

楕円 L 関数の Critical Strip での計算

秋山茂樹 (新潟大 理) 谷川好男 (名大 多元数理)

Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ には Euler-Maclaurin の公式や Riemann-Siegel の公式があり critical strip $0 < \Re(s) < 1$ での数値計算には長い歴史がある。しかし保型形式に付随する L 関数など、一般の L 関数に関してその critical strip での計算の結果は少ない。([7], [8]) このような一般の L 関数に関する Riemann 予想の類似物を信じる数値的根拠はまだ希薄といえる。

そこで我々は特に楕円 L 関数に興味の中心を絞っていくつかの計算結果を述べたいと思う。ここでもちいる計算方法は吉田 [7] の方法と異なり、Lavrik-Turganaliyev [5],[6] による近似関数等式の方法で、正確な誤差評価を行うことができる。結果としていくつかの楕円 L 関数で Riemann 予想の類似が計算した範囲では成立している事が確かめられた。

本稿には様々なグラフがある。その多くは $L(1+t\sqrt{-1}, E)$ をガウス平面の点と考え t を正の実数で動かしてドットしたものである。もちろん適切な関数等式があれば critical line 上では $L(s, E)$ の偏角は易しく計算できる。従って L 関数は絶対値が本質的なものであって、このようなグラフ化は意味がないと思われる向きもあるかもしれない。しかし、少なくとも筆者は L 関数のこのような表示は Riemann 予想の「美」と安心感を読者に与えてくれるものと信ずる。

最後に Riemann 予想を間接的に理解する一つの結果をのべる。Sato-Tate 予想は楕円 L 関数に対応する保型形式の Fourier 係数の値分布がある意味で $\sin^2(x)$ という分布関数を持つというものである。ここではさらに $\sin^2(x)$ の分布に近づくスピードがある程度早ければこの楕円 L 関数に関する Riemann 予想が正しいという事実を述べる。数値計算の結果も、そのスピードが十分あるらしい事を示唆している。

1 楕円 L 関数

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする。適当な変数変換によって E は global minimal Weierstrass equation

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

で与えられる (Néron model)。その判別式を Δ とする。 E_p を E の reduction mod p , $a_p = 1 + p - \#E_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と置く。Hasse の定理により $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ である。特に $p \mid \Delta$ なる p に対しては

$$a_p = \begin{cases} 0 & \text{singularity が cusp の時} \\ 1 & \text{split node の時} \\ -1 & \text{non split node の時} \end{cases}$$

である。詳細は例えば [3] 参照。

$\text{Re}(s) > 3/2$ の領域に於いて次の Euler 積を定義する。

$$L(s, E) = \prod_{p|\Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

この $L(s, E)$ を楕円曲線 E に付随する楕円 L 関数という。

このとき志村-谷山-Weil 予想は $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ はある $\Gamma_0(N)$ に関する 重さ 2 の原始的な cusp form で

$$f\left(-\frac{1}{Nz}\right) = \varepsilon N z^2 f(z), \quad \varepsilon = \pm 1$$

を満たすというものであった。Wiles による semi-stable な場合の解決が記憶に新しい。

この志村-谷山-Weil 予想が成立すれば cusp form に対応する L 関数なのだから $\Lambda(s, E) = N^{s/2} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, E)$ と置くと関数等式

$$\Lambda(s, E) = -\varepsilon \Lambda(2-s, E)$$

が成立する。

2 $L(s, E)$ の計算方法

$S_k^\varepsilon(\Gamma_0(N))$, ($\varepsilon = \pm 1$) を重さ k の $\Gamma_0(N)$ に関する cusp form であって

$$f(-1/Nz) = \varepsilon N^{k/2} z^k f(z)$$

を満たすものの全体のなす空間とする。

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \in S_k^\varepsilon(\Gamma_0(N))$ とし、 $L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ と置く。

吉田 [7] の方法は部分和を $s_n = \sum_{m \leq n} a_m$ と置いて

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n (n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

と変形する。この部分和を取る方法を何回かくり返し、適当な項まで足す。フーリエ係数 a_n には多くの符号変化が期待できるので s_n はさほど大きくならないものと期待される。従って差分回数を増やすと収束が順に良くなり真の値に近づくものと期待できる。この方法は手軽であるがうまく行かない場合もある。(cf. [8])

我々は Lavrik-Turganaliyev の近似関数等式の方法を楕円 L 関数の場合に適用して計算した。以下これを紹介する。

$$I(s) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, f) = \int_0^\infty f(iy) y^{s-1} dy = \int_0^r + \int_r^\infty$$

と分割する。ここで、第 2 種不完全ガンマ関数を

$$\Gamma(s, p) = \int_p^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

とすると

$$\begin{aligned} \int_r^\infty &= \sum_{n=1}^\infty a_n \int_r^\infty y^{s-1} e^{-2\pi n y} dy = (2\pi)^{-s} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s} \Gamma(s, 2\pi n r) \\ \int_0^r &= N^{-s} \int_{1/Nr}^\infty y^{-s-1} f\left(\frac{i}{Ny}\right) dy = i^k \varepsilon N^{k/2-s} (2\pi)^{s-k} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^{k-s}} \Gamma(k-s, \frac{2\pi n}{Nr}) \end{aligned}$$

ここでこの r を複素変数みなして解析接続を行うと $\Re(r) > 0$ であればこの変形は意味を持つことがわかる。そこで

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{N}}, r_0 = e^{i(\frac{\pi}{2} - \delta(t))}$$

と置き、和を M 迄で切ると、

$$I(s) = (2\pi)^{-s} \sum_{n \leq M} \frac{a_n}{n^s} \Gamma(s, \frac{2\pi n r_0}{\sqrt{N}}) + i^k \varepsilon N^{k/2-s} (2\pi)^{s-k} \sum_{n \leq M} \frac{a_n}{n^{k-s}} \Gamma(k-s, \frac{2\pi n}{\sqrt{N} r_0}) + R_k(s, f)$$

と書ける。この誤差項 $R_k(s, f)$ は M を大きくとると小さくなる。煩雑さをさけるため、特に $f(z)$ が楕円曲線 E に対応する、weight 2、level N の cusp form の場合を述べると、 $\text{Res} = 1$ において $R_2(s, f)$ は以下のように評価される。

$$|R_2(1+it, f)| \leq \frac{e^{-\frac{\pi}{2}t} e^{t\delta(t)}}{\delta(t)} \{2\sqrt{M}(\log M + 1) + \frac{\log M + 2}{4\delta(t)} \sqrt{N/M}\} e^{-4\delta(t)M/\sqrt{N}}$$

$M > \frac{1}{4}\sqrt{N}/\delta(t)$ の範囲で取ると、

$$|R_2(1+it, f)| \leq e^{-\frac{\pi}{2}t} \sqrt{M} \delta(t)^{-1} (3 \log M + 4) e^{\delta(t)(t - \frac{4M}{\sqrt{N}})}$$

更に $M > t\sqrt{N}/4$ で大きくしていけば上の誤差はいくらでも小さくできる。この方法では conductor N が大きくなるとそれに応じて a_n もたくさん計算する必要があり時間がかかる。しかし誤差が評価できているのでデータの信頼性は高い。

さて一見理論的には大切でないように見える $\delta(t)$ という関数をどのようにとるかが、この数値計算における本質的な部分である。 $\delta(t) = \pi/2$ とすると誤差項はもっとも早く小さくなるのであるが $I(s)$ の左辺にある $\Gamma(s)$ が $\Im(s)$ を大きくすると exponentially decay なので $\Gamma(s, x)/\Gamma(s)$ が非常に大きな数となり項別に足し合わせるやり方では巨大数の交代級

数のようになり大きな桁落ちが生ずる。従って $\Im(s)$ が少し大きくなると $L(s, E)$ の実際の計算には使えない。

Lavrik-Turganaliyev [5],[6] のアイデアは $\delta(t) = 1/(t+1)$ とすることで $\Gamma(s, x)/\Gamma(s)$ を多項式 order に落とす点にあった。このようにすれば解析的にも扱いやすい対象になり旧来の形の近似関数等式を導く事も可能となる。数値計算の目的のためにもこの事は大切で有効数字を固定した浮動小数点システムの言語 (Fortran など) では $\delta(t) = 1/(t+1)$ とすると各項の大きさが評価できるので桁落ち誤差の評価が容易にできる。

我々の計算では木田氏による UBASIC を用いた。この言語は多倍長固定小数点システムなので $\delta(t)$ は各項が UBASIC が扱える範囲の大きさ以下で、さらに小数部分に有効数字がのればその範囲では桁落ちは生じない。従ってその範囲で $\delta(t)$ を大きめにとることが可能である。このことにより、計算速度の向上が計れるので実際上の意味をもっている。以下で我々は必要に応じて $\delta(t) = (1 + \log(t))^{-1}, (1 + \log(t))^{-2}$ などと工夫して計算している。

複素数値 s, x に対する不完全ガンマ関数 $\Gamma(s, x)$ の具体的計算に関しては一松 [1] を参照し Gauss-Legendre の連分数を用いて計算した。この計算が大変遅く、恐らく律速となっている。複素不完全ガンマ関数の計算が組み込まれた言語を用いればもっと先まで計算する事が可能であろう。

3 Riemann 予想の数値計算

リーマン予想を確かめるには、まず零点個数の上からの評価に偏角原理を用いるのであるが ([2]) 我々の用いた方法は次のようなものである。 C を 四点 $3, 3+T\sqrt{-1}, -1+T\sqrt{-1}, -1$ をこの順で通る長方形の path とし

$$N(T, E) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_C \frac{L'}{L}(s) ds$$

を計算するわけである。この $N(T, E)$ は関数等式を用いてやると

$$\Im \int_{1+T\sqrt{-1}}^{3+T\sqrt{-1}} \frac{L'}{L}(s) ds$$

の値が分かればあとは容易に計算される。これは $\arg L(1+T\sqrt{-1})$ を求めることに他ならない。(但しこの値は実軸での値を基準に C に沿って接続した値として決める。)

