

可換微分作用素とバクトル束 (Krichever の研究の紹介)

阪大 理 伊達悠朗

最近、いわゆる、散乱の逆問題の方法が発見され、発展してゆく過程において、次の問題が重要となってきた。

(問題) ∇ 線型微分作用素の対、 $L = \sum_{j=0}^n u_j(x) D^j$, $M = \sum_{j=0}^n v_j(x) D^j$, $D = \frac{d}{dx}$, で可換; $[L, M] = LM - ML = 0$, となるものを分類すること $\triangle$

ここで、 u_j, v_j は x の連続関数と成分とする行列。

ここでは、この問題に関する Krichever の研究を紹介する。

尚、この問題は、1920年代に、散乱の逆問題の方法の話とは無関係に、Burchnell-Chaundy [1] によって研究されていたことが、Krichever の結果が発表された後でわかった。又、Drinfel'd [2], Mumford [5] 等による、より代数幾何学的な approach もある。

1. 可換微分作用素と代数曲線、ベクトル束

まず、可換な対 L, M が与えられた時に、それに対して、代数曲線 B が、その上のベクトル束に対応させたことを考える。

簡単の為に、 L, M は scalar 係数であるとす。更に、独立変数、従属変数の変換を行って、 $u_m = v_m = 1, u_{m-1} = 0$, とおく。

次の定理が基本的である。

定理 (Burchall-Chaundy) $\exists f \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$, 既約, s.t.

$$f(M, L) = 0$$

*) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $\mathcal{L}(\lambda) = \{y; Ly = \lambda y\}$ とおく。 $\mathcal{L}(\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上 m 次元の線型空間である。 L と M は可換であるから、 M は $\mathcal{L}(\lambda)$ の線型写像 $M(\lambda)$ を induce する。 $M(\lambda)$ の最小多項式を $f(\mu, \lambda)$ とする。 $\mathcal{L}(\lambda)$ の基底 $C_j(x, x_0, \lambda)$, $j=0, \dots, m-1$, とおく。初期条件 $(D^j C_j)(x_0, x_0, \lambda) = \delta_{j,0}$, $j=0, \dots, m-1$, ($x_0 \in \mathbb{R}$ fix) で定義されたものをとってこれを、 $f \in \mathbb{C}[\mu, \lambda]$ であることがわかる。

$f(M, L)$ は線型微分作用素で、その型 $\mathcal{L}(\lambda)$ に制限すれば $f(M(\lambda), \lambda)$ である。これは最小多項式の定義から見て、従って $f(M, L)$ の kernel は無限次元となる。 //

$f(\mu, \lambda) = 0$ を affine 代数曲線 R_0 が定義される。 R_0 を compact 化について考える。

その為に、方程式

$$L\psi(x, k) = k^n \psi(x, k)$$

の $\psi(x, k) = e^{k(x-x_0)} \left(\sum_{s=N}^{\infty} \beta_s(x) k^{-s} \right)$, (N は整数) の形の形式解を考
えれば, Puiseux 級数体 $\mathbb{C}\{\lambda^{-1}\}$ の $f(\mu, \lambda)$ の分解が, $l \in \mathbb{N}$, n の
ある公約数 ℓ として

$$f(\mu, \lambda) = \prod_{i=0}^{m'-1} (\mu - A(x_i)), \quad \kappa_{\lambda}^{n'} = \lambda$$

$$A(\kappa) = \kappa^{n'} + \sum_{i=n'-1}^{-\infty} A_i \kappa^i, \quad A_i \in \mathbb{C}, \quad m'\ell = n, \quad n'\ell = n,$$

と与えられることをわかった。 $M(\lambda)$ の固有多項式は $\{f(\mu, \lambda)\}^{\ell}$ と
与えられた。

このことから, $f(\mu, \lambda) = 0$ で定義された affine 代数曲線 R_0 上
compact 化するには, 無限遠点 p_{∞} を一点付け加えられるとよく, p_{∞}
のまわりの local parameter $\lambda^{-1/n}$ が与えられることをわかった。
この代数曲線 R を表した。(以下 R は nonsingular とする。
す.)

