

Hardy Class, N Class

千葉大 理 柳原二郎

Hardy class と N class について, 述べておきたいことは多いが, ここでは 合成作用素 とそれに関連した関数方程式を扱う。

1. 序論

D は単位円板 $|z| < 1$ とし, D で正則な関数 $f(z)$ が, 条件

$|f|^p$ が harmonic majorant をもつ

をみたすとき H^p class に属するといひ, 条件

$|f|$ が 有界な harmonic majorant をもつ

をみたすとき H^∞ class に属するといひ, また, 条件

$\log^+ |f|$ が harmonic majorant をもつ

をみたすとき N class に属するといひ, 条件

$\log^+ |f|$ が 準有界な harmonic majorant をもつ

をみたすとき N^+ class に属するといひ, また

$$M = \{ \phi \in H^\infty ; |\phi(z)| < 1 \text{ for } z \in D \}$$

と置く. $\phi \in M$ をとり. D 上の正則な関数 g に対し

$$C_\phi g = g \circ \phi, \text{ すなわち } (C_\phi g)(z) = g(\phi(z))$$

と置く. C_ϕ を, ϕ に対応する 合成作用素 とする.

C_ϕ は $H^p \rightarrow H^p$ の連続な線形作用素である [5, p. 348, 定理 1], [1, p. 29, 系]. また

定理 1.1. C_ϕ は $N^+ \rightarrow N^+$ の連続な準同型で, ϕ が定数関数でないならば C_ϕ は 1 対 1 である. 逆に N^+ を N^+ の中から連続な準同型は, 合成作用素に限る.

(N^+ には $S(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|) d\theta$ として距離が入っており, N^+ は位相代数となっている.)

証明. 後半を示そう. $\kappa \in N^+$ の連続な準同型とする. $f \in N^+ - \ker(\kappa)$ をとり $\kappa f = \kappa(1 \cdot f) = \kappa 1 \cdot \kappa f$. よって $\kappa 1 = 1$. いま $\kappa z = \phi \in N^+$ と置く. $a \in |a| \geq 1$ は任意の数とすれば, $(z-a)^{-1} \in N^+$ であるから $\kappa(z-a)\kappa(\frac{1}{z-a}) = 1$, ゆえに $\kappa(z-a) = \kappa z - \kappa a = \phi - a$ は D 内 $\neq 0$ となる. ゆえに $|\phi(z)| < 1$ for $z \in D$, すなわち $\phi \in M$. $f(z) = \sum a_n z^n \in N^+$ に対し, $0 < r < 1$ をとり $f_r(z) = f(rz)$ と置く. すると $(\kappa f_r)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=0}^n a_k r^k z^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k r^k \phi^k = (f_r \circ \phi)(z) = (C_\phi f_r)(z)$. $r \rightarrow 1$ のとき $f_r \rightarrow f$ ゆえ $\kappa f = C_\phi f$ となる. 証明終.

2. 完全連続な合成作用素

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ は定偏な位相線形空間とある. $T: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ は線形かつ連続とする. $\mathcal{S}_1$ での 0 の近きな近傍 U があって TU が $\mathcal{S}_2$ で相対コンパクトとなるとき, T は 完全連続 としめる.

補題 2.1. C_φ が H^p 上 (または N^+ 上) で完全連続ならば,
ほとんどすべての t に對し $|\varphi(e^{it})| < 1$.

証明は [6, p. 477, 命題 1.6 (d)] をみよ.

補題 2.2. $f \in H^p$ (または N^+) で, $\varphi \in M$ ならば
 $(f \circ \varphi)(e^{it}) = f(\varphi(e^{it}))$ a. e.

証明は [5, p. 350, 定理 2] をみよ.

Shapiro - Taylor [6] は C_φ が完全連続になるための条件をいろいろと調べている. ひとつは

定理 2.3. C_φ が H^2 上 Hilbert-Schmidt 型 となるための
必要十分条件は, φ が

$$(2.1) \quad \int_0^{2\pi} [1 - |\varphi(e^{it})|]^2 dt < \infty$$

をみたすことである [6, p. 481, 定理 3.1].

定理 2.4. C_φ が, ある $p < \infty$ に對し, H^p 上で完全連
続ならば, かつその $p < \infty$ に對し, H^p 上で完全連続であ
る [6, p. 492, 定理 6.1].

N^+ 上では, 完全連続となるための必要十分条件が求めら
れた。すなわち

定理 2.5. C_φ が N^+ 上で完全連続であるための条件は

$$(2.2) \quad |\varphi(e^{it})| < 1 \quad \text{a.e.}$$

であってかつ, 各 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に対し

$$(2.3) \quad \frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} k_\theta(t) dt + i\alpha(\theta)$$

が成り立つことである。ここで $\alpha(\theta)$ は実数値の連続関数,
 $k_\theta(t)$ は $k_\theta(t) \geq 0$ かつ θ に因して一様に可積分 (すな
わち, $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ あり, $\text{meas}(E) < \delta$,
 $E \subset [0, 2\pi]$, のときすなわちの θ に対し $\int_E k_\theta(t) dt < \varepsilon$
となる) とする。