この値を一般的に評価するのは難しいが我々は $L(\sigma+T\sqrt{-1})$ を σ を動かして直接グラフを描くことで求めている。このとき T として良い Gram 点を用いると $\arg L(1+T\sqrt{-1}) = 0$ となる事が多い事を利用する。零点の下からの評価のための符号変化を数える方法は旧来からあるものなので特に述べない。

以下次のような楕円曲線を考える。

$$\begin{aligned} E_{11} &: y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20 \\ E_{446} &: y^2 + xy = x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ E_{5077} &: y^2 + y = x^3 - 7x + 6 \end{aligned}$$

11, 446, 5077 は E の conductor である。

Theorem. E_{11} は $|\Im(s)| < 425$ 、 E_{446} は $|\Im(s)| < 122$ 、 E_{5077} は $|\Im(s)| < 445.6$ までに非自明な零点は存在しない。 $s = 1$ を除けば全ての零点は simple である。

最後の E_{5077} の計算は conductor が比較的大きいためかなりの時間を必要とする。計算には UBASIC を用い、一週間ほど五十台のパソコンの並行処理を行った。

4 Sato-Tate 予想と一般 Riemann 予想

E を $\mathbb{Q}$ 上定義された虚数乗法をもたない楕円曲線とし、区間 $[0, \pi]$ の実数 θ_p を

$$a_p = 2\sqrt{p} \cos(\theta_p),$$

で定める。 n 番目の素数を p_n とし数列 $x_n = \theta_{p_n}/\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) を考えよう。 g を区間 $[0, 1]$ を定義域とする実数値狭義単調増加関数で $g(0) = 0$ かつ $g(1) = 1$ なものとする。このとき分布関数 g に対応した discrepancy は

$$D_N^{(g)}(x_n) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left| \frac{A([0, \alpha], (x_n), N)}{N} - g(\alpha) \right|, \quad (1)$$

で定義される。ここで

$$A([0, \alpha], (x_n), N) = \#\{x_n \in [0, \alpha]; 1 \leq n \leq N\}.$$

である。

$$\text{ST}(x) = x - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}.$$

と置くとき、 $D_N^{(\text{ST})}$ の事を Sato-Tate 測度に関する discrepancy と呼ぶ。すると Sato-Tate 予想は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^{(\text{ST})}(x_n) = 0,$$

である。実際簡単に示されるようにこの主張は

$$\frac{\#\{\theta_p \in [\alpha, \beta] : p \leq X\}}{\#\{p : p \leq X\}} \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^2(t) dt,$$

が任意の $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$ に対して成立する事と同値である。我々はこの予想の quantitative version を考える。

Conjecture 任意の正数 ϵ について, $D_N^{(\text{ST})}(x_n) = O(N^{-1/2+\epsilon})$.

実際、数値計算では $D_N^{(\text{ST})}(x_n) = O(N^{-1/2})$ さえ成立しているように見える。さて二つの補題を用意する。

Lemma 1 実数列 $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ が $|a_n| \leq 1$ を満たしている。このとき各 n に対し $\pm$ をうまく選ぶことにより

$$\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq 1$$

とできる。ここで $b_n = \pm a_n$ である。

証明 帰納法により容易。

Lemma 2. (Koksma's の不等式) 区間 $[0, 1]$ の実数値有界変動な関数 f を考える。 g は区間 $[0, 1]$ を定義域とする実数値狭義単調増加関数で $g(0) = 0$ かつ $g(1) = 1$ なものとする。すると任意の実数列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ に対して

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\langle x_n \rangle) - \int_0^1 f(t) dg(t) \right| \leq D_N^{(g)}(x_n) V(f),$$

が成り立つ。ここで $V(f)$ は f の区間 $[0, 1]$ での全変動。 $\langle x \rangle$ は x の小数部分である。

証明 [4] p.142 に $g(t) = t$ の場合の証明がある。これを自然に一般化すればよい。

このとき次が成立する。

Theorem. E を $\mathbb{Q}$ 上定義された虚数乗法をもたない楕円曲線とする。このとき上の予想が成立すれば $L(s, E)$ に関する一般 Riemann 予想も正しい。

証明 $\xi_p = e^{\pm i\theta_p}$ と置く。この $\pm$ は後から適切に選ぶ。もし

$$A(s) = \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - \xi_p p^{-s}}$$

が $\Re(s) > 1/2$ に解析接続されれば

$$L(s, f) = A(s - 1/2) \overline{A(s - 1/2)} \prod_{p \mid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}}$$

は $\Re(s) > 1$ まで接続される。従って $A(s)$ を接続すればよい。

$$\log A(s) = \sum_{p \nmid \Delta} \xi_p p^{-s} + (\text{holomorphic function in } \Re(s) > 1/2),$$

に注意すれば $\sum_p \xi_p p^{-s}$ の接続が問題である。(以下の解析接続には有限個の bad prime は無関係であるので無視して議論をすすめる) もしこの和が $\Re(s) > 1/2$ で正則関数を与えれ

ば $L(s, E)$ は $\Re(s) > 1$ に零点を持たないこととなり一般 Riemann 予想が示されたことになる。

以上により, 部分和をとれば,

$$\sum_{p \leq x} \xi_p = O(x^{1/2+\epsilon}), \text{ for any } \epsilon > 0, \quad (2)$$

のとき $\log A(s)$ は $\Re(s) > 1/2$ で正則となる。すなわちこの評価 (2) を導けるように ξ_p の定義に現れる $\pm$ をうまく調整できれば証明できたことになる。Lemma 1 を用いると、

$$\sum_{p \leq x} \Im(\xi_p) \leq 1. \quad (3)$$

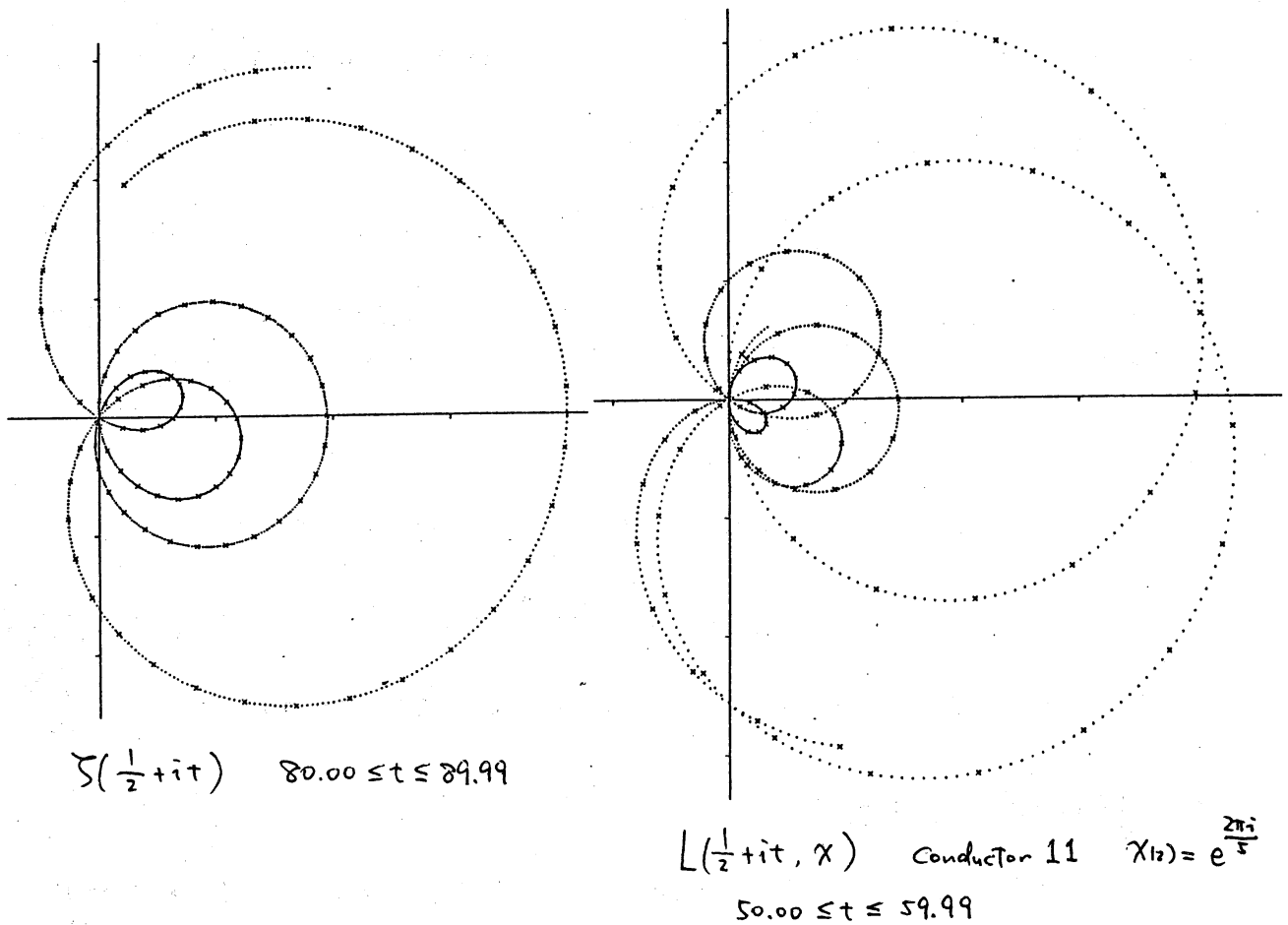
とできる。次に $f(t) = \cos(\pi t)$, $g(t) = \text{ST}(t)$ に対して Lemma 2 を用いれば

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos \theta_{p_n} \right| \leq 2D_N^{(\text{ST})}(x_n). \quad (4)$$

