

Discontinuous Inclined Derivative

教育大理 本尾 実

§ 1. Dynkin, Mal'jutov の結果

$r_0 > 0$ に對して

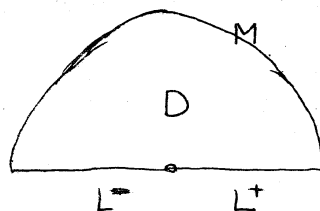
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r_0^2, y > 0\}$$

$$M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r_0^2, y \geq 0\}$$

$$L^+ = \{(x, 0) : 0 < x < r_0\}$$

$$L^- = \{(x, 0) : 0 > x > -r_0\}$$

$$L = L^+ \cup L^-$$



とおく。Dynkin [1] Mal'jutov [2] の結果を局所的な問題に

限ると次のようになる。 $p(x), g(x)$ は $L \cup \{0\}$ 上 Hölder 連続

$g(x) \geq 0, p(x)^2 + g(x)^2 = 1$ on $L \cup \{0\}$, $p(x) \neq 0$ on L ,

$\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = 0$ をみたす関数とし、境界問題

$$(1) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } D$$

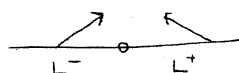
$$u = 0 \quad \text{on } M$$

$$p(x) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を考へる。

[I] $p(x) < 0$ on L^+ , $p(x) > 0$ on L^-

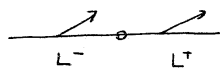
のとき, 二つの有界な一次独立な(1)の解



u_+ 及び u_- が存在し $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in L^+}} u_+(x) = \delta_{ij}$ $i, j = + \text{ or } -$

をみたす。又任意の(1)の有界な解は u_+ と u_- の一次組合である。

[II] $p(x) > 0$ on L のとき

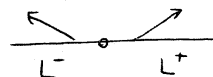


$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in L^+}} u_+(x) = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in L^-}} u_+(x) = 1$ とする

有界な(1)の解が存在し, 任意の有界な(1)の解は u_+ の定数倍である。

[II'] $p(x) < 0$ on L のときは [II] と同様。

[III] $p(x) > 0$ on L^+ , $p(x) < 0$ on L^-



のとき(1)には有界な解は存在しない。(0を除いて。)

(註) Dynkin [1] では非負で必ずしも有界でない解も研究されている。

§2 問題

境界問題

$$(2) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } D$$

$$u = 0 \quad \text{on } M$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{on } L$$

の $\mathcal{V} = C(\bar{D} - \{0\}) \cap C^2(D) \cap C^1(D \cup L)$ に属する有界な解の全体を $\mathcal{H}$ とする。 $a(x)$ が (原点も含めて) $L \cup \{0\}$ で Hölder 連続なら $\mathcal{H} = \{0\}$ であることはよく知られている。 §1 では

$\lim_{x \rightarrow 0} |a(x)| = \infty$ の場合が問題であった。(I), (II), (II') では

$\mathcal{H} \neq \{0\}$ (III) では $\mathcal{H} = \{0\}$ である。ここでは $a(x)$ が有界でも $a(x)$ の原点に於ける Hölder 連続性がなくなると $\mathcal{H} \neq \{0\}$ のおこり得ることを示す。(roughに云うと, $\mathcal{H} \neq \{0\}$ のときは (2) に対応するマルコフ過程が正の確率で原点に近づくことを示す。 $\mathcal{H} = \{0\}$ ならそのような確率は 0 である。)

§3. Barrier による手法.

以下 $a(x)$ は L 上 局所 Hölder 連続と仮定する。次の四つの lemma は基本的には Maljutov [2] に証明されている。

[lemma 1] $\varphi \geq 0$ を L 上 有界な連続関数とし

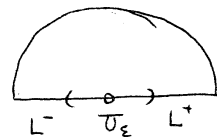
$$U_\varepsilon = \{(x, 0) : |x| < \varepsilon\} \quad \text{と置く。}$$

$$(3) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } D$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{on } M$$

$$u_\varepsilon = \varphi \quad \text{on } U_\varepsilon$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} + a(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = 0 \quad \text{on } L - U_\varepsilon$$



の解 u_ε は唯一に存在し, ε が減少すると u_ε も減少する。

今 $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ とおくと $u \in \mathcal{H}_g$ である。