$p = (\mu, \lambda) \in R_0$ に対して, $V_p = \{y; Ly = \lambda y, My = \mu y\}$ とおく。

$\dim V_p = l$ であり, τ の基底として, $\psi_i(x, x_0, p) = \sum_{k=0}^{m-1} \chi_{ik}(x_0, p) x^k$

$C_k(x, x_0, \lambda)$, $i=0, \dots, l-1$, の形を。 $\chi_{ik} = \delta_{ik}$, $i, k=0, \dots, l-1$, であり。

$(D^k \psi_i)(x_0, x_0, p) = \delta_{ik}$ なることがわかった。 Cramer の公式より, χ_{ik}

は μ, λ の有理式となる。つまり χ_{ik} は R 上の有理関数となる。

こうして, R_0 上に L, M の同時固有関数 Σ fibre とするベクトル束の family が定まる。(ψ_i の pole は x には依存しない)

このベクトル束 Σ は R 全体に拡張できることを考えた。

$\Psi = (D^j \psi_k)$ と ψ_i a wronski 行列 とする と, p_0 の近傍 では, 関数 $w_i(x)$, $i=0, \dots, l-2$, が存在 し

$$\left(\frac{d}{dx}\Psi\right)\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ \kappa + w_0 & w_1 & \dots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0(\kappa^{-1}) \end{pmatrix} \quad \kappa = \lambda^{\frac{1}{n}}$$

となることをわかる。

$\Phi_0(x, x_0, k)$ と微分方程式

$$\frac{d}{dx} \Phi_0(x, x_0, k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ k + w_0 & w_1 & \dots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} \Phi_0(x, x_0, k)$$

の初期条件 $\Phi_0(x_0, x_0, k) = I_l$ を持つ解とする。

$$(\psi_0, \dots, \psi_{l-1}) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x) \kappa^{-j} \right) \Phi_0(x, x_0, \kappa)$$

$$\xi_0(x_0) = (1, 0, \dots, 0), \quad \xi_s(x_0) = 0 \quad s \geq 1$$

と表わされる。

従って, 次のようにして $\mathbb{R}$ 上の rank l のベクトル束の family $V(x_0)$ が定まる。 $U \in p_0$ の近傍 とする と $\mathbb{R}_0$ では $\psi_i \in \text{frame}$ とし, U では $\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{sj} \kappa^{-s}$ $\xi_0 = (\xi_{00}, \dots, \xi_{0, l-1}) \in \text{frame}$ とし, U -part では $\psi \Phi_0(x, x_0, \kappa)$ と貼り合はせる。 Krichever の論文に述べられているベクトル束 $\mathcal{V}(x_0)$ は, ベクトル $\chi_j(x_0, p) = (\chi_{j0}(x_0, p), \dots, \chi_{j, l-1}(x_0, p))$, $j=0, \dots, l-1$ a pole を打ち消す形で定義されるものがある。

2. ベクトル束と matrix divisor

次に、代数曲線上のベクトル束と、matrix divisor との対応について述べる (cf. Tyurin [6])

まず、matrix divisor の定義を述べる。

$\mathcal{O}_P$ (resp. $\mathcal{M}_P$) $\ni P \in \mathcal{C}$ における holomorphic (resp. meromorphic) functions の germs とする。 $GL(\ell, \mathcal{O}_P) \setminus GL(\ell, \mathcal{M}_P)$ の元を、 P における order ℓ の local divisor と呼ぶ。

$\mathcal{C}$ 上の order ℓ の matrix divisor とは order ℓ の local divisors で生成された free abelian group の元をいう。 matrix divisors E, E' が同値とは $G \in GL(\ell, K)$ (K は $\mathcal{C}$ の関数体) が存在して $E = E'G$ なることをいう。

matrix divisor E が与えられたとき、次のようにしてベクトル束が定義される。 $\mathcal{C} = \bigcup U_i$ を open covering とし、 E は U_i 上で U_i 上の meromorphic functions と成る行列で実現されているとする。この時、 $g_{ij} = E_i E_j^{-1}$ は transition functions としてベクトル束が定義される。

逆に、ベクトル束 V が与えられた時には、 $U \subset \mathcal{C}$ 上で V の meromorphic frame を成る (通常の意味での) divisor を並べた matrix divisor が得られる。

holomorphic functions の germs による local divisor E_P は、次の normal form を持つ：

$$E_p = DA$$

$$D = \begin{pmatrix} z^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{d_\ell} \end{pmatrix}, \quad d_i = d_i(p) \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad z: p \text{ 附近の local parameter}$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in \mathbb{C}[z] / z^{d_j - d_i} \mathbb{C}[z]$$

$$a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = 0, \text{ if } d_i \geq d_j, i \neq j.$$

holomorphic functions の germs を成分とする local divisors がある。matrix divisors を effective と呼ぶ。effective divisor E の degree は $\sum_{p \in R} \sum_{i=1}^{\ell} d_i(p)$ と定義する。これは (通常) の divisor) $\deg E$ の degree に等しい。