が成り立つ。この二つの評価 (3),(4) と Conjecture の仮定により (2) が示される。

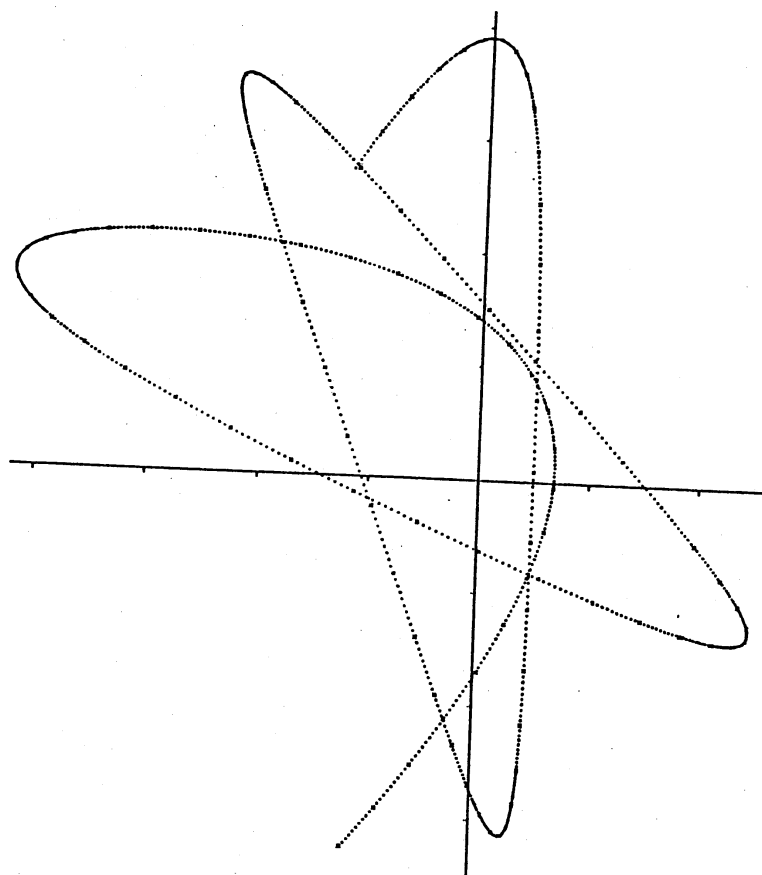
5 様々なグラフ表示

以下に計算結果を述べる。計算には PARI, UBASIC を使い、グラフへの表示には Mathematica を用いた。PARI, UBASIC のような完成度の高い software を copy free で提供された著者の方々に感謝します。



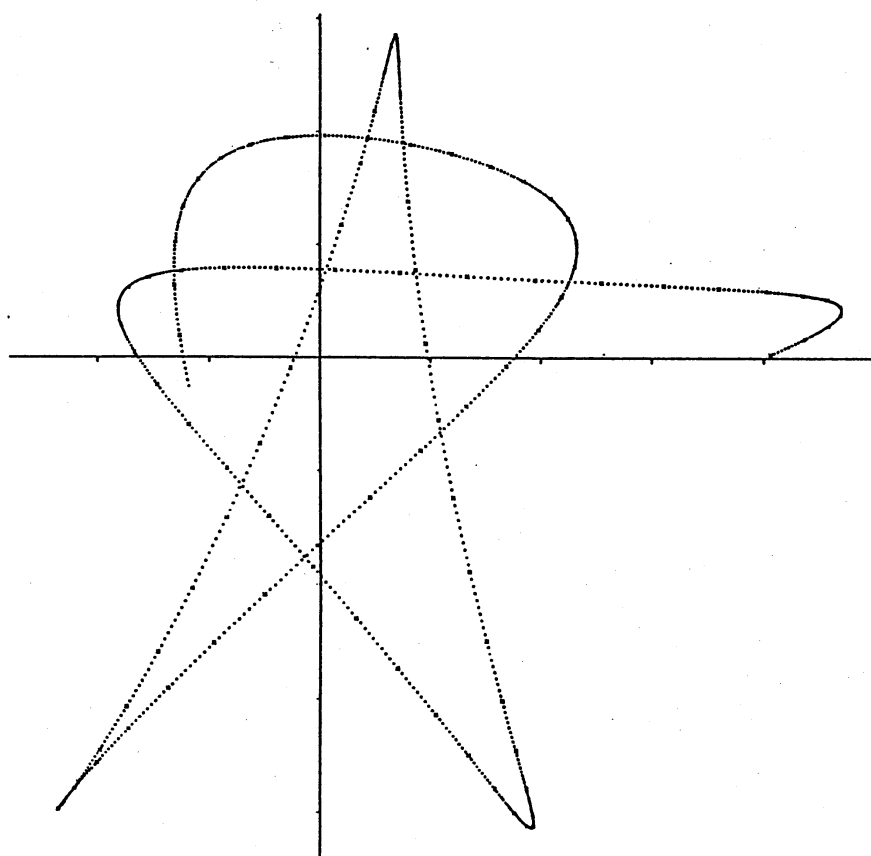
上の2つの図はリーマンゼータ関数とディリクレL関数のグラフである。関数も範囲も異なるのに2つは明らかに似ている。一方で次頁はフルビッツゼータ関数であるがこれは全く異質の印象を我々に与える。ディリクレLはフルビッツゼータの一次結合として書けるにもかかわらず全く別物である。無限積表示と関数等式をもつゼータ関数のグラフは明らかに美しい。

以下に出てくる楕円L関数のグラフも、全くcategoryの異なるゼータなのに上図と類似のグラフとなる事がわかる。グラフは特徴的な所に注目し周辺部を省いた場合がある。縮尺にも注意して見て頂きたい。