証明. 必要十分。 $U(\eta_0) = \{f \in N^+; S(f, 0) < \eta_0\}$ は
 $C_\varphi U(\eta_0)$ が相対コンパクトな近傍とする。 $f_r(z) = \frac{\eta_0}{4} \exp\left[\frac{\eta_0}{4} \frac{e^{i\theta} + rz}{e^{i\theta} - rz}\right]$
とおく。 $\delta > 0$ 且 $2\delta \log 2 < \frac{\eta_0}{4}$ ととり, $r_0 > 0$ 且 $|f_r(e^{it})|$
 $< \frac{\eta_0}{3}$ if $|t - \theta| \geq \delta, r \geq r_0$, なるようにとり。すると $r_0 \leq r < 1$
のとき $f_r \in U(\eta_0)$ で, かつ $\{f_r \circ \varphi\}_{r \geq r_0}$ は N^+ 上
相対コンパクト。よって $\frac{\eta_0}{4} \exp\left[\frac{\eta_0}{4} \frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)}\right] = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(z)$
 $\in N^+$. ゆえに

$$\frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu_\theta(t) + i\alpha(\theta)$$

ありて $f_n \circ \varphi \rightarrow f \circ \varphi$. 証明.

二の証明から

系 2.6. $U(\eta) = \{f \in N^+; \rho(f, 0) < \eta\}$ とおく. あり η_0 に対し $C_\varphi U(\eta_0)$ が相対コンパクトならば, すべての η に対し $C_\varphi U(\eta)$ が相対コンパクト である.

また

系 2.7. $\varphi \in M$ が (2.1) をみたせば, C_φ は N^+ 上で完全連続である.

定理 2.4 に関連して, つぎのことを考えられた:

(1) C_φ が あり ρ に対し H^ρ 上で完全連続ならば, N^+ 上でも完全連続か?

(2) C_φ が N^+ 上で完全連続ならば, H^ρ 上ではどうか.

筆者は二つの答えを二つに分けられた. (2) は肯定的であるが (1) は否定的であると思う.

3. Schröder の方程式

単位円板 D を $w = f(z)$ によって領域 G に写し, $\varphi \in M$ に対して つぎの図が可換に存在するとすると, $f \circ \varphi = g \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & D \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ G & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

とくに $g: G \rightarrow G$ が 1 次同射となつたとする.

$$(3.1) \quad f(\varphi(z)) = C f(z), \quad \text{すなわち} \quad C_\varphi f = C f.$$

(3.1) を Schröder の方程式 という。

(3.1) の解の存在はよく知られている [4]。 $C \neq (\varphi'(0))^k$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ ならば (3.1) の解は trivial なものしか存在しない。逆に

定理 3.1. C_φ は N^+ 上で完全連続とする。このとき (3.1) の解は N^+ に属し、 $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^{-n} g \circ \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_n$ として与えられる。ここで $C = (\varphi'(0))^k$ とし、 $g(z)$ は $g(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(0) \neq 0$ とみえる N^+ の任意の関数である。

(3.1) を $\log f(z) = F(z)$, $\log C = C'$ とおけば, Abel 方程式 $F(\varphi(z)) = F(z) + C'$ となる。適当な 1 次変換によって $C' = 1$ とおき, $F^{-1} = \psi$ とかくと, 差分方程式: $\psi(w+1) = \varphi(\psi(w))$ を得る。 $1/\psi(w) = \chi(w)$, $1/\varphi(1/z) = \gamma(z)$ とおけば,

$$(3.2) \quad \psi(w+1) = \gamma(\psi(w)) = c_1 \psi(w) + c_0 + \sum c_m (\psi(w))^{-m}$$

ただし $\varphi(0) = 0$, したがって $\gamma(z) = c_1 z + c_0 + \sum c_m z^{-m}$ と

した。適当な 1 次変換によって (3.2) はさらに

$$(3.3) \quad \psi(w+1) = \psi(w) + 1 + \frac{\lambda_1}{\psi(w)} + \frac{\lambda_2}{\psi(w)^2} + \dots$$

とできる。ここで $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0$ の場合について考える

最も簡単な差分方程式

$$(3.4) \quad \psi(w+1) = \psi(w) + 1 + \lambda / \psi(w)$$

を得る。これは T. Kimura によって研究された方程式である [2], [3], [7]。この方程式の有理型な解の構造は決定された [8], [9]。証明には, N_{∞} 集合の若干の性質を用いる。

- [1] P.L. Duren, Theory of H^p spaces. Academic Press, 1970.
- [2] T. Kimura, On the iteration of analytic functions. Funkc. Ekv., 14 (1971), 197-238.
- [3] T. Kimura, On meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$. Lecture Notes in Math., #312, Springer-Verlag, 1973.
- [4] E. Picard, Leçons sur Quelques Équations Fonctionnelles avec des Applications à divers Problèmes d'Analyse et de Physique Mathématique. Gauthier-Villars, 1928.
- [5] J.V. Ryff, Subordinate H^p functions. Duke Math. J. 33 (1966), 347-354.
- [6] J.H. Shapiro and P.D. Taylor, Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt Composition operators on H^2 . Indiana Univ. Math. J., 23 (1973), 471-496.
- [7] K. Takano, On hypertranscendence of solutions of a difference equation of Kimura. Funkc. Ekv., 16 (1973), 241-254.
- [8] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$, I. Ibid, to appear.
- [9] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$, II. Ibid, to appear.