3. Algebraic Spectral Data

$V(x_0)$. ある u は $\gamma(x_0)$ の x_0 -dependence を決定する。これは $\ell > 1$ の場合には難しいが、($\ell=1$ ならば、 R は Jacobian 上の流れ運動となる。) これは、可換な対 L, M に対して、algebraic spectral data と呼ばれるように定義する。後で、algebraic spectral data がある可換な微分作用素の対を再構成できることを示す。matrix divisor γ は generic な場合には algebraic spectral data を定義する。

ψ_j は pole は simple であるとする。それらは $\gamma_i(x_0)$, $i=1, \dots, N$ とする。 γ_i に対応する ψ_j の residue は $\varphi_{ij}(x)$ とし、 γ がある x の関数として一次独立な n の個数 m_i とする。 $g \in \mathbb{R}$ の

種数と $1 \leq \sum_{i=1}^N m_i = l g$ が成り立つ. ($z \in \mathbb{P}^1$, $\lambda^{-1}(z) = \{p_1, \dots, p_N\}$ とし, 関数 $\psi_j(x, x_0, p_R)$, $j=0, \dots, l-1$, $k=1, \dots, m'$ a wronskian を考え (示される.) z の z 付近, $\eta(x_0)$ は γ_i について

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{l-m_i} & * \\ \hline & z \\ & \vdots \\ & z \end{array} \right)_{m_i} \quad * : \text{定数}$$

n 形の local divisor に対応する z と n がある. 従って, (p_n を除く z) $\eta(x_0)$ に対応する effective matrix divisor は, degree は $l g$ と固定するとき,

$$\sum_{i=1}^N (l - m_i) m_i + N = l^2 g - \sum_{i=1}^N m_i + N \quad (\leq l^2 g)$$

個の parameter に依る. (畢竟は $m_i = 1$ のとき)

従って, 最大次元 (matrix divisor z の n) の z を考えるときは z は z の local divisor である

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -\alpha_{i0} \\ & \vdots \\ & 1 - \alpha_{i, l-2} \\ & z \end{array} \right)$$

n 形の n も n , 言い換えると, γ_i に対応する ψ_i a residue q_{ij} a 間には $q_{ij}(x) = \alpha_{ij}(x_0) q_{i, l-1}(x)$, $j=0, \dots, l-2$, 存在関係が成り立つ n を考えることはできる.

組 $\{ R, (\gamma_i(x_0), \alpha_{ij}(x_0), j=0, \dots, l-2), i=1, \dots, l g, w_i(x), i=0, \dots, l-2 \}$

($w_i(x)$ は $1, z$ の関数である) Σ L.M. に対応する algebraic spectral data と呼ぶ.

4. Baker-Akhiezer function

次の data を与えられたい。

$\mathcal{R}$: 種数 $g > 0$ の compact 1 - 2 面,

$p_0 \in \mathcal{R}$, $z = K^{-1}$, p_0 を $\mathcal{R}$ の local parameter,

$\delta = \sum_{i=1}^{2g} \gamma_i$: $\mathcal{R}$ 上の non-special divisor.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2g})$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i, l-1}) \in \mathbb{C}^{l-1}$

$A_j(x, k)$ ($j=1, \dots, s$) $l \times l$ 行列, k は多項式, s.t.

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = [A_j, A_k].$$

これを x について A_j を関数 $\Phi_0(x, x_0, k)$ と

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j} = A_j \Phi_0, \quad \Phi_0(x_0, x_0, k) = I_l$$

と定めておく。一意に定まる。

定理 (Krichever-Novikov) $\exists \Psi(x, x_0, p) = (\Psi_1(x, x_0, p), \dots, \Psi_l(x, x_0, p))$,

$p \in \mathbb{C}$, s.t.

1. Ψ は $\mathcal{R} - \{p_0\}$ で meromorphic, pole divisor $= \delta z$, γ_i は γ_i

の Ψ_j の residue $\varphi_{ij}(x)$ は

$$\varphi_{ij}(x) = \alpha_{ij} \varphi_{il}(x), \quad j=1, \dots, l-1$$

と定まる,

2. p_0 付近で

$$\Psi(x, x_0, p) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) x^{-s} \right) \Phi_0(x, x_0, x), \quad \xi_0 = (1, 0, \dots, 0).$$

$\Rightarrow$ 以上性質をもつ Φ の構成は、 $U \in P_\infty$ の近傍とし、
 $U=L$ とおくと、次の $\mathbb{R}$ 上の Riemann-Hilbert の問題が解く
 $\Rightarrow$ に帰着する。

$$\Phi^+(x, x_0, p) = \Phi^-(x, x_0, p) \Phi_0(x, x_0, \kappa) \quad \text{on } L$$

$$\begin{matrix} \times P_\infty \\ \mathbb{R}^- \\ L \end{matrix} \mathbb{R}^+$$