$$\zeta(\frac{1}{2} + it, \frac{1}{5})$$

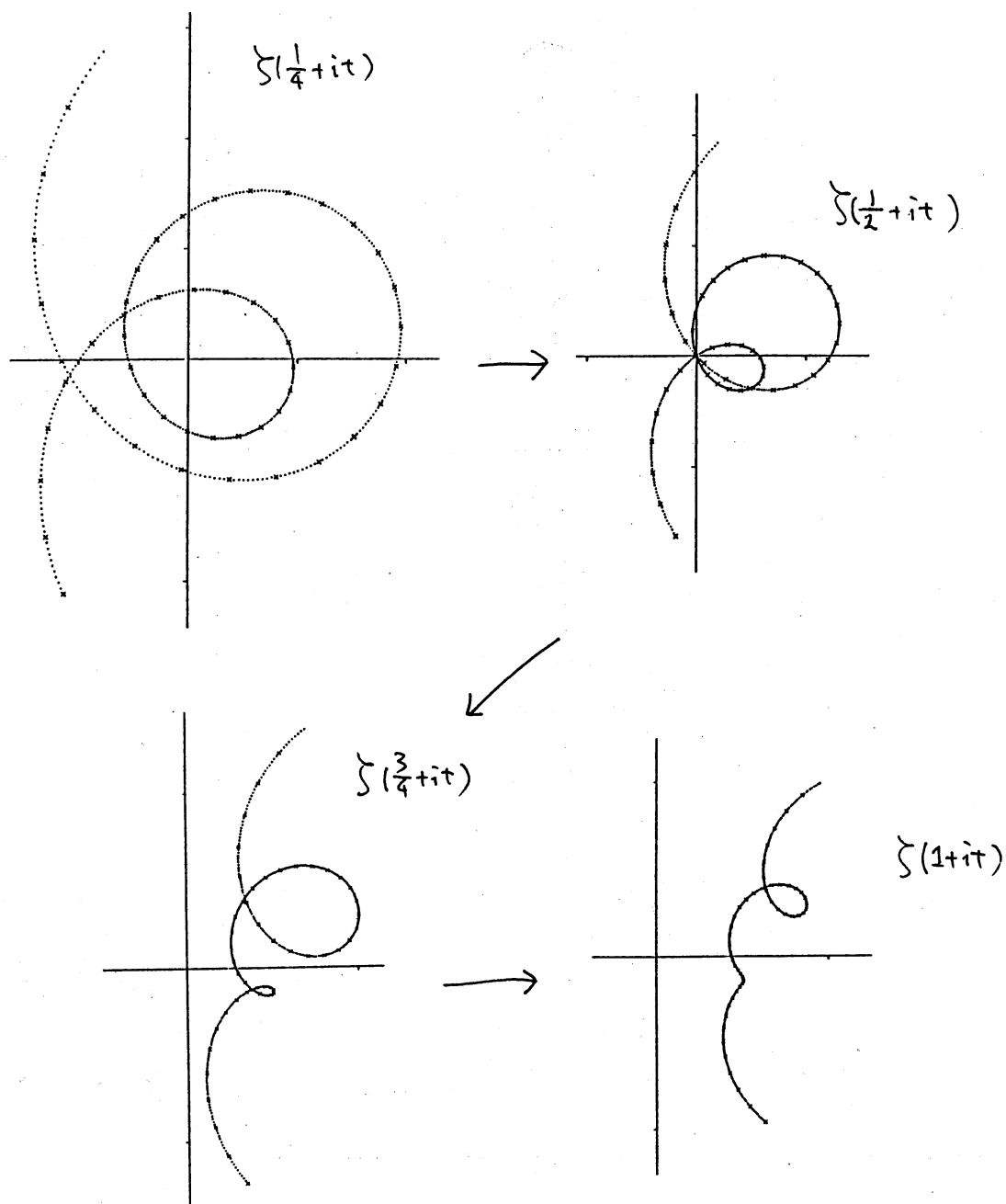
$$50.00 \leq t \leq 59.99$$



$$\zeta(\frac{1}{2} + it, \frac{1}{5})$$

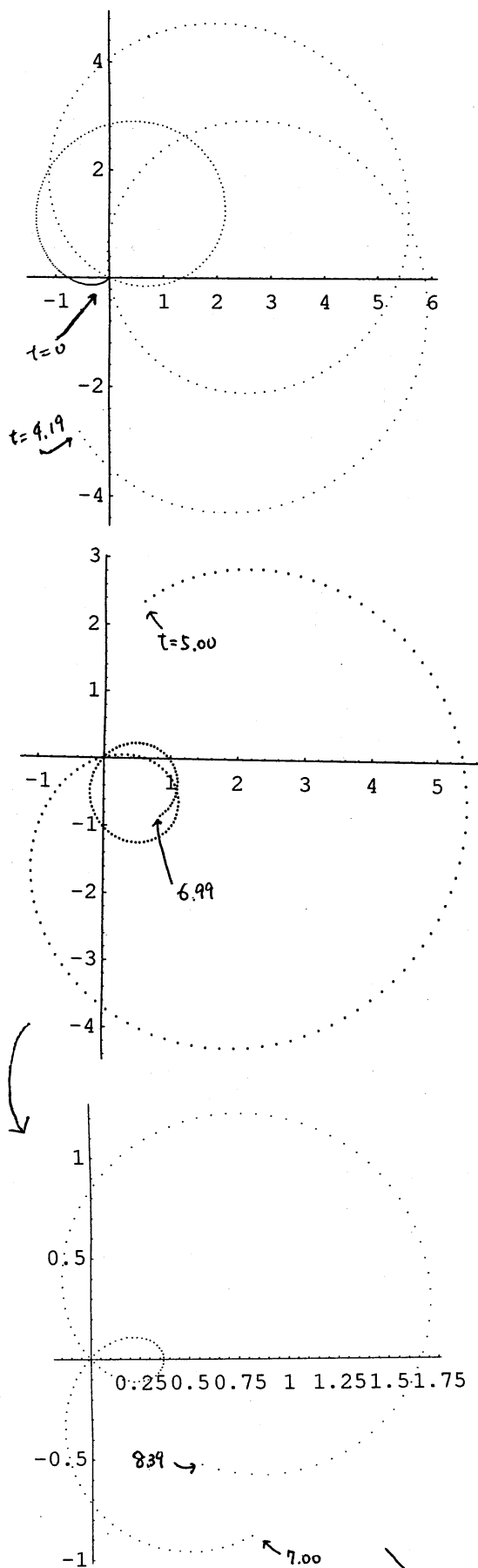
$$70.00 \leq t \leq 79.99$$

参考



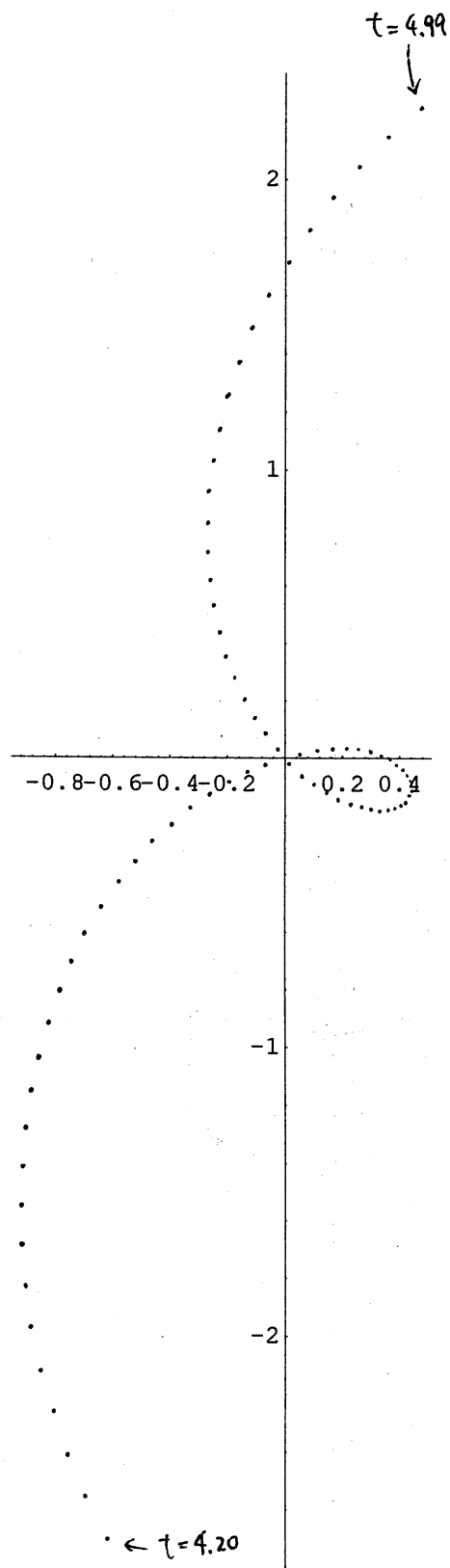
リーマンゼータ関数の「軌跡」の様子 $75.00 \leq t \leq 79.99$

real part を変化させると Cauchy-Riemann 関係式により グラフは 虚軸方向へ移動していく。その途中で ∞ が つぶれて 尖点になる。この時 ζ' の値は 0 となっている。