[lemma 2] (4) $\Delta u \leq 0$ in D

$$u \geq 0 \quad \text{on } \overline{U_\varepsilon} \cup M$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \leq 0 \quad \text{on } L - \overline{U_\varepsilon}$$

をみたす $u \in \mathcal{H}$ は $\overline{D} - \{0\}$ で $u \geq 0$ となる。

[lemma 3] $\mathcal{H}$ に属する有界な関数 v で

$$\sup_D v(x) > \sup_M v(x), \quad \Delta v \geq 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + a(x) \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \quad \text{on } L$$

をみたすものが存在すれば $\mathcal{H}_g \neq \{0\}$ 。

[lemma 4] $\mathcal{H}$ に属する関数 w で $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \infty$,

$$w \geq -K > -\infty \quad \text{on } M, \quad \Delta w \leq 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + a(x) \frac{\partial w}{\partial x} \leq 0 \quad \text{on } L$$

をみたすものが存在すれば $\mathcal{H}_g = \{0\}$ 。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{と} \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$u_1 = \frac{1}{r} \quad u_2 = \theta$$

$$u_3 = \frac{\log \frac{1}{r}}{(\log \frac{1}{r})^2 + (\theta - \frac{\pi}{2})^2} \quad u_4 = \frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{(\log \frac{1}{r})^2 + (\theta - \frac{\pi}{2})^2}$$

とおく。

[Theorem 1] 定数 a が存在して, $\gamma_0 < e^{-3\pi}$, $e^{-\frac{|a|}{2}\pi}$

$$(5) \quad a(x) - a < -\frac{2\pi(1+a^2)}{\log \frac{1}{|x|}} \quad \text{on } L^+$$

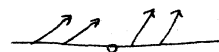
$$a(x) - a > \frac{2\pi(1+a^2)}{\log \frac{1}{|x|}} \quad \text{on } L^-$$

が成立すれば $\mathcal{E}_g \neq \{0\}$ である。

証明は条件 (5) のもとで, $v = au_4 - u_3$ が Lemma 3 の条件を満たすことを用いる。 (γ_0) に關する条件は本質的でない。

[例 1] $a(x) \equiv a_+$ on L^+ , $a(x) \equiv a_-$ on L^- ,

$a_+ < a_-$ ならば $\mathcal{E}_g \neq \{0\}$



$$[例 2] \quad a(x) = \begin{cases} a - \frac{c}{\log \frac{1}{|x|}} & \text{on } L^+ \\ a + \frac{c}{\log \frac{1}{|x|}} & \text{on } L^- \end{cases} \quad (c > 2\pi(1+a^2))$$

ならば $\mathcal{E}_g \neq \{0\}$ 。この例は $a(x)$ が厚実で連続でも $\mathcal{E}_g \neq \{0\}$ のあり得ることを示している。

[Theorem 2] $\gamma_0 < e^{-\pi}$, 定数 a が存在して

$$(6) \quad a(x) - a > -\frac{\pi(1+a^2)}{(\log \frac{1}{|x|})^3} \quad \text{on } L^+$$

$$a(x) - a < \frac{\pi(1+a^2)}{(\log \frac{1}{|x|})^3} \quad \text{on } L^-$$

が成立すると $\mathcal{E}_g = \{0\}$ である。

証明は $w = u_1 + au_2 - u_3 + au_4$ が Lemma 4 の条件を満たす

ことを用いる。この定理から $q(x)$ が原点で H\"older 連続でなくとも $\mathcal{L}_q = \{0\}$ となり得ることがわかる。 $\mathcal{L}_q = \{0\}$ のための必要充分条件はわからない。

$q(x)$ が有界のとき §1 の結果と非常に異なる点は $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in L}} u(x) = 0$ (又は $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in L}} u(x) = 0$) をみたす (2) の解は 0 に限ることが; barrier $v = \gamma^{-p} \sin p\theta$ ($p > 0$) を用いると, わかることである。

[1] Dynkin E. B., Martin boundary and nonnegative solutions of boundary value problems with an oblique derivative. Uspehi Mat. Nauk SSSR vol 18 (1964) pp 3~50

[2] Maljutov M. B., Brownian motion with reflection and a problem with a directional derivative. Doklady Akad. Nauk (1964)