Φ : meromorphic in $\mathbb{R} - \{L\}$, $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_l)$ とするとし

$$(\phi_i) + \delta \geq 0.$$

5. L, M の再構成

algebraic spectral data $\{R, (\gamma_i, \alpha_{ij}, i=0, \dots, l-2), i=1, \dots, l, w_i(x),$
 $i=0, \dots, l-2\}$ から L と M を作る。

まず、 $\Phi_0(x, x_0, \kappa)$ を微分方程式

$$\frac{d}{dx} \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \kappa + w_0 & w_1 & \dots & w_{l-2} & 0 \end{pmatrix} \Phi_0$$

の解で、初期条件 $\Phi_0(x_0, x_0, \kappa) = I_l \in \mathcal{H}$ となる Φ_0 を作る。

$\Rightarrow$ 用いる、4. の構成法で $\psi_j(x, x_0, p)$, $j=0, \dots, l-1$ を決める。

$\Psi \in \psi_j$, $j=0, \dots, l-1$ の wronski (行列) とする。 P_∞ の近傍で

$$\Psi(x, x_0, p) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Psi'_s(x) \kappa^{-s} \right) \Phi_0(x, x_0, \kappa)$$

$\Rightarrow$ 表現される。

$\lambda \in P_\infty$ の $\mathcal{H}$ での pole とする $\mathbb{R}$ 上の meromorphic function とする。

λ の order は m とする: $\lambda(p) \equiv \sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha \kappa^\alpha \pmod{O(\kappa^m)}$ around P_∞ .

補題 $\exists_1 z_j(x)$, $j=0, \dots, m$, $(l \times l)$ -matrix s.t.

$$\left(\sum_{j=0}^m z_j(x) D^{j,l} \Phi \right) \Phi^{-1} \equiv \lambda \pmod{O(x^{-1})} \quad \text{around } p_\infty$$

$\therefore$ $(l \times l)$ -行列 $a_{sj}(x)$ Σ

$$(D^j \Phi_0)(x, x_0, k) = \left(\sum_{s=0}^{N(j)} a_{sj}(x) k^s \right) \Phi_0(x, x_0, k), \quad N(j) = \left[\frac{j}{l} \right]$$

より決める, $z_\alpha(x)$ Σ

$$\sum_{\alpha=0}^m z_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha l} \sum_{t=0}^{N(j)} a_{lj} (D^{\alpha l - j} \xi_{s+t}) a_{tj} = \sum_{\alpha=0}^m \lambda_\alpha \xi_{s+\alpha}, \quad s=-m, \dots, 0$$

より決めることができる.

$$L = \sum_{\alpha=0}^m \sum_{j=1}^l z_{\alpha,j}(x) D^{\alpha l + j - 1}, \quad z_\alpha = (z_{\alpha,j})$$

と $\lambda < \infty$, $L \psi_i = \lambda \psi_i$, $i=0, \dots, l-1$ が成り立つ.

μ と λ は μ の pole Σ 上の meromorphic function とすれば, μ に対して λ と同様 Σ 上の meromorphic function ($m = \text{order of } \mu$) M が定まり, $M \psi_i = \mu \psi_i$, $i=0, \dots, l-1$ が成り立つ. $\therefore [L, M] = 0$ となる.

注. $\gamma_i(x_0)$, $\alpha_{ij}(x_0)$ の x_0 -dependence を決めることはできない, それより $\gamma_i(x_0)$, $\alpha_{ij}(x_0)$ が必要. Riemann-Roch の定理を用いる. 非自相似方程式 Σ を解くことはできず, ψ_i を構成できる. $g=1$, $l=2$ の場合の $\gamma_i(x_0)$, $\alpha_{ij}(x_0)$ の x_0 -dependence は Krichever-Novikov [4] に述べてある.

References

1. J. L. Burchnall and T. W. Chaundy: Proc. London Math. Soc. 21 (1922), p. 420, Proc. Royal Soc. London (A) 118 (1928) p. 557, 134 (1931), p. 471.
2. V. G. Drinfeld: Funct. Anal. Appl. 11 (1977), p. 9.
3. I. M. Krichever: Funct. Anal. Appl. 12 (1978), p. 175.
4. I. M. Krichever and S. P. Novikov: Funct. Anal. Appl. 12 (1978), p. 276.
5. D. Mumford: Proc. Int. Symp. Alg. Geom. Kyoto 1977 (1978), p. 115.
6. A. N. Tyurin: A. M. S. Transl. (2) 63 (1967), p. 245, (2) 73 (1968), p. 196.