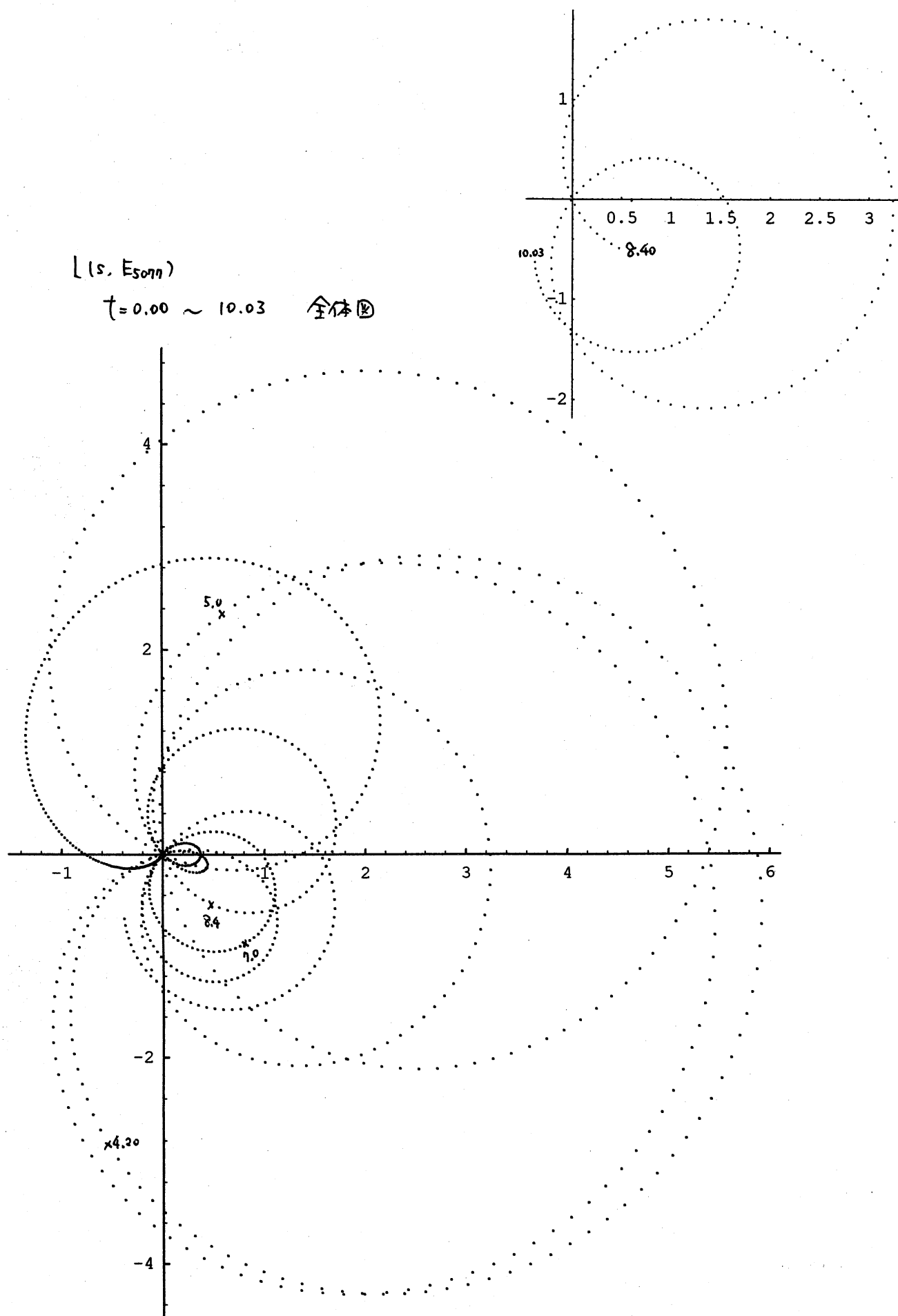


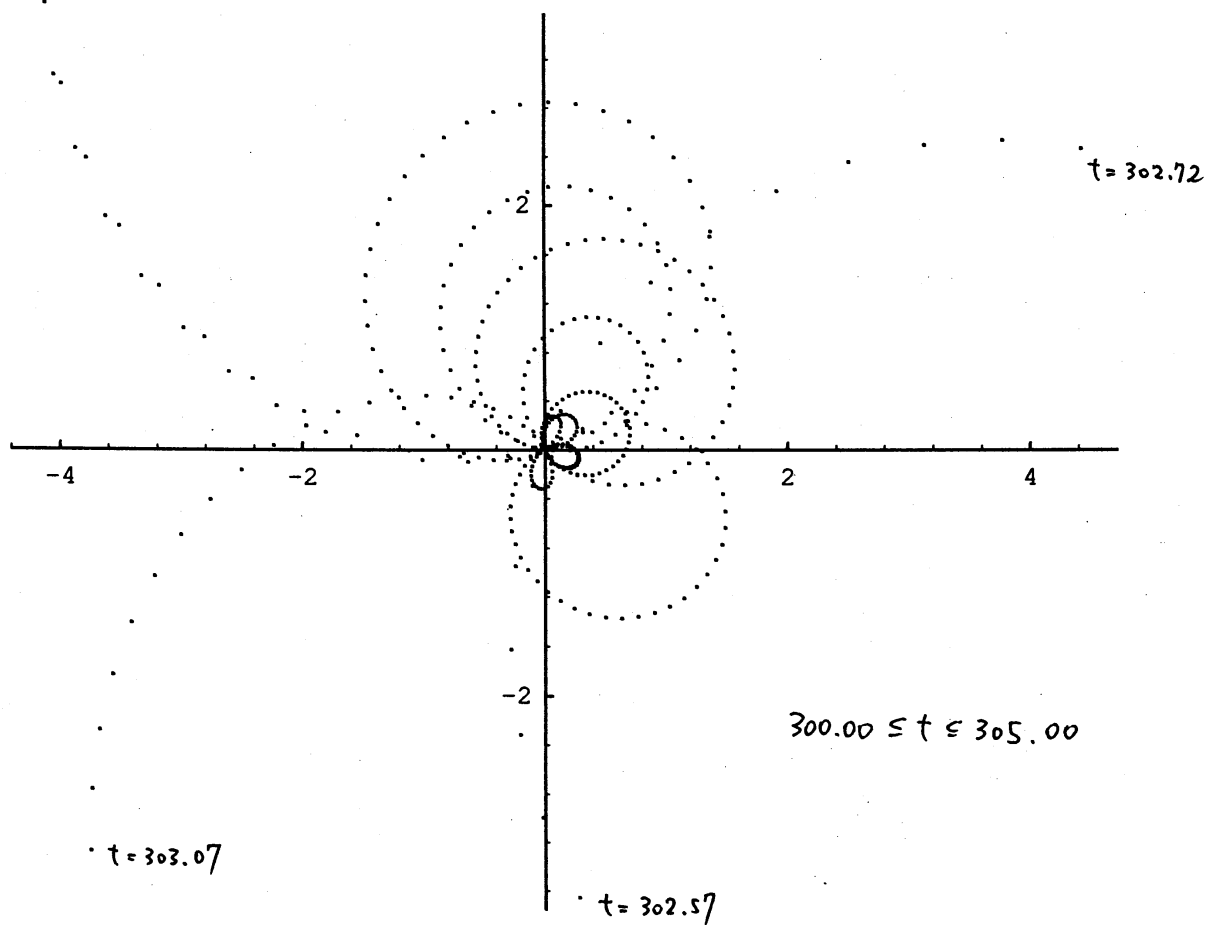
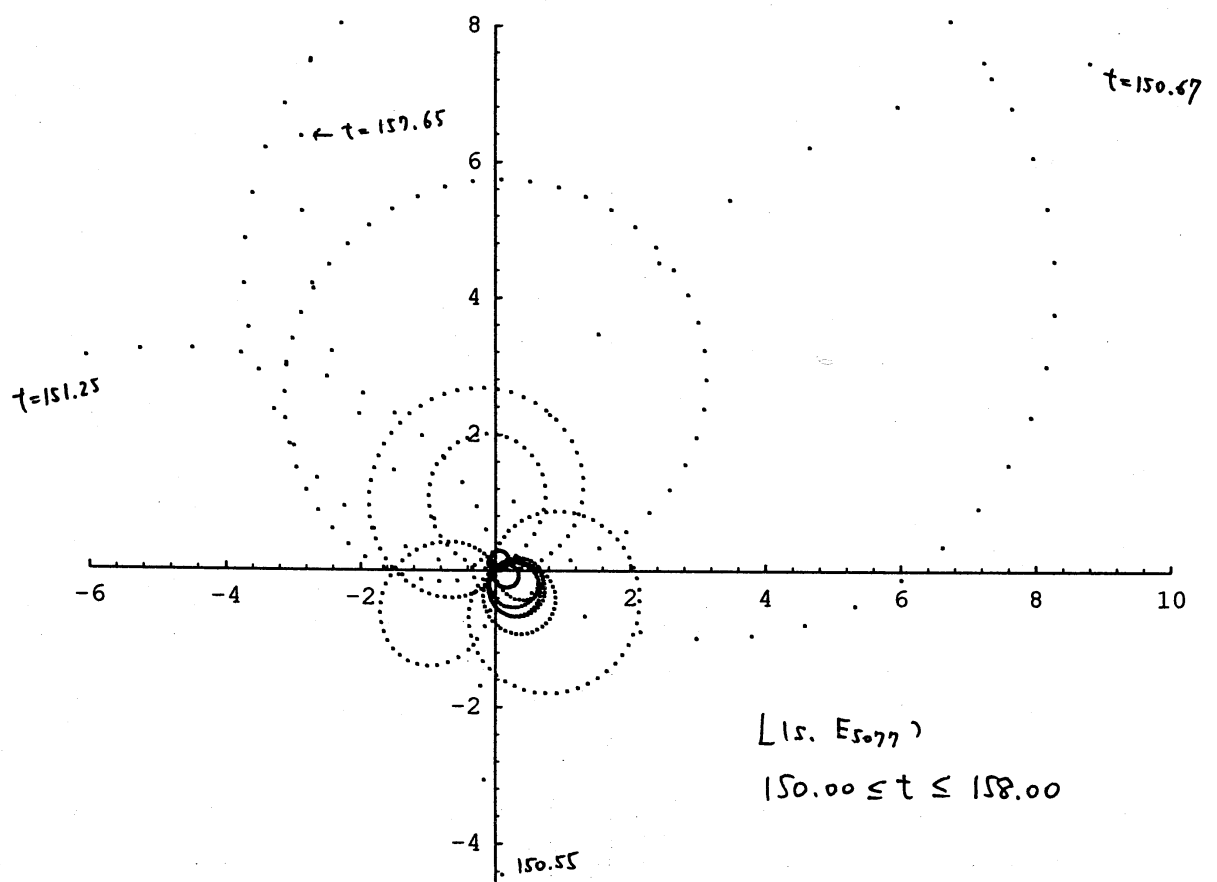
$$L(s, E_{5077}) \quad s = 1 + it$$

