_n, v_n)\} \subset B \times B$: quasi-basis for E

このとき

$$\text{Index } E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n u_i v_i \in B$$

(ただし C^* -環の場合は $v_i = u_i^*$ ととり直せるので $\text{Index } E = \sum u_i u_i^*$)

Remark ① $\text{Index } E$ は quasi-basis のとり方には依存しない. ただし E には依存するのち $B \supset A$ といふ pair

に対する不変量でない所に示す点がある。

② 実は $\text{Index } E$ は $\text{Center } B$ の元であることがいえる。
これは Casimir 元 C が $\text{Center } U(B)$ の元であることと似ている。

③ $B \otimes_\Lambda B$ 上に次で積を入れた, (E に依存して)。

$$(*) \quad (y \otimes z) \cdot (w \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda E(yz) \otimes wv$$

すると $\{(u_i, v_i), \dots, (u_n, v_n)\}$ が quasi-basis であるという条件 (いささか形がよい)

$$(\#) \quad \forall x \in B \quad x = \sum_{i=1}^n u_i E(v_i, x) = \sum_{i=1}^n E(x u_i) v_i$$

がみただけにもっと自然な形

$$(\#\#) \quad \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i \text{ は } B \otimes_\Lambda B \text{ の単位元である}$$

(ただし $B \otimes_\Lambda B$ 上の積は上の $(*)$ で入れたもの。)

にかき直すとかけられる。

④ もちろん II_1 -factors $M \supset N$ の時に trace が与えられる conditional expectation $E: M \rightarrow N$ とすれば

$$\text{Index } E = (M:N)$$

だし, 一般の factors $M \supset N$ については 寺島壽士んの定義と一致する。

例1 Y, X : compact T_2 -space, $\pi: Y \rightarrow X$: covering map とする. $\pi^*: C(X) \hookrightarrow C(Y)$ が 同型 である。

$$B = C(Y)$$

$$A = \pi^*(C(X))$$

$d_x = \# \pi^{-1}(x)$ $x \in X$ 上の fiber の数

$$\begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \downarrow \psi & \downarrow \\ X & \longrightarrow d_x \end{cases} \quad \text{が bounded と仮定する}$$

$w: Y \rightarrow]0, 1[$: 連続関数 かつ

$$\sum_{z \in \pi^{-1}(x)} w(z) = 1 \quad \text{for all } x \in X$$

この時 $E_w: B \rightarrow A$ とは conditional expectation

$$E_w(f)(y) = \sum_{z \in \pi^{-1}(y)} w(z) f(z)$$

for $f \in B$.

で定義する。

$$\Rightarrow \text{Index } E_w = \frac{1}{w} \in B$$

特に covering sheets の枚数 $d_x = n$ (constant)

$$w(y) = \frac{1}{n} \quad \forall y \in Y \quad \text{とすると}$$

$$\text{Index } E = n = (\text{被覆度})$$

例 2 $e_1, e_2, e_3, \dots$ は Jones projection とする。

ただし $\tau^{-1} \in \{4\omega^2 F/n \mid n=2, 4, 5, \dots \} \cup (4, \infty)$ とし

$$\begin{cases} e_i e_{i+1} e_i = \tau e_i \\ e_i e_j = e_j e_i & (|i-j| \geq 2) \end{cases}$$

とするとする。

$$B_\tau = C^*(1, e_1, e_2, e_3, \dots)$$

$$A_\tau = C^*(1, e_2, e_3, \dots)$$

と置く。 $\exists E: B_\tau \rightarrow A_\tau$: conditional expectation

$$\text{s.t.} \quad E(\lambda e_i) = \tau \lambda$$

このとき

① $\tau^{-1} \in 4\omega^2 F/n$ の場合

E は of index-finite type τ^{-1}

$$\text{Index } E = 4\omega^2 F/n$$

② $\tau^{-1} \in (4, \infty)$ の場合

E は index-finite type τ^{-1} ではない

もっとも、最近 Wenzel が 構成した sub factors の方法で weakly closure の代わりに norm closure とすると simple な AF-algebras とも一致する。

例3 M : finite von Neuman alg with a faithful normal trace τ . $N \subset M$: von Neuman sub algebra. $E: M \rightarrow N$ is trace τ から決まる normal conditional expectation とする. この Index $E = I(M/N)$ の公式は 河上さん に依るものである. さらに次の状況を仮定する

$Z(M)$ の minimal projection e_i ($i \in I$)

$Z(N)$ の " f_j ($j \in J$)

と E : of index-finite type と仮定する

$$\Rightarrow \text{Index } E = I(M/N) = \sum_i \sum_j \frac{(M_{ij} | N_{ij})}{\tau(e_i f_j)} \tau(f_j) e_i$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } M_{ij} = M e_i f_j \\ N_{ij} = N e_i f_j \end{array} \right)$$

注 実は $E^{-1}(1) \in M$ であることと quasi-basis が有限 τ とあることは一般の von Neuman algebra では一致しないことを 河上さんに教えてもいただきました. 上の公式は $E^{-1}(1) \in M$ でもよいのですが 細かいことは 直接河上さんにきいてもらう方が まちがいかたがよいでしょう

例4 離散群 $G \supset H$ に対して $E: C^*(G) \rightarrow C^*(H)$ の $\text{Index } E = [G:H]$ が群の指数と一致する.

Pair $B \supset A$ に対し $E: B \rightarrow A$ の Index E を上の
 ように代数的に定義したため, C^* algebra の概念の
 拡張である C^* ring 構造をもつことが示せる。さ
 に体の分離拡大の概念を環にまで拡張した
 ものも分離拡大ということにすると, $B \supset A$ が C^* 環
 で E が of index-finite type なら, $B \supset A$ はその意味
 での分離拡大になっていることも示せる。

[5] Index の性質

C^* 環の index についてわかっていことはまだ少ない。

Theorem 2 $B \supset A: C^*$ algebras. $E: B \rightarrow A$: conditional
 expectation of index-finite type. If $\text{Index } E \in A$
 $\Rightarrow (\text{Spectrum of Index } E) \subset \{4\omega^2/n \mid n=3,4,5, \dots\} \cup \{0\}$.

これ以外に K -theory における transfer との関連
 などもあるが, どれもまだ初等的な結果ばかり
 である。もう少し研究して構造論的に何か
 いえることがわかればよいと思っていすが
 なかなかである。その原因は C^* 環に対して Index
 を定義するのに意味があるかどうか疑わしいことにある
 と思っています。

最後に Pimsner-Popa 不等式 については Sekine により
私の元の評価が 次のように 改良されたことを記す。

Proposition 3 $B \supset A$: C^* -algebras $\tau E: B \rightarrow A$ が
a conditional expectation of index-finite type とお
 $\Rightarrow E(x) \geq \| \text{Index } E \|^{-1} x \quad \text{for } x \in B_+$