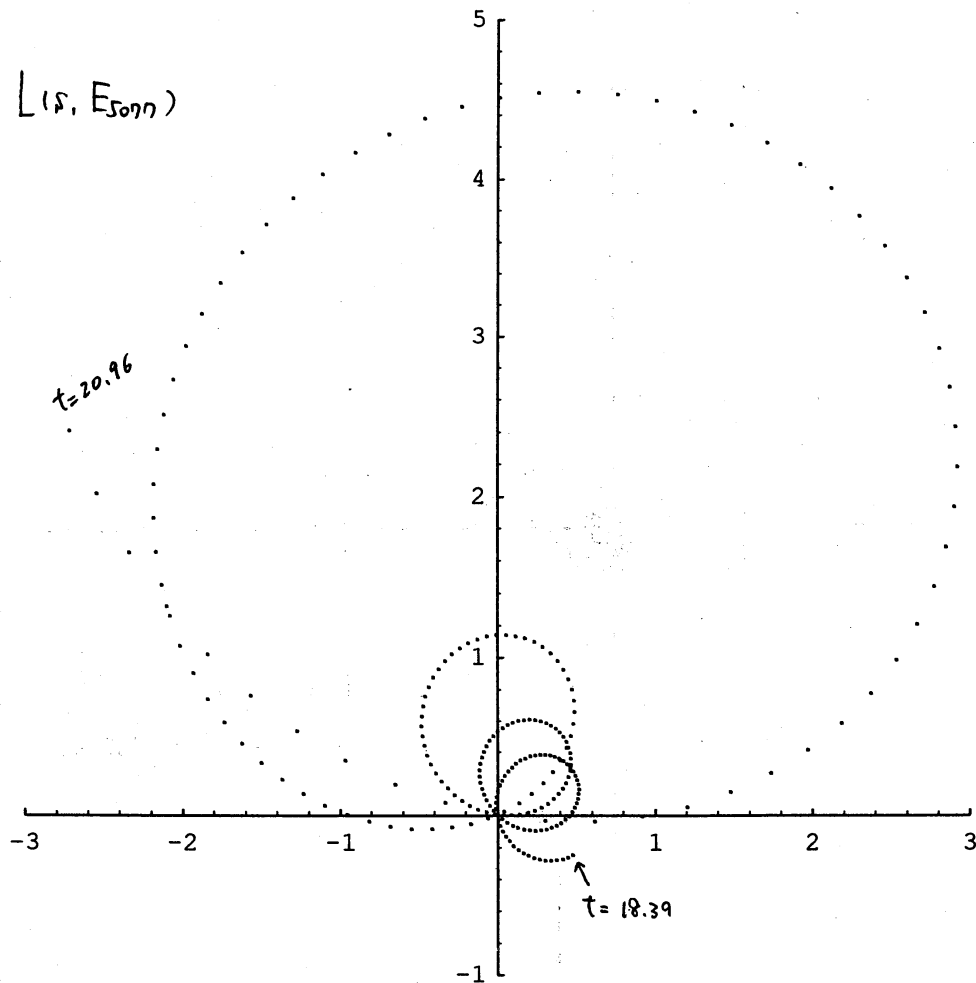
$$\Delta t = 0.01$$



二次复平面図

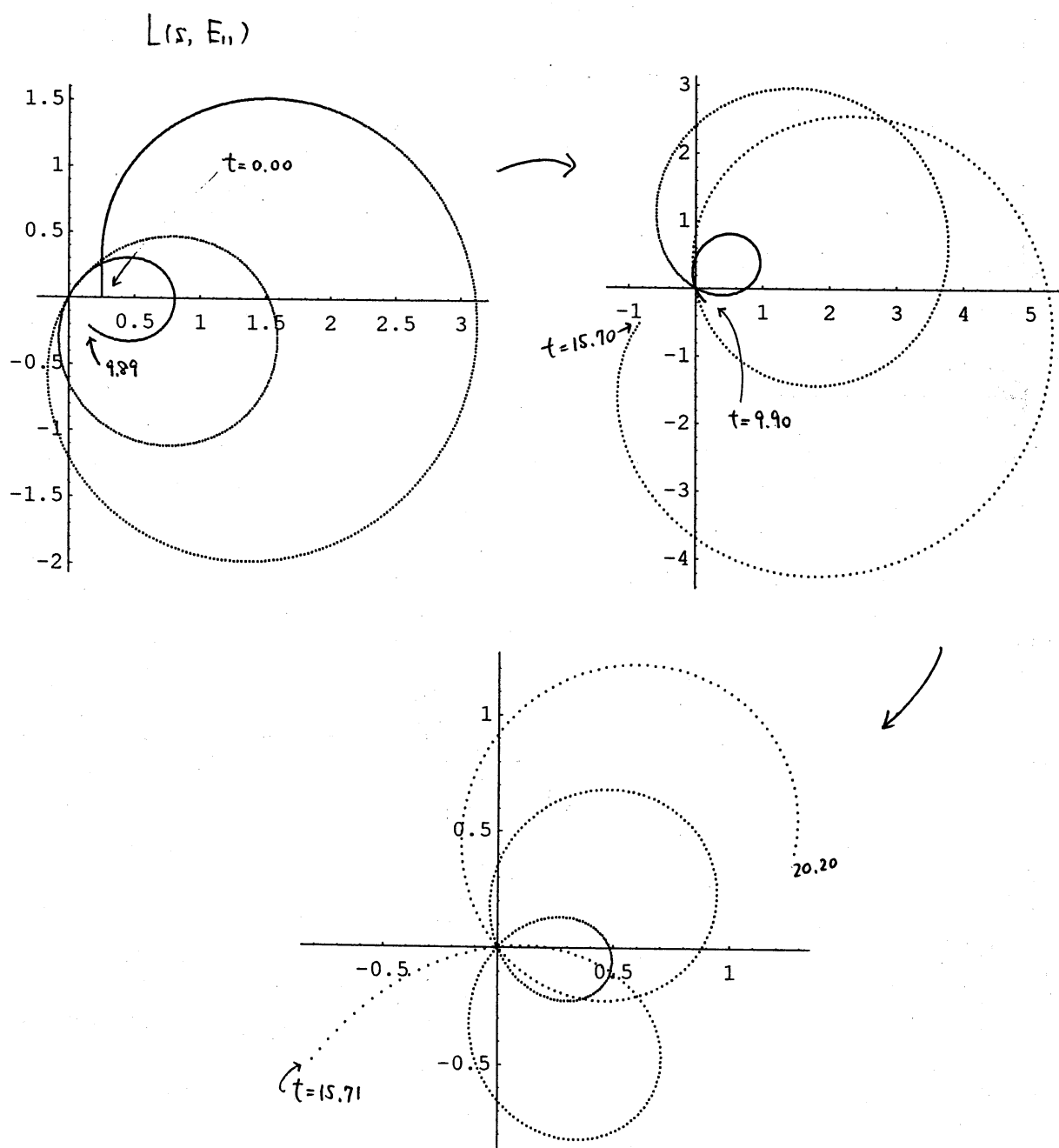






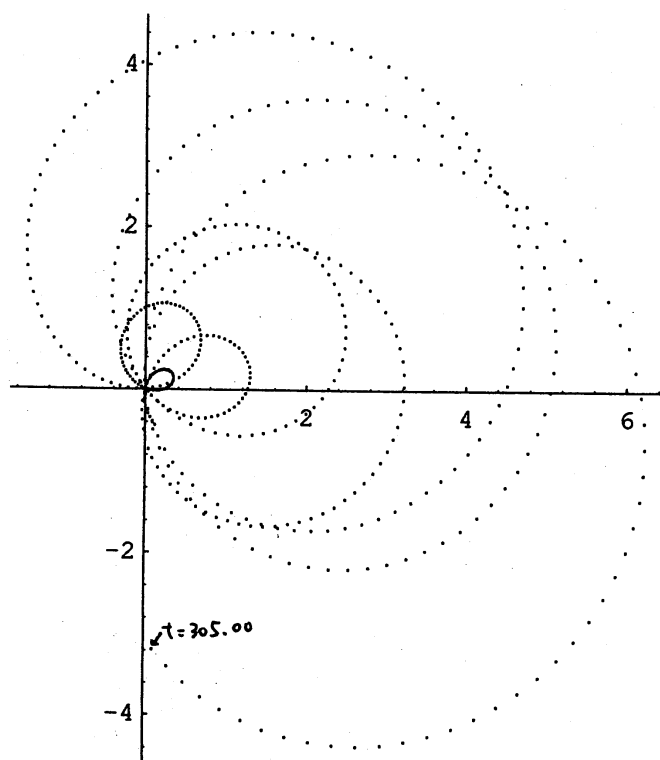
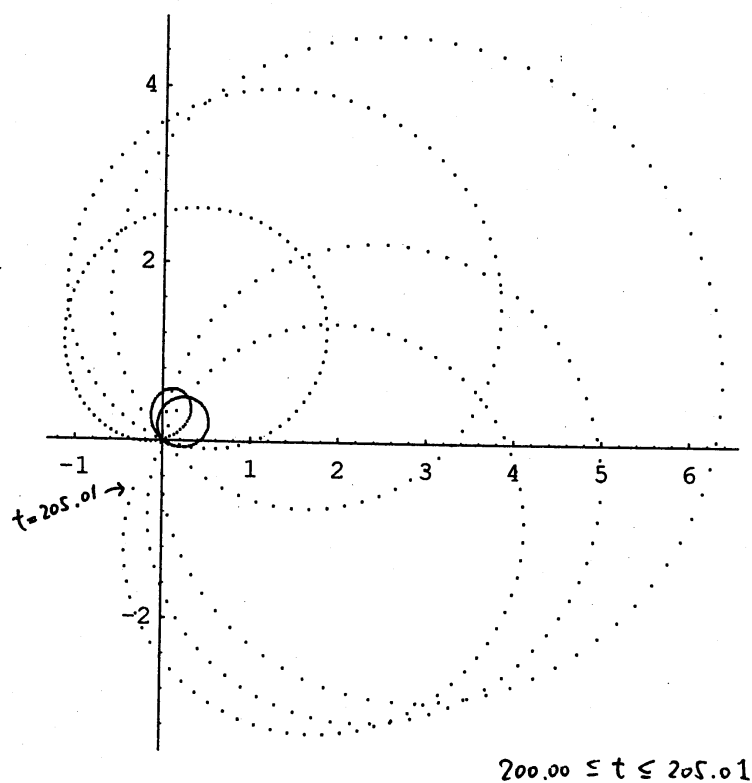
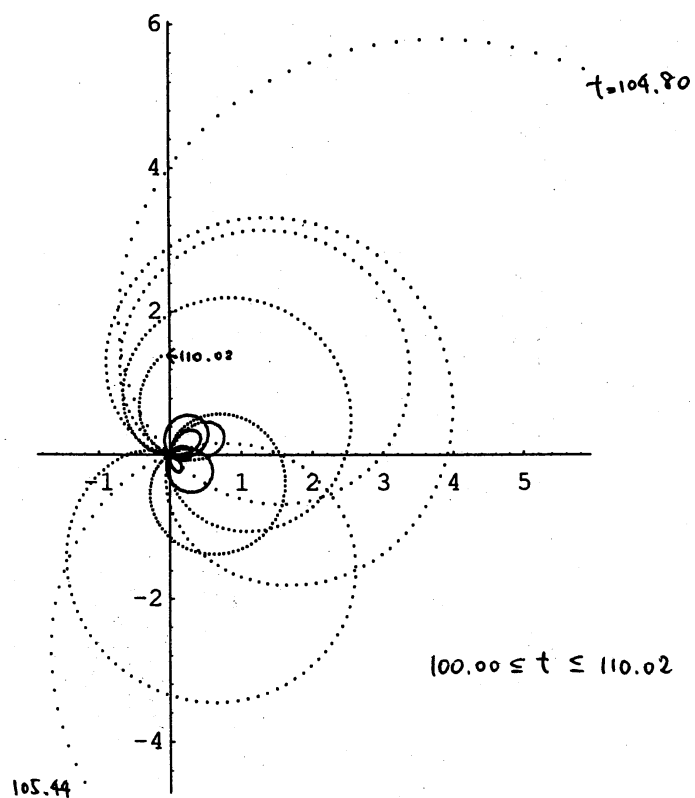
この図は、なにも形容しがたい「うづ」の「弾力性」の例。
 このように小さい円からだんだんと傾きながら半径が増大し
 ていく事はよく見られる現象である。このようにして大きな円
 に近づき、突然非常に小さないびつな円に至る事もよく観
 察される。

なお、この「現象」は楕円である必然性はなく リーマンゼータ
 でも同様である。ただ E_{5077} は conductor が少し大きいので比
 較的早く観察できる。



志村曲線 $L(s, E_1)$ の場合のグラフ。conductor が小さいため $L(s)$ が小さい時 零点の個数は比較的少なくグラフは簡明である。

楕円曲線の L 関数の場合 conductor が大きいときグラフを描くのは難しい。(近似関数等式の誤差項の評価により) conductor の平方根程の回数之和をとらねばならないため) に比例する



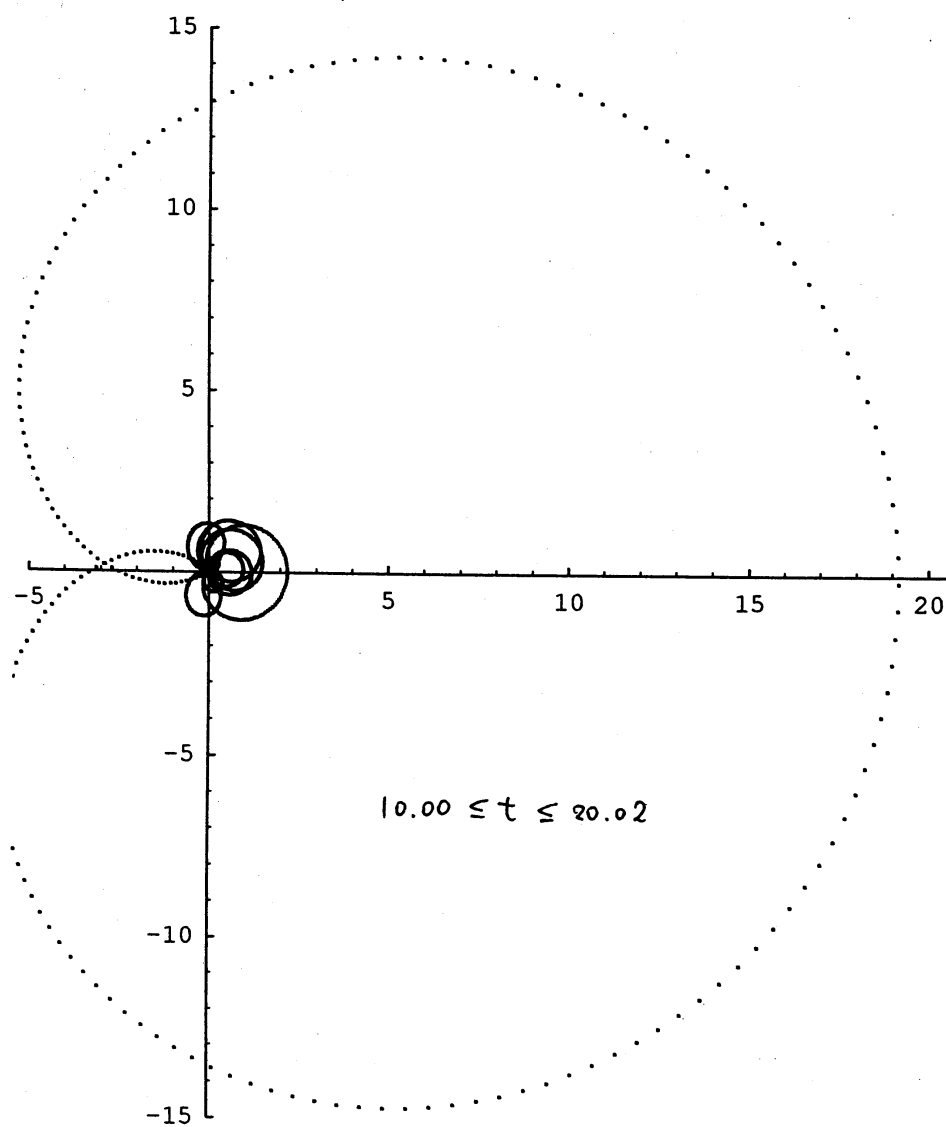
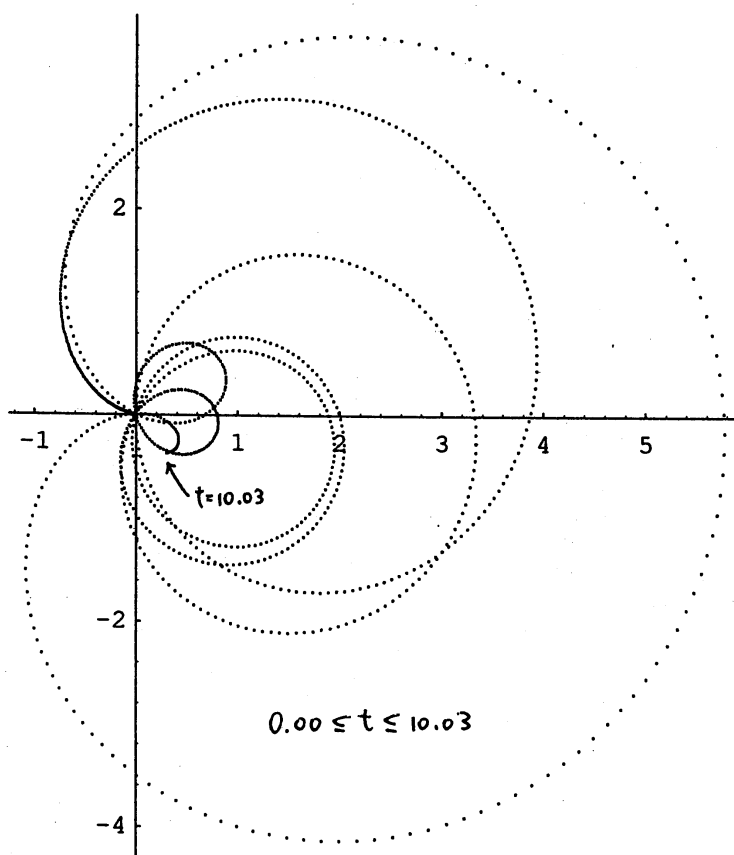
$$L(s, E_{11}) \quad s = 1 + it$$

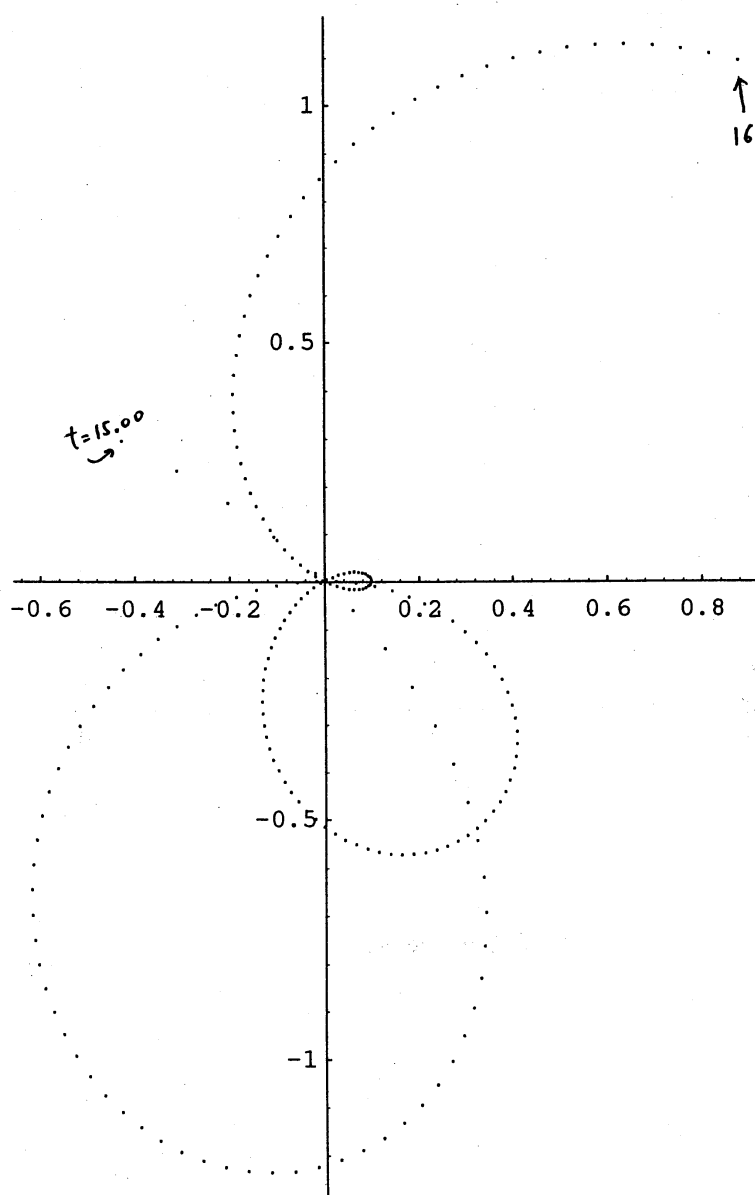
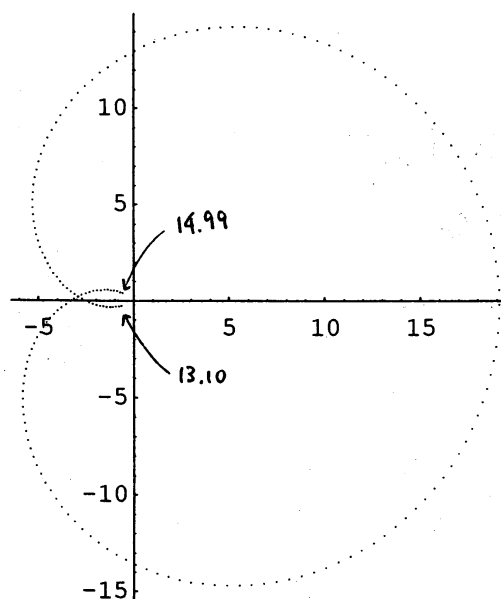
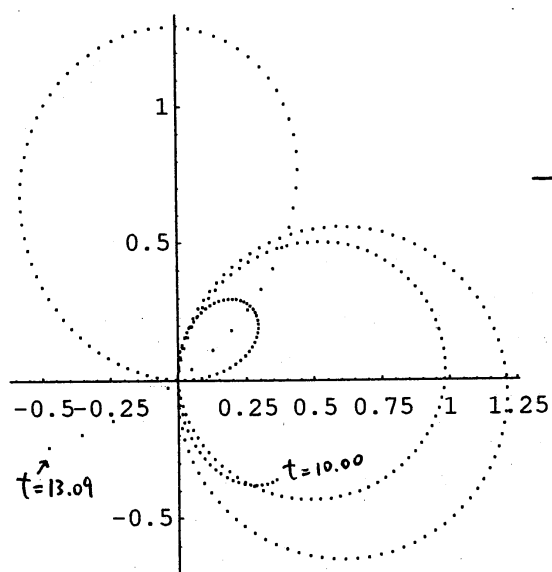
$$\Delta t = 0.01$$

$$L(s, E_{446})$$

$$s = 1 + it$$

$$\Delta t = 0.01$$



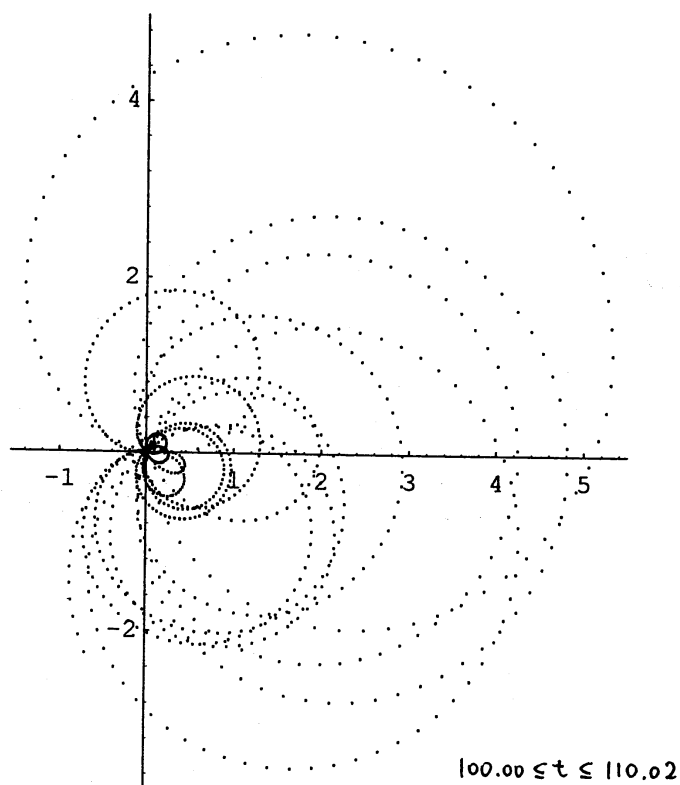
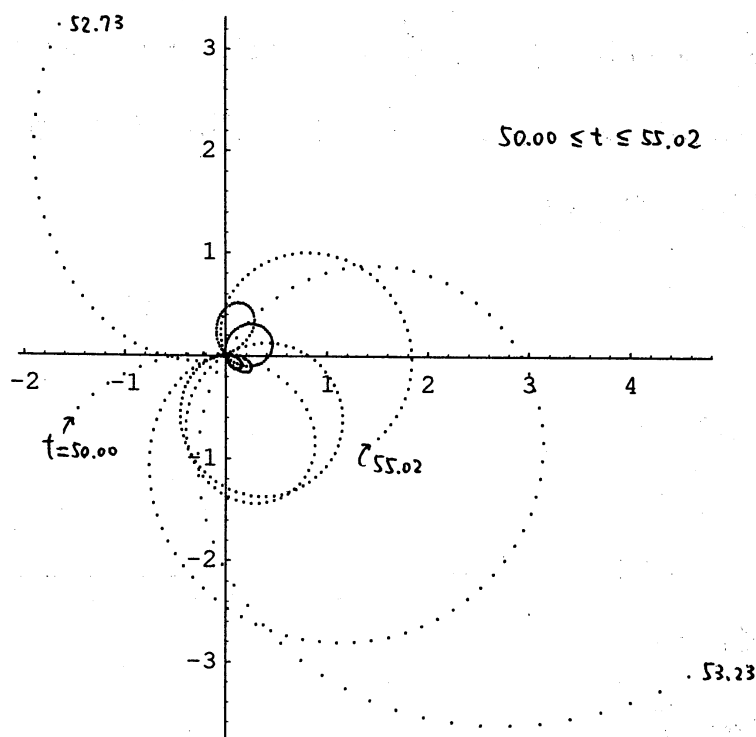


前頁下図の詳細
縮尺に注意して見
事。

$L(18, E_{446})$

$$S = 1 + it$$

$$\Delta\tau = 0.01$$



Birch-Swinnerton-Dyer $\overline{\rho}_{\mathbb{Q}}^{\text{SD}}$ (1:5') $L(s, E)$ の $s=1$ での zero 点の order は E の Mordell-Weil rank と等しいことが知られている。下図は rank 2, 3 の curve での $\overline{\rho}_{\mathbb{Q}}^{\text{SD}}$ の様子。

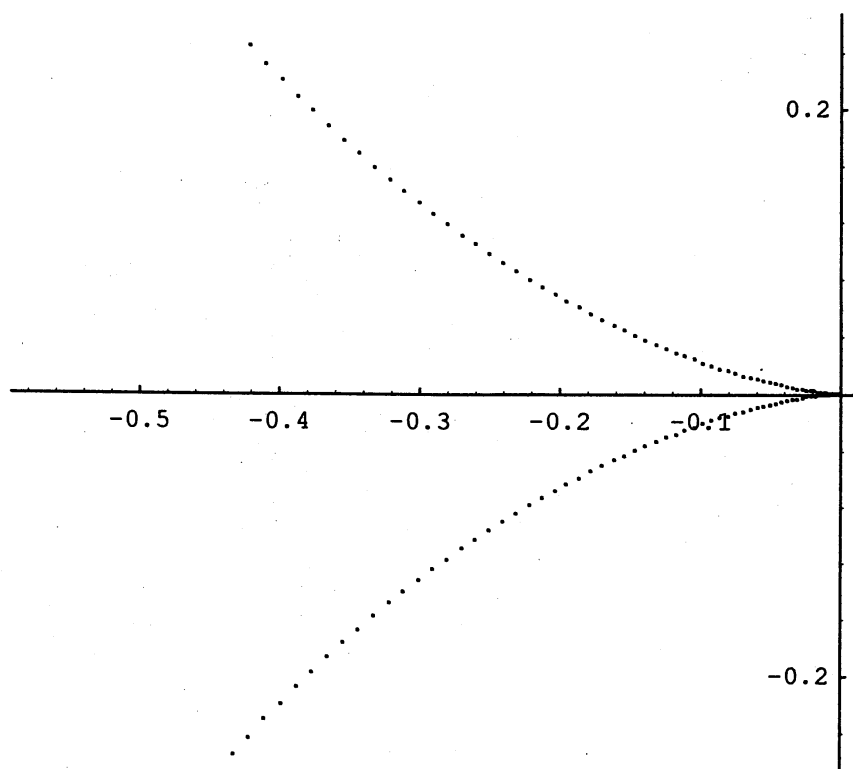
$L(s, E_{446})$

$s = 1 + it$

$t = 0$ の付近

$\Delta t = 0.01$

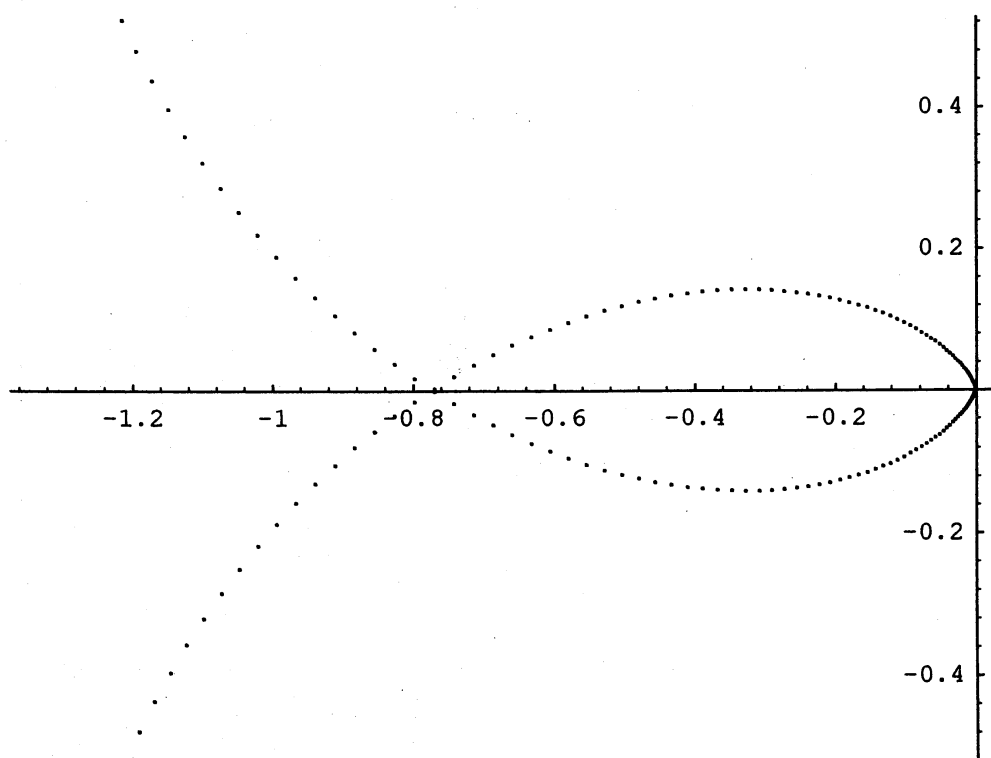
rank 2



$L(s, E_{509})$

の $\overline{\rho}_{\mathbb{Q}}^{\text{SD}}$

rank 3



参考文献

- [1] S. Hitotumatu, J. Yamauchi and T. Uno, Sûchikeisanhou III (Numerical Computing Methods III, in Japanese), Baihukan 1971.
- [2] T. Kano (ed.) *Riemann Hypothesis*, Nihonhyouronsha, (1991) (Japanese).
- [3] A. W. Knap, *Elliptic curves*, Princeton University Press, (1992).
- [4] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, New York, (1974).
- [5] A. F. Lavrik, Approximate functional equation for Dirichlet Functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 32 (1968), 129-179.
- [6] R. T. Turganaliev, An approximate functional equation and moments of the Dirichlet series generated by the Ramanujan function, *Izv. Akad. Nauk. Kazakhstan* (1992) 49-55 (Russian).
- [7] H. Yoshida, On calculations of zeros L-functions related with Ramanujan's discriminant function on the critical line, *J. Ramanujan Math. Soc.* 3(1) (1988), 87-95.
- [8] ———, On calculations of zeros of various L-functions, *Symposium on automorphic forms at Kinosaki*, (1993), 